This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

RÉSUMÉ DES LEÇONS

[illegible]

A L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

SUR

L'APPLICATION DE LA MÉCANIQUE

A L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS ET DES MACHINES

PREMIÈRE PARTIE

[illegible] LEÇONS SUR LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX [illegible] L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS EN TERRE, EN MAÇONNERIE ET EN CHARPENTE.

PREMIÈRE SECTION

DE LA RÉSISTANCE DES CORPS SOLIDES,

PAR NAVIER,

[illegible]

Troisième édition

AVEC DES NOTES ET DES APPENDICES

M. BARRÉ DE SAINT-VENANT

[illegible]

TOME [illegible]

PARIS

DUNOD, ÉDITEUR

[illegible] 49

1864

CHEZ DUNOD, ÉDITEUR,
Précédemment Carilian-Goeury et Victor Dalmont,
LIBRAIRIE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,
49, Quai des Augustins, à Paris.

COMPLÉMENT
DE LA
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE
DE
MM. BRIOT ET BOUQUET.

LEÇONS FAITES
PAR M. BRIOT, A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
ET RÉDIGÉES PAR SES ÉLÈVES.

Un beau volume grand in-8 avec 8 figures dans le texte. — Prix : 5 francs.

ONT PARU RÉCEMMENT :

MÉCANIQUE. LEÇONS DE MÉCANIQUE conformes aux programmes de l'enseignement des lycées et de l'admission aux écoles spéciales, à l'usage des élèves de mathématiques spéciales et des candidats aux Ecoles polytechnique et normale supérieure ; par Ch. Briot, *professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, docteur ès sciences, etc.* 1 vol. in-8, avec figures. Prix : 5 fr.

PHYSIQUE. COURS ÉLÉMENTAIRE DE PHYSIQUE, précédé de notions de mécanique et suivi de problèmes ; par A. Boutan, *professeur de physique au lycée Saint-Louis*, et J. Ch. d'Almeida, *professeur de physique au lycée Napoléon ;* 2e édition, revue et augmentée, avec 657 figures et un spectre solaire intercalés dans le texte. 1 vol. grand in-8. Prix : 7 fr.

CHIMIE. COURS ÉLÉMENTAIRE DE CHIMIE ; par H. Debray, *professeur au lycée Charlemagne ;* avec nombreuses figures intercalées dans le texte. 1 fort vol. grand in-8 et planches. Prix : 7 fr.

CHIMIE. ATLAS DE CHIMIE ANALYTIQUE MINÉRALE, renfermant les premières notions indispensables aux personnes qui commencent la chimie et 17 tableaux parfaitement imprimés en couleur des précipités donnés par les réactifs et des colorations obtenues au chalumeau ; par A. Terreil, *aide de chimie au Muséum impérial d'histoire naturelle.* In-8 jésus. Prix : 12 fr. 50 c.

OUVRAGES RELATIFS A L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE DES LYCÉES.

ARITHMÉTIQUE. COURS D'ARITHMÉTIQUE, suivi des notions élémentaires d'algèbre ; ouvrage rédigé d'après l'instruction générale sur l'exécution du plan d'études des lycées impériaux, et contenant les énoncés de 560 problèmes, dont les données ont été prises dans des publications officielles ; par Ch. Lebesgue, *ancien élève de l'Ecole polytechnique, professeur au lycée de Versailles.* In-12. 2 fr. 50 c.

Cet ouvrage est tout à fait conforme à l'esprit et à la lettre du plan d'études des lycées. Il contient toutes les questions d'arithmétique et d'algèbre traitées dans la classe de troisième (section des sciences), et est terminé par une série de 17 tableaux extraits des publications *officielles* sur la population, l'agriculture et l'industrie. Conformément à l'instruction générale sur le nouveau plan d'études, les 560 problèmes que l'auteur y énonce, reposent sur des données réelles et non sur des nombres arbitraires.

ALGÈBRE. LEÇONS D'ALGÈBRE, à l'usage des candidats au baccalauréat ès sciences et aux écoles spéciales, *entièrement conformes aux programmes* arrêtés pour l'enseignement des lycées et l'admission aux écoles spéciales ; par Ch. Briot, *professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, docteur ès sciences, maître de conférences à l'École normale supérieure, etc.* Nouvelle édition, 2 vol. in-8, fig. (*ensemble*). 7 fr.

La première partie, à l'usage des élèves de la classe de seconde et des candidats au

baccalauréat ès sciences et aux Écoles de marine et de Saint-Cyr, précédée d'une introduction à l'usage des élèves de la classe de troisième. 6e édition, in-8, fig. (*seule*). 3 fr. 50

LA DEUXIÈME PARTIE, à l'usage des élèves de mathématiques spéciales et des candidats aux Écoles polytechnique et normale supérieure. 4e édition. 1 vol. in-8, fig. (seule) 4 fr. 50 c.

ÉQUATIONS. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES; par le docteur M. A. STERN, *professeur à l'Université de Goettingue*. Ouvrage couronné par la Société des sciences de Danemark; traduit et annoté par E. LÉVY, *agrégé des Sciences*. In-8 avec figures dans le texte. 1 fr. 75 c.

La résolution des équations transcendantes est exigée pour l'admission à l'École polytechnique. — C'est une des théories mentionnées dans le Programme officiel.

Les Traités d'algèbre sont, à ce sujet, tout à fait insuffisants — La publication du travail remarquable du Dr STERN est un véritable service rendu à l'enseignement.

COSMOGRAPHIE. COURS DE COSMOGRAPHIE, OU ÉLÉMENTS D'ASTRONOMIE, comprenant les matières du *nouveau programme* arrêté pour l'enseignement des lycées; par CH. BRIOT, *professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, etc.* 3e édition, conforme au programme de l'enseignement des lycées. 1 beau vol. in-8, avec 100 figures dans le texte et 3 planches gravées, dont 2 à l'*aqua-tinta*. Paris, 1860. 5 fr.

Cet ouvrage répond à toutes les questions d'examen pour l'admission aux Écoles polytechnique et de Saint-Cyr, et pour le baccalauréat ès sciences.

Le journal de l'*Instruction publique* s'exprime ainsi à propos de ce nouveau *Cours de Cosmographie :*

« . . . . . Les définitions « y sont claires, complètes et in- « téressantes; M. BRIOT se sou- « vient toujours qu'il parle à de « jeunes intelligences auxquelles il « enseigne une science toute nou- « velle; on dirait qu'il s'efforce de « la faire découvrir par la réflexion « et le bon sens à l'aide des con- « naissances que les enfants ont « déjà acquises. Parmi tant d'au- « tres détails curieux et faciles à « saisir par la manière dont ils « sont exposés, nous citerons le « chapitre où il est question des « *Étoiles filantes* et des *Aéro-* « *lithes*. En outre, un complément « placé à la fin du volume met « les élèves au courant des décou- « vertes et des travaux récents de « la science. »

THÉORÈMES ET PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, avec leur démonstration et leur solution raisonnée; ouvrage destiné à tous les aspirants au baccalauréat et aux Écoles du gouvernement; par E. CATALAN, *docteur ès sciences, agrégé de l'Université, etc.* 3e édition, refondue et considérablement augmentée. 1 beau vol. in-8, avec 15 planches. 6 fr.

GÉOMÉTRIE. ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE comprenant LA GÉOMÉTRIE PURE ET APPLIQUÉE; ouvrage conforme au nouveau programme et aux instructions ministérielles de 1854. 2 parties in-8 avec 442 figures dans le texte, et 3 planches gravées; par A. RUDES, *professeur au lycée Napoléon*. 6 fr. 25 c.

On vend séparément :

La géométrie pure. 1 vol. in-8 avec 344 figures. 4 fr.

La géométrie appliquée. 1 vol. in-8 avec 98 figures et 3 planches gravées. 2 fr. 25 c.

La *Géométrie pure* est divisée en 7 livres suivis d'un supplément sur les courbes usuelles; on y trouve une théorie du contact et de l'intersection des cercles dégagée de tout raisonnement par la réduction à l'absurde, des démonstrations simplifiées sur la mesure des angles inscrits, sur les relations numériques entre les côtés d'un triangle, sur le rapport des aires des figures semblables, sur celui des volumes des polyèdres semblables, sur la surface du tronc de cône, sur l'égalité des angles que forme soit la tangente à l'ellipse avec les rayons vecteurs menés au point de contact, soit la tangente à la parabole avec le rayon vecteur mené au point de contact et avec l'axe.

La *Géométrie* appliquée contient les premières notions sur le levé des plans, les projections et le nivellement. Dans un appendice sur les projections, on a complété la partie de la géométrie descriptive qui concerne la ligne droite et le plan, en employant la méthode du changement de plans de projection appliquée seulement au plan vertical; on y trouve comme exercices la construction générale des cadrans solaires et la manière de se servir de la projection d'un cube pour projeter un ouvrage de charpente, un banc, par exemple.

Les énoncés d'environ 200 problèmes et théorèmes accompagnés de numéros de renvoi aux diverses parties des *Éléments* auxquels ils se rapportent, offrent aux élèves des sujets d'exercices faciles sur toutes ces parties.

TRIGONOMÉTRIE. LEÇONS DE TRIGONOMÉTRIE rectiligne et sphérique, à l'usage des candidats au baccalauréat ès sciences et aux Écoles spéciales du gouvernement; par ROGUET, *professeur*. 3e édition, revue avec soin et rédigée conformément au programme officiel de l'enseignement scientifique des lycées. In-8, avec figures dans le texte. Paris, 1860. 2 fr. 50 c.

TRIGONOMÉTRIE. LEÇONS DE TRIGONOMÉTRIE rectiligne et sphérique, à l'usage des élèves des lycées et des candidats au baccalauréat et aux écoles spéciales; par E. ROUCHÉ, *ancien élève de l'Ecole polytechnique, professeur au lycée Charle-*

magne, et L. Lacour, *professeur au lycée Charlemagne*. 1 vol. in-8, avec figures intercalées dans le texte. 5 fr. 50 c.

Les seize premières leçons renferment les matières exigées pour l'admission au baccalauréat ès sciences, à l'École navale et à l'École de Saint-Cyr: les suivantes s'adressent aux élèves de mathématiques spéciales. Chaque chapitre contient, outre les exercices résolus, et imprimés en petit caractère, un grand nombre de questions énoncées que les élèves studieux s'exerceront utilement à résoudre. Les leçons qui traitent de l'usage des tables et de l'application de la trigonométrie au levé des plans ont été l'objet d'un soin particulier; dans la première, chaque règle est suivie d'un exemple qui en fixe le sens, et dans la seconde, des applications numériques nombreuses et variées permettent au lecteur d'acquérir cette habitude des calculs à laquelle on ne saurait attacher trop de prix. On trouvera enfin dans cet ouvrage des démonstrations simples et nouvelles des formules relatives à la réduction des arcs, de la formule de Lhuillier et du théorème de Legendre.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. LEÇONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE à deux et à trois dimensions, à l'usage des candidats aux Ecoles polytechnique et normale, précédées d'une introduction renfermant les premières notions sur les courbes usuelles exigées des candidats au baccalauréat ès sciences; ouvrage entièrement conforme aux programmes de 1852 pour l'enseignement scientifique des lycées; par Roguet, *professeur*, 2e édition, revue et augmentée. 1 vol. in-8, avec les figures dans le texte. 7 fr. 50 c.

ANALYSE. RÉSUMÉ DES LEÇONS D'ANALYSE données à l'École polytechnique; par Navier, *membre de l'Institut, professeur d'analyse et de mécanique à l'École polytechnique, etc.* 2e édition, revue et annotée par M. Liouville, *membre de l'Institut, etc.* 2 volumes in-8, avec planches. 10 fr.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, renfermant toutes les matières exigées pour l'admission à l'École polytechnique, le baccalauréat, etc.; par E. Catalan, *docteur ès sciences, agrégé de l'Université, etc.* Nouvelle édition, 2 parties in-8, avec atlas de 28 planches. 7 fr. 50 c.

Chaque partie se vend séparément :

1re *partie :* La ligne droite et le plan. 3e édition, in-8, avec atlas de 11 planches. 4 fr.

2e *partie :* Problèmes sur les surfaces, in-8, avec atlas de 17 planches. 4 fr.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. TRAITÉ COMPLET DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE; par Th. Olivier, *docteur ès sciences, professeur de Géométrie descriptive au Conservatoire des arts et métiers, répétiteur à l'École polytechnique, professeur-fondateur de l'École centrale des arts et manufactures, etc.;* ouvrage divisé en plusieurs parties, qui se vendent chacune séparément :

1° COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. 2e édition revue et augmentée; deux parties in-4, avec un atlas de 97 planches. 22 fr.

La 1re *partie :* DU POINT, DE LA DROITE ET DU PLAN. 2e édition, revue et augmentée. 2 vol. in-4, dont 1 de 43 planches.

Cette première partie contient tout ce qui est relatif à l'écriture et à la notation graphique, à la méthode du changement des plans de projection et à celle du mouvement de rotation; elle contient en outre les notions élémentaires sur les ombres, la perspective et les plans cotés.

La 2e *partie :* DES COURBES ET DES SURFACES COURBES, et en particulier DES SECTIONS CONIQUES ET DES SURFACES DU SECOND ORDRE. 2e édition. 2 forts vol. in-4, dont 1 de 54 planches. (Cette 2me partie se vend séparément.) 12 fr. 50 c.

La deuxième partie forme le traité le plus complet qui existe sur les courbes et sur les surfaces; tout y est démontré par les méthodes de projection, sans avoir recours à l'analyse.

2° ADDITIONS AU COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE; démonstration nouvelle des propriétés des sections coniques. In-4, avec 15 planches. 4 fr.

3° DÉVELOPPEMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. 2 vol. in-4, dont 1 de pl. 18 fr.

4° COMPLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. 2 vol. in-4, dont 1 de pl. 18 fr.

5° MÉMOIRES DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE. 2 vol. in-4, dont un de pl. 18 fr.

6° APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE aux ombres, à la perspective, à la gnomonique et aux engrenages. 2 vol. in-4, dont 1 de 58 pl. doubles, dont plusieurs coloriées ou à l'aqua-tinta. 25 fr.

Les *Développements*, les *Compléments* et les *Mémoires de géométrie descriptive* servent de complément à tous les traités de Géométrie descriptive publiés jusqu'à ce jour; ils renferment chacun des matières spéciales que n'a encore traitées aucun des auteurs qui ont écrit sur la géométrie descriptive.

La *géométrie descriptive*, comme le démontrent ces ouvrages, peut souvent atteindre à la puissance de l'*analyse;* elle y atteindra *en général* dans les questions où il s'agira de la *forme*, dans les problèmes de relation de position; et je serais bien trompé (*dit l'auteur*) si, pour ces problèmes, elle n'avait presque toujours l'avantage sur l'*analyse*, en ce sens que ses démonstrations seront plus promptes et plus simples et que les résultats seront obtenus dans des termes plus immédiatement applicables par les ingénieurs aux travaux d'art.

La géométrie descriptive peut acquérir *toute puissance* lorsqu'il s'agira de relation de position; en ce sens elle n'est pas bornée, et les efforts qu'elle fera dans cette direction seront toujours utiles.

DUNOD, LIBRAIRE POUR LES SCIENCES, LES ARTS, L'INDUSTRIE, ETC.

PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES. SOLUTION DES PROBLÈMES de mathématiques et de physique donnés à la Sorbonne dans les compositions du baccalauréat ès sciences de juillet 1855 à janvier 1856; par MOMENHEIM, *licencié ès sciences, chef d'institution à Paris*, et E. CATALAN, *agrégé de l'Université, docteur ès sciences, etc.* In-12, fig. 3 fr. 25 c.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, comprenant les applications de cette géométrie aux *ombres*, à la *perspective* et à la *stéréotomie*; par HACHETTE, *membre de l'Institut, anc. prof. à l'École polytechnique.* 2e édition. 1 fort vol. in-4, avec 74 grandes planches. 20 fr.

De tous les ouvrages publiés sur cette matière, le *Traité de Géométrie descriptire*, par M. Hachette est le seul qui contienne des applications à la coupe des pierres, etc.

MÉCANIQUE. LEÇONS DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE entièrement conformes aux nouveaux programmes de l'enseignement des lycées, contenant toutes les connaissances nécessaires à ceux qui se destinent au baccalauréat ès sciences, aux écoles spéciales du gouvernement, à l'École centrale des arts et manufactures, et à ceux qui suivent les cours des écoles professionnelles et des nouvelles facultés des sciences appliquées, par MM. HENRY HABANT, *licencié ès sciences*, et PIERRE LAFFITTE, *professeur de mathématiques.* 1 vol. in-8, imprimé sur papier glacé, orné de 195 figures dans le texte et une planche. 6 fr.

Ces leçons, rédigées avec beaucoup de soin par les auteurs, ne laissent rien à désirer sous le rapport de l'exécution typographique. Les 195 figures intercalées dans le texte ont été dessinées et gravées par nos meilleurs artistes. — Un prospectus spécial, donnant aussi le spécimen des figures, sera envoyé à toute personne qui en fera la demande par lettre affranchie.

DESSIN LINÉAIRE. DESSIN LINÉAIRE APPLIQUÉ AUX ARTS ET A L'INDUSTRIE par E. LOCARD, *ingénieur en chef du chemin de fer de Saint Étienne à Lyon, ancien professeur des cours industriels de Mézières, de Charleville, etc.* 1 vol. in-8, avec un atlas in-folio de 35 planches, contenant 890 dessins gravés avec soin par HIBON. 18 fr.

Cet ouvrage est divisé comme il suit : LIVRE Ier. *Préliminaires.* — II. *Dessin mathématique.* — III. *Dessin à vue ou à main levée.* — IV. *Application à la coupe des pierres; l'architecture; la charpente; la menuiserie; aux escaliers; à la serrurerie; aux maisons d'habitation et à la mécanique.*

L'atlas, de grand format pour donner aux figures tout le développement qu'elles méritent, a été dessiné par l'auteur et gravé sous ses yeux; sa parfaite exécution ne laisse rien à désirer.

Les dessins relatifs à l'architecture, la charpente, la menuiserie, la serrurerie et la mécanique sont tous cotés avec soin et représentent en général des objets exécutés.

DESSIN INDUSTRIEL. ÉLÉMENTS DE DESSIN INDUSTRIEL formant un cours de DESSIN LINÉAIRE et de tracé géométrique; par TUDOT, *professeur, directeur d'une école spéciale de dessin*, 2e édition revue et augmentée de 40 planches d'exercices. 1 beau vol. in-8 de texte accompagné d'un atlas in-folio de 40 planches gravées avec soin par HIBON. 9 fr.

Le volume in-8 de texte se vend séparément. 4 fr.

L'atlas in-folio, contenant 40 planches d'exercices. 6 fr.

Les *Éléments de dessin industriel*, par M. TUDOT, renferment une suite de modèles très-sagement choisis, très-bien gradués, dessinés avec science et parfaitement gravés. Ces modèles sont, comme le texte lui-même, divisés en plusieurs parties : la première traite du *dessin à vue*; celle qui la suit a pour objet le *tracé géométrique*, partie qui contient une description détaillée de tous les procédés en usage dans le tracé des épures. Des *exercices d'ornements et de têtes* terminent l'ouvrage.

Les 40 planches d'exercices peuvent être très-facilement copiées avec les instruments mathématiques du prix le plus ordinaire, avantage que n'offrent pas la plupart des ouvrages publiés sur cette partie de l'enseignement.

OMBRES ET LAVIS. ÉTUDES DE PROJECTIONS, D'OMBRES ET DE LAVIS, à l'usage de toutes les écoles, des architectes et des mécaniciens; par TRIPON, *professeur au collége Sainte-Barbe, etc.* Ouvrage divisé en quatre parties : 1° Projections orthogonales; 2° Projections obliques; 3° Ombres; 4° Lavis appliqué à l'enseignement du dessin des machines, de l'architecture, etc. 1 vol. in-8 de texte avec un magnifique atlas de 40 planches grand in-4, *imprimées au lavis* sur un quart colombier glacé. Prix des 2 volumes élégamment reliés. 25 fr.

On vend séparément :

Les trois premières parties comprenant les PROJECTIONS et les OMBRES, 20 planches avec texte, reliure élégante. 16 fr.

La quatrième partie, Cours élémentaire de LAVIS appliqué à l'enseignement du dessin des machines, de l'architecture, etc. 20 planches avec texte, relié. 16 fr.

Les planches qui composent le remarquable Atlas de cet ouvrage ont été tout récemment l'objet d'une révision complète; l'auteur n'a rien négligé pour donner au *nouveau tirage* qui vient d'en être exécuté une véritable supériorité sur les tirages précédents.

Notre Catalogue de livres de MATHÉMATIQUES et AUTRES est adressé à toute personne qui en fait la demande par lettre AFFRANCHIE

Paris. — Imprimé par E. THUNOT ET Ce, 26, rue Racine.

RÉSUMÉ DES LEÇONS

DONNÉES

A L'ECOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

SUR

L'APPLICATION DE LA MÉCANIQUE.

RÉSISTANCE DES CORPS SOLIDES.

FASCICULE I.

CERCLE NAPOLÉON

ENG
TA350
A3
v.1
c.2

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Cie, 26, rue Racine.

RÉSUMÉ DES LEÇONS

DONNÉES

A L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

SUR

L'APPLICATION DE LA MÉCANIQUE

A L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS ET DES MACHINES.

PREMIÈRE PARTIE

CONTENANT LES LEÇONS SUR LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX
ET SUR L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS EN TERRE, EN MAÇONNERIE
ET EN CHARPENTE.

PREMIERE SECTION.

DE LA RÉSISTANCE DES CORPS SOLIDES.

PAR NAVIER,

Membre de l'Institut (Académie des sciences), Inspecteur divisionnaire des Ponts et chaussées, professeur d'analyse et de mécanique à l'École polytechnique, etc.

Troisième édition

AVEC DES NOTES ET DES APPENDICES,

PAR

M. BARRÉ DE SAINT-VENANT,

Ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, ancien professeur adjoint de mécanique à l'École des ponts et chaussées, et professeur de génie rural à l'Institut agronomique, membre de la Société philomathique de Paris, etc.

TOME Ier. — FASCICULE I.

PARIS

DUNOD, ÉDITEUR

LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,
Quai des Augustins, 49.

1864

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
Notice biographique sur Navier, par M. de Prony. . .	xxxix
Id. par M. Emmery. . .	lj
Discours à ses funérailles, par M. Girard.	liij
Notice sur les ouvrages de Navier (par l'auteur des notes),	xv
Préface de Navier, 1826.	lxxxiv
Avertissement (de Navier) sur l'édition de 1833. . . .	lxxxviij

Historique abrégé des Recherches sur la résistance et sur l'élasticité des corps solides (*). Page XC

	Nos
Moyen âge.	I
Galilée.	II
Suite de Galilée. Blondel. Marchetti.	III
Hooke et Mariotte. Établissement du principe fondamental.	IV
Jacques Bernoulli. (Son erreur.).	V
Leibnitz. Varignon. Parent. (Rectification.).	VI
Coulomb.	VII
Girard. Barlow. Tredgold.	VIII
Navier (premiers essais et leur rectification).	IX
Navier (suite). Thomas Young..	X
Cas où le calcul des résistances doit être précédé de celui des flexions. Réactions inconnues. Moyen de faire cesser toute indétermination. . . .	XI
Courbes élastiques planes. Bernoulli.	XII
Classification des courbes élastiques planes par Euler.	XIII
Suite. Lagrange. Euler. Pièces debout; paradoxe apparent.	XIV
Suite. Navier. Ses solutions de problèmes implicites. Sa détermination de la flexion des pièces courbes, etc.	XV
Flexion oblique ou déviée.	XVI
Flexion accompagnée d'extensions ou compressions longitudinales. Limites de celles-ci, déduites par M. Poncelet des limites des extensions.	XVII

(*) Le long travail sur la Résistance et l'Élasticité des corps solides que nous publions sous la forme de Notes aux belles Leçons de Navier a été plusieurs fois interrompu dans son impression par des recherches sur des parties que nous avons tâché d'approfondir. Les feuilles 1 à 14 (p. 1 à 224) ont été tirées en 1857, les feuilles 15 à 21 en 1858, celles de 22 à 31 en 1859, de 32 à 43 en 1860, de 44 à 53 en 1863, les Notices et l'Historique en 1864. D'où la nécessité ou l'utilité de recourir, sur quelques points, à plusieurs endroits du livre, comme nous l'indiquons, dans la *Table des matières*, là où il y a lieu.

Nos

Glissement et force tangentielle. Duhamel du Monceau. Coulomb. Young. Vicat. etc. XVIII

Torsion (d'un cylindre circulaire d'abord). Coulomb, etc. XIX

Courbes élastiques à double courbure, et torsion avec flexion. Lagrange. Binet. Poisson. Wantzel, etc. XX

Suite. Mise en compte du troisième Moment. Déplacement angulaire du rayon de courbure. XXI

Mécanique moléculaire. Newton. Boscovich. Clairaut. Laplace. Poisson et Navier (pour la plaque élastique d'abord). XXII

Fondation de la théorie générale de l'élasticité. Navier. XXIII

Suite. Fresnel. XXIV

Théorie des pressions dans les solides. Dilatations en divers sens. Cauchy. XXV

Suite. Formules générales pour les corps hétérotropes. XXVI

Suite. Poisson. XXVII

Suite. Poisson et Cauchy pour les sommes non remplaçables par des intégrales. Remarque de M. Clausius. XXVIII

Suite. Polémique entre Poisson et Navier. XXIX

Suite. MM. Lamé et Clapeyron. XXX

Suite. M. Duhamel (prise en considération des temperatures). . . . XXXI

Premières applications de cette nouvelle branche de la Mécanique, par MM. Poisson et Cauchy. XXXII

Applications par MM. Lamé et Clapeyron. XXXIII

Solution ultérieure, par M. Lamé, du problème de la sphère pleine ou creuse sollicitée d'une manière quelconque. Difficultés pour les prismes. XXXIV

Nécessité de se contenter de solutions qui supposent un mode particulier de distribution des forces sur les bases. Impossibilité, le plus souvent, de connaître même le mode qui est censé donné. Méthode inverse. MM. Lamé et Clapeyron. XXXV

Méthode mixte, plus étendue dans ses applications. Torsion. . . XXXVI

Torsion présentée élémentairement. XXXVII

Suite de la méthode mixte. Flexion inégale ou avec glissement. . . XXXVIII

Sur les solutions indirectes en général. Remarque d'Ampère. . . . XXXIX

Problème le plus général de cette sorte. M. Clebsch. XL

Tiges infiniment minces. M. Kirchhoff. XLI

Emploi du Potentiel des forces moléculaires, ou de leur travail entre l'état naturel et un état déterminé. Navier. Green. Thomson. M. Clapeyron. XLII

Nombre des coefficients des formules. XLIII

Manières successivement proposées d'établir les conditions de résistance à la rupture éloignée. Préférence à donner à la limitation des dilatations. Mariotte. M. Poncelet. Flexion et torsion simultanées. XLIV

Cas où cette limite n'est pas la même en tous sens. XLV

Exceptions apparentes. XLVI

Matière hétérogène : matière qui n'est homogène que cylindriquement ou sphériquement. XLVII

Rupture immédiate ou prochaine. M. Hodgkinson. XLVIII

Pièces posées et sollicitées de diverses manières. Réactions inconnues. Systèmes de charpente. Serrage et calage. M. Michon. XLIX

Vibrations. Résistance vive ou *résilience* des pièces. Cas où l'on peut négliger leur inertie. Young. M. Poncelet. M. Clapeyron. Module de résilience de Tredgold. Proportionnalité au simple volume. L

Nos

Prise en considération approximative de la masse des pièces heurtées quant au partage de la vitesse. Tredgold. M. Hodgkinson. LI

Prise en considération de leur inertie, comme cause que leurs parties n'entrent en mouvement que successivement. Young. LII

Calcul du mouvement des diverses parties. Cordes et lames. Taylor. D. Bernoulli. Euler. D'Alembert. LIII

Solution complète pour la corde, puis pour les lames. Formules de Lagrange, d'Euler, de Fourier. Solutions de Poisson, de Cauchy. . . . LIV

Participation des masses heurtantes au mouvement vibratoire. Solution de Navier pour le choc longitudinal. Complément par M. Poncelet. . . LV

Solution analogue pour le choc transversal. Expériences confirmatives. LVI

Résistance vive sans choc. Bielles et balanciers. Tredgold. Charge voyageuse. M. Willis. M. Stokes. M. Phillips. LVII

Surfaces élastiques. Sphère et cylindre creux, tuyaux, vases, chaudières et réservoirs. Mariotte. Navier. M. Lamé. LVIII

Plaques et membranes. Euler. Jacques Bernoulli (de 1787). Sophie Germain. Lagrange. Poisson (1814.) Rectification presque complète et applications exactes par Navier. LIX

Suite des plaques et membranes. Poisson (1828). Cauchy. M. Lamé, M. Kirchhoff. Potentiel moléculaire véritable développé par la flexion d'une plaque mince. Nombre des conditions aux limites. LX

Expériences et observations sur la résistance et l'élasticité des corps solides. . . . . (et nos suivants). . LXI

DE LA RÉSISTANCE DES CORPS SOLIDES.

Pages.

PRÉLIMINAIRES. 1

Nos 1, 2. Deux sortes de problèmes. Diverses sortes d'efforts auxquels un prisme peut être soumis. . . . . 1 et 2

1re note du n° 1. La répulsion n'est pas attribuable à la chaleur 2

2e note du n° 1. § 1. Recherches générales (de mécanique moléculaire) dont parle Navier. 2

(Voyez pour cette nouvelle branche de la mécanique, le 3e Appendice, p. 541-616.)

2e note du n° 1. § 2. Hypothèses citées. Possibilité de s'en passer. 2

§ 3. Principe des actions entre les molécules ou entre les points matériels. 3

§ 4. Premières conséquences. Élasticité. . . . . *id.*

§ 5. Vibrations. Ébranlements. Effets de l'inertie. . . . . *id.*

§ 6. Écrouissage. Énervation. Rupture 4

Note du n° 2. Glissement. Cisaillement. 5

(Voir nos 152, 153, 154 et leurs notes.)

Pages.

ARTICLE Ier (compression). *De la résistance des corps à un effort qui tend à produire l'écrasement*. 5

N° 3. *Idem*. . . . . *id.*

Note du n° 3. § 1. Théorie de l'écrasement ou de la rupture des prismes courts par compression. . . . . *id.*

§ 2. La compression toute seule n'est pas une cause de désagrégration. Machine à courber les bois de M. Blanchard. 6

3. Essai d'une théorie de l'écrasement, par Coulomb. . . . *id.*

4. Cause générale assignable aux ruptures ou aux énervations, à savoir, que les dilatations (sans s'occuper des contractions) viennent à excéder certaines limites qui varient avec les sens. 8

5. Effets contraires des deux composantes obliques du poids comprimant, et nécessité de renoncer au raisonnement de Coulomb. . . . . *id.*

6. Dilatations ou contractions transversales qui accompagnent les contractions ou dilatations longitudinales. 9

7. Condition théorique de la résistance à la rupture (éloignée) par compression, en supposant connues les résistances à la rupture par extension en tous sens. . . 10

8. Modifications à y apporter. Métaux. Bois. . . . . 10 à 12

(Cette théorie est entièrement de M. Poncelet. Voir note du n° 156, § 43, p. 381.)

(Voir aussi Appendice complémentaire, p. 822 au bas.)

9. Observation des constructions éprouvées. Expériences d'écrasement (immédiat) pour établir des comparaisons. Distinction de la rupture immédiate ou prochaine et de la rupture éloignée. Coefficient R'_0. . . 12

(Voir aussi note du n° 113, §§ 10 à 13, p. 103 à 114.)

N°s 4 à 20. On les renvoie plus loin ainsi que la mention des autres résultats d'expériences. 13

ARTICLE II (extension). *De la résistance des corps à un effort dirigé dans le sens de la longueur, qui tend à produire l'extension et la rupture*. 14

N° 21. Double problème. . . . . *id*

Note. § 1. Résultats généraux des expériences d'extension et de rupture par extension. . . . . *id.*

Pages.

Suite de la note n° 21.

2. Proportionnalité des efforts aux effets très-petits, obtenus également dans deux sens opposés. 15
Théorème de *superposition* ou de *composition* géométrique correspondante des forces et des petits changements qu'elles engendrent. . . . . *id.*
3. Démonstration de la proportionnalité des forces de traction aux superficies des bases, ainsi qu'aux dilatations produites. Contractions transversales. 16
4. Expression de cette loi. 17
5. Coefficient ou module d'élasticité d'extension E. Rapports η et η' des contractions latérales aux dilatations longitudinales. 18
Sous-note. Hauteur du module d'après la définition de Young. . . . . *id.*
6. Conditions de la parfaite exactitude de la formule de l'extension. Observation sur le mode d'application et de répartition des actions exercées extérieurement. La formule est suffisamment approchée pour d'autres modes. 19
(Voir aussi notes du n° 80, p. 40; du n° 156, p. 254; 2e Appendice, p. 520 à 523; Appendice complémentaire, p. 829, 830, 849.)
7. Cas où la matière n'est pas de même nature dans l'étendue d'une section. Condition pour que les formules s'y appliquent en faisant simplement varier E. . . . 20
(Voir aussi notes n° 80, p. 42; n° 113, p. 115.)
8. Dilatations qui ne sont pas très-petites. Déformations permanentes. L'*élasticité subsiste* malgré ces déformations. 21
9. Caractères de l'*écrouissage* et de l'*énervation*. Cause présumable de celle-ci. Rupture finale. 22
10. Les déformations persistantes n'accompagnent pas toujours les déformations élastiques ou temporaires. Constructions anciennes; rochers, etc. 23
11. Le calcul est toujours applicable. . . . . *id.*
12. Condition de la résistance à la rupture par extension, immédiate ou éloignée. Point qui sépare l'écrouissage de l'énervation. Circonstances accidentelles dont il faut tenir compte. Double effet des vibrations, ou même des simples intermittences d'action. 24
Limites i' des dilatations prolongées non dangereuses. Coefficient de cohésion permanente $R_0 = Ei'$. . . . . *id.*

N°s 22 à 75. (Renvoyés). 26

Pages.

ARTICLE III (flexion). *De la résistance d'un corps prismatique à la flexion produite par un effort dirigé perpendiculairement à la longueur de ce corps.* 27

N°s 76 à 80. Équilibre d'une pièce fléchie. Moment de flexion. Axe d'équilibre ou ligne des fibres invariables. 27 à 31

Notes des n°s 76, 77, 79. . . . . *id.*

Note du n° 80. § 1. Notations et démonstrations plus simples. Moments d'inertie I des sections ω. Ce qu'on appelle aujourd'hui le *moment de flexion* M. 31

§ 2. Hypothèses (inexactes) qui sont tacitement invoquées. Elles ne sont point nécessaires. 32

3. Démonstration (sans ces hypothèses) des formules de la flexion pour le cas où elle a lieu d'*une manière égale* ou en *arc de cercle*. Modifications transversales qu'éprouve la forme des sections. 34

4. *Idem* dans le cas général de la flexion inégale ou non circulaire. *Glissements* qui l'accompagnent nécessairement. Inflexion, en doucine, des sections primitivement planes, et inclinaisons prises par les fibres sur ces sections. 36

(V. Notes, p. 212, 393, 404, et Appendice complémentaire, § 79, 1°, p. 767.)

5. Cas plus général où la contexture n'est pas la même dans tous les sens transversaux. 39

6. Observation sur le mode d'application et de distribution des forces qui font fléchir. Ce mode particulier est nécessaire pour la parfaite exactitude des formules. Mais les formules sont suffisamment approchées pour tout autre mode. Faits à l'appui. 40

(Voir aussi p. 40, 254, 521-523, 829-830.)

7. Cas où l'élasticité varie dans l'étendue d'une même section. Pièces de métal. Pièces de bois. 41

(Voir aussi p. 20, 115.)

8. Les moments des forces peuvent être pris autour de lignes ne passant pas par le centre de gravité des sections. Cas où les forces ont une composante longitudinale totale. 44

N° 81. Section rectangle. 45

Note. § 1. Démonstration élémentaire des formules de moments d'inertie. Méthode de M. Poncelet. . . . . *id.*

2. Autre méthode de démonstration. 46

3. Recherche élémentaire de la somme des produits des

Pages.

Suite de la note du n° 81.
puissances d'une quantité variable par les accroissements successifs qu'elle prend. 47
§ 4. Théorème donnant le moment d'inertie d'une figure autour d'une droite quand on le connaît autour d'une parallèle passant par son centre de gravité. 48
N° 82. Section triangulaire isocèle. . . . . *id.*
Note § 1. Moment d'inertie d'un triangle autour d'un de ses côtés. . . . . *id.*
§ 2 et 3. — D'un trapèze autour d'un de ses quatre côtés. . 49
§ 4, 5, 6. — D'un triangle autour de diverses droites. 50, 51
7. Application à des figures polygonales quelconques. . . 51
N° 83. Section rectangulaire placée obliquement. 52
Note. (Flexion oblique ou déviée). . . . . *id.*
§ 1. Erreur où conduirait la formule du n° 83. Condition pour que le plan de flexion soit le même que le plan de sollicitation à fléchir. . . . . *id.*
2. Détermination de la grandeur et *de la direction* de la flexion lorsque cette condition (du parallélisme du plan de sollicitation à l'un des axes principaux d'inertie des sections) n'est pas remplie. 53
(Voir aussi note du n° 156, § 54, p. 438, et figures.)
3. Autre détermination, au moyen de l'ellipse d'inertie. . 54
4. Détermination de la courbe d'axe et de la flèche, pour la flexion oblique ou déviée. 55
5. Application à une section rectangulaire. Évaluation des erreurs auxquelles donnerait lieu l'usage de la formule du texte du n° 83. 56
6. Observation sur les pièces droites non prismatiques. Double courbure et torsion qu'elles prennent. . . . . *id.*
7. On peut présenter d'une manière très-élémentaire la théorie de la flexion oblique ou déviée. 57
8. Direction et grandeur de la courbure, déterminées élémentairement. 59
9. Détermination des axes et des moments d'inertie principaux des figures planes. 60
10. Théorèmes pour le calcul de $K = \int uvd\omega$ dans toutes les figures en les décomposant en rectangles et en triangles. 61
N° 84. Section circulaire. 63
Note. § 1. Détermination analytique plus simple du moment d'inertie du cercle. . . . . *id.*
§ 2. Sa détermination élémentaire. . . . . *id.*

Pages.

Suite de la note du n° 84.

§ 3. Moments d'inertie, moments statiques et aires de portions du cercle. 64

§ 4. Moments d'inertie d'une ellipse. 66

N° 85. Moment de flexion d'un tuyau. 67

Note. § 1. Méthode de quadrature pour le calcul approximatif des moments d'inertie, etc. . . . . *id.*

§ 2. Démonstration élémentaire et exacte de la formule de Simpson. 67

3. Sa forme générale. 69

4. Deux manières de l'employer (de M. Poncelet et de M. Bélanger) pour les moments d'inertie. . . . . *id.*

Formule de quadrature de M. Poncelet. 71

N° 86. Courbe élastique. Flèche de courbure. . . . . *id*

Note. § 1. Démonstration élémentaire de l'expression de cette flèche. 72

(Voir aussi 1er Appendice, p. 517.)

§ 2. La courbe élastique est une parabole du 3e degré avec inflexion au point d'application des forces. 73

3. Flèche et arcs déterminés plus exactement. Leurs expressions quand la flexion n'est pas très-petite. . . . . *id.*

Expression simple du *sinus* de l'inclinaison de l'extrémité. 74

(Voir aussi 1er Appendice, p. 512, 513.)

N° 87. Pièce posée sur deux appuis. 75

Note. § 1. Calcul d'une valeur plus approchée de sa flèche. *id.*

§ 2. Expression de la plus grande dilatation en fonction de la même flèche. 77

N°s 88, 89. Pièce chargée de poids répartis sur toute sa longueur. 78, 79

Note. § 1. Observation générale (sur la formule de flexion étendue approximativement à ce mode d'application des forces). 79

§ 2. Manière plus simple de poser l'équation du n° 89. . . . *id.*

3. Flèche déterminée d'une manière élémentaire. . . . . *id.*

4. Expression plus approchée de la flèche f et expression exacte du sinus de l'angle α. 80

N° 90. Même pièce posée. Rapport 8 à 5 entre les flèches produites par le même poids au milieu et réparti. . . . *id.*

Note. § 1. L'équation de la courbe s'étend à ses deux moi-

Pages.

Suite de la note du n° 90.
tiés quand le poids est réparti, mais non lorsqu'il est suspendu en un seul point. 81
§ 2. Raccordement à tous les points où il y a discontinuité d'action. Petits angles résultant des glissements à ces points. . . . . *id.*
3. Approximation plus grande de la flèche f et de l'angle α pour la pièce chargée uniformément avec un poids additionnel au milieu. . . . . *id.*
(Voir l'observation 2e au § 79, App. compl., p. 768.)

N°s 91, 92, 93. Applications. Formules pour la détermination expérimentale du coefficient E. . . . . 82 à 85

Note n° 92. § 1. Généralisation et approximation plus grande. 83
§ 2. Emploi de la flexion circulaire. 84
Note n° 93. § 1. Observation relative à l'expression *élasticité altérée*. 85
§ 2. Approximation plus grande dans la détermination de E. *id.*

N°s 94 à 111. (Renvoyés). . . . . *id.*
Note. Quelques valeurs numériques de E. 86

ARTICLE IV (rupture par flexion). *De la résistance d'un solide prismatique à la rupture produite par un effort dirigé perpendiculairement à la longueur de ce solide.* 86

N°s 112, 113. Coefficient R. Expression du moment appelé de rupture par Navier. . . . . 86 à 88

Note du 113. § 1. Ce n'est qu'une *deuxième expression* du moment de flexion. 88
§ 2. Cette deuxième expression $M = R\frac{I}{v'}$ est tout aussi exacte et rigoureuse que la première $M = \frac{EI}{\rho}$ dans les mêmes limites. Son établissement direct et simple. . *id.*
3. Elle n'est pas applicable au delà de ces limites, si ce n'est en faisant varier, avec la forme et même la position des sections, le coefficient R, qui représente alors autre chose que ce que donnent les expériences de rupture par extension ou compression longitudinale. Cas de sections ou semblables ou ramenables les unes aux autres par augmentation des ordonnées ou des abscisses. 89

Pages.

Suite de la note du n° 113.

(Voir la note du n° 151, p. 173 à 185, où la question est traitée avec étendue.)

§ 4. Elle donne cependant la résistance à l'*énervation* ou à la rupture *éloignée*. Coefficient R_0 de cohésion permanente. Coefficient R'_0 pour les compressions. . . . 91

5. Restriction relative à la nécessité de prendre en considération les glissements ou le cisaillement quelquefois. 92

(Voir la note du n° 154, p. 216 et suiv.)

6. Équation d'*élasticité*. Équation de *cohésion*, ou de stabilité (ou de résistance à la rupture éloignée). Section *dangereuse*. Point *dangereux*. . . . . *id.*

Formes d'*égale résistance*, où toutes les sections sont également dangereuses. 93

7. Cas où il faut poser l'*équation d'élasticité*, ou calculer les déplacements ou les déformations, avant d'établir l'*équation de cohésion* : 1° modification sensible des bras de levier ; 2° réactions à déterminer ; 3° effets simultanés. 93, 94

8. Troncatures des sections. Cas dans lesquels, en les opérant, on augmente $\frac{1}{v'}$ ou $\frac{1}{v''}$ qui mesure théoriquement le degré de résistance à la rupture éloignée. Application à des sections triangulaire, carrée, circulaire, et en croix d'équerre. . . . . 94 à 102

9. Moyen commode de poser une équation de cohésion approchée dans certains cas. Observation sur les résultats fautifs que peut donner cette méthode de quelques ingénieurs. 103

(Voir aussi App. compl., note de la p. 767).

10. Détermination directe des coefficients R_0 et R'_0 de cohésion permanente, ou des limites i' des dilatations. *id.*

Sous-note (2). M. Tredgold. M. Hodgkinson. Young. . 104

11. Usage d'expériences de rupture immédiate par traction ou par compression pour des comparaisons relatives aux variétés d'une même matière. 105

12. Usage, pour les mêmes comparaisons, d'expériences de rupture immédiate par flexion. Cet usage n'implique nullement la supposition fausse d'un rapport constant entre les efforts et les effets jusqu'à la fin. . 107

13. Suite. Détermination du rapport mutuel des coefficients R'_0, R_0 de maximum des pressions et de maximum des tensions longitudinales permanentes non

Pages.

Suite de la note du n° 113.

dangereuses. Formule rationnelle $\frac{R'_o}{R_o} = \frac{I}{\eta}\frac{E}{E_t}\frac{R_{ot}}{R_o}$, remplaçable à peu près par $\frac{I}{\eta}\frac{E}{E_t}\frac{R_t}{R}$. Expériences de M. Hodgkinson; de M. Zorès. Valeurs pour la fonte et pour le fer. 108-114

(Voir aussi note du n° 156, p. 469, et Appendice complémentaire, p. 823-825).

§ 14. Examen de la méthode consistant à adopter une même limite des dilatations pour les diverses qualités ou variétés d'une même matière. Elle revient à supposer les cohésions proportionnelles aux élasticités. 114

15. Cas où la contexture varie dans l'étendue des sections. Fer. Bois. 115

Méthode simple (de Cauchy) de compensation mutuelle des erreurs d'observation. 117

16. Possibilité de dépasser beaucoup la limite de dilatation adoptée pour les cas ordinaires, lorsqu'il y a simultanément et dans un autre sens de fortes contractions. Expérience de MM. Easton et Amos, etc. 118-120

17. Dimensions déterminées en vue de limiter la flexion des pièces, et non les proportions des dilatations de leurs parties. Formule de M. Tredgold. 120

N°s 114, 115, 116, 117. Moment $R\frac{I}{v'}$ pour diverses sections 121

Note n° 117. § 1. Erreur où peut faire tomber la première formule du n° 117 (rupture par flexion oblique). . . . 122

§ 2. Établissement direct de l'équation de cohésion permanente pour une sollicitation oblique aux axes principaux des sections. . . . . *id.*

3. Application à une section rectangle. Sens de sollicitation le plus dangereux. Évaluation de l'erreur signalée au § 1. 124

4. Établissement élémentaire de ces formules (de rupture par flexion oblique ou déviée). 125

N°s 118, 119, 120. Sections circulaires pleine et évidée. Comparaison avec une section rectangulaire . . 126, 127

Note du n° 118. Perte de force des arbres équarris. 126

Note du n° 119. Construction géométrique, par M. Poncelet. 127

Note du n° 120. Résistances spécifiques à la flexion et à la

Pages.

Suite de la note du n° 120.
rupture par flexion pour diverses formes de sections. Valeurs diverses de I et de $\frac{I}{v}$. 128

§ 1. Comparaison générale des sections à égale surface ou à égale quantité de matière. . . . . *id.*

2. Résistances spécifiques (ou quantités remplaçant I et $\frac{I}{v}$) lorsque la sollicitation est oblique aux axes principaux des sections. . . . . *id.*

3. Section rectangle. 129

4. Même section si la sollicitation est oblique. Cause (la possibilité d'une déviation) qui limite l'avantage d'employer des pièces de champ à section haute et mince. 130

5, 6, 7. Sections carrée, circulaire pleine et évidée. . . . 132

8. Prise en considération des troncatures (possibles) qui augmenteraient la valeur de l'expression de la résistance spécifique à la rupture. 133
(Voir ci-dessus, p. 100).

9. Cas où les troncatures auraient effectivement lieu. . . 134

10. Section elliptique. Sollicitation pour une obliquité quelconque. 136

11. Sections comparées ayant des formes ramenables les unes aux autres. . . . . *id.*

12. Sections rectangles évidées symétriquement (tuyau rectangulaire, ou double T symétrique). 137

13. Rapport de la hauteur à la largeur d'une section simplement rectangle qui offrirait même résistance que la section en double T symétrique. Utilité de la forme en T pour s'opposer au déversement. 138

14. Cas de l'évidement par plusieurs rectangles. 141

15. Sections en T simple et en U. . . . . *id.*
(La simplification indiquée au bas de la page est de M. Poncelet.)

16. Section en double T non symétrique (formule très-générale, simple et nouvelle). . . . . 142 à 146

17. Comparaisons diverses des sections en double T non symétriques et symétriques d'égale superficie. Faible avantage, ordinairement, de l'inégalité des semelles. . . . . 146 à 152
(Voir aussi Appendice complémentaire, p. 766.)

18. Application à la section jugée la mieux proportionnée par M. Hodgkinson. 152

Pages.

Suite de la note du n° 120.

Conclusion en ce qui regarde le choix entre l'égalité et l'inégalité des semelles. 155

(Voir aussi Appendice complémentaire, p. 766.)

§ 19. Discussion relative aux sections en croix ou à nervures égales dans deux sens rectangulaires. 156

Simple croix d'équerre. 157

Carré avec quatre nervures en prolongement des médianes. 158

Carré avec quatre nervures en prolongement des diagonales. 160

Noyau circulaire et quatre nervures. 162

Conclusion. 163

N°s 121 à 129. Rupture par flexion des prismes horizontaux soutenus et chargés de diverses manières. 163 à 168

N°s 130 à 141. (Renvoyés). . . . . *id.*

N° 142. Situation des fibres invariables à l'instant de la rupture. . . . . *id.*

N°s 143 à 149. (Renvoyés). . . . . *id.*

N° 150. Notions sur les théories proposées par Galilée, par Mariotte et par Leibnitz 169

Note du n° 150. Méprise du simple au double, commise par Mariotte et par Jacques Bernoulli. 170

N° 151. Remarque sur la théorie de la résistance à la rupture. 172

Note du n° 151. Sur les résistances à la rupture *immédiate* ou *prochaine*. . . . . .

§ 1. Proportionnalité de ces résistances aux largeurs et aux carrés des hauteurs des sections semblables, ou seulement transformables les unes dans les autres en réduisant ou amplifiant dans une même proportion leurs ordonnées ou leurs abscisses. 173

2. Formules nouvelles pour le calcul approximatif des résistances à la rupture immédiate ou prochaine, principalement quand les sections sont rectangles. Elles donnent la même chose que celles de M. Hodgkinson quand on prend un certain exposant $m_1 = 2$. 175

3. Particularisation de ces formules. Explication de quelques résulats d'expériences. Les limites supérieure et inférieure sont les résultats des formules de Coulomb et de Galilée. . . . . 179 à 185

Pages.

N° 152. De la rupture d'un solide d'une petite longueur. 185

Note du n° 152. Supplément à l'article IV. *Glissement*. . . 186

§ 1. De la résistance au glissement relatif des parties d'un solide. Circonstances diverses où elle entre en jeu. (*Détrusion* de Young, *Force transverse* de M. Vicat, etc). . . . . *id.*

2. Observation sur l'estimation de la résistance au glissement par Navier aux n°s 152 à 155. 189

3. Définition et mesure du glissement des lignes matérielles les unes devant les autres ou *sur* ces lignes. Il a toujours lieu simultanément et également dans deux directions rectangulaires. . . . . *id.*

4. Glissements divers sur une face, etc. Leur maximum ou le *glissement principal*. Il est résultant géométrique de deux autres. 190

5. Efforts tangentiels. Coefficient d'élasticité de glissement. 192

6. La résistance à un glissement peut être regardée comme une résistance à une dilatation et à une contraction moitié moindres, ayant lieu dans deux directions rectangulaires qui font l'une et l'autre un angle demi-droit avec les lignes glissantes. 193

(Voir à l'Appendice complémentaire, § 79, 3°, p. 768, une démonstration plus simple.)

7. Limite des glissements déduite de la limite des extensions dans les solides d'égale contexture en tous sens. Limite des efforts tangentiels. 195

8. Détermination théorique, pour les matières d'égale contexture, du rapport $\frac{G}{E}$ des coefficiens d'élasticité de gilssement et d'extension, et du rapport η des contractions transversales des prismes aux dilatations longitudinales qui les provoquent. . . . . 197 à 202

(Voir aussi le 3e Appendice, p. 559, note du § 23, p. 565, et le § 25, p. 580; le 5e Appendice, note du § 47, p. 647; et l'Appendice complémentaire, note du § 87, p. 805.)

9. Rapport $\frac{T_0}{R_0}$ entre les limites des efforts tangentiels et longitudinaux. Comparaison aux expériences de MM. Gouin et Cie, etc. 203

10. Application aux cas exceptionnels où la section de glissement est astreinte à rester plane. . . . . *id.*

Pages.

N° 153. Suite des considérations sur la rupture d'un solide d'une petite longueur. 205

Note du n° 153. § 1. Les sections transversales (quand elles sont libres de se courber) restent normales, sur leur contour, à la surface du prisme fléchi (ou tordu, V. note du n° 156, p. 244). Ces mêmes sections infléchies restent normales aux arêtes saillantes devenues courbes. . . . . 206 à 207
(Et aussi aux arêtes rentrantes. Appendice complémentaire, § 79, p. 769.)

§ 2. Loi de variation des glissements aux divers points des sections d'une prisme rectangulaire fléchi *de champ*. Forme de doucine affectée par les sections primitivement planes . . . . . 207 à 212
(Voir aussi note du n° 156, p. 393; id. sous-note, p. 410-412; 2° Appendice, p. 539; 3° *id.*, p. 616).

3. Détermination de la forme courbe en cylindre à base de doucine affectée par la section. 212

4. Flèche complète de flexion eu égard au glissement. . 214

N° 154. Suite de la rupture d'un solide d'une petite longueur.

Note. Substitution d'une autre formule à celle de Navier.

§ 1. Détermination de la dilatation maximum qui se produit dans un sens oblique lorsqu'il y a à la fois un glissement transversal et une extension longitudinale accompagnée de contraction latérale. . . 216 à 219
(Voir une démonstration plus simple, de M. Poncelet, à la note du n° 156, p. 374-376 en sous-note.)

2. Usage de cette détermination. Formule générale de résistance à divers genres d'efforts s'exerçant à la fois, d'abord quand le solide est d'égale contexture. 219
(Voir p. 375-382 pour un solide de contexture inégale dans les divers sens.)

3. Application au cas où la rupture peut être déterminée par un glissement, sur une section libre de s'infléchir. 221

4. Application quand il y glissement et extension ou compression longitudinale sans flexion. Formule simple et table numérique usuelle. 222

5. Résistance d'un rivet ou d'un petit boulon à la fois étendu et cisaillé. 225

6. Application quand il y a à la fois glissement, extension et flexion. Premier cas, où la section reste plane. 226

7. Observation pour le cas où l'on donne partout à la

Pages.

Suite de la note du n° 154.
pièce une égale épaisseur. *Il faut alors qu'elle soit* TRÈS-COURTE *pour que le glissement ait une influence sensible*. 229

§ 8. Second cas (de flexion et glissement simultané) où la section peut s'infléchir librement. Alors il suffit de choisir la plus forte des dimensions fournies par un double calcul. 231

9. Exemples d'applications numériques des formules des §§ 6, 7, 8. 232
Petite pièce sur deux appuis. . . . . *id.*
Idem. avec un profil d'égale résistance. 233
Boulon de poulie. 234
Rais de roue de voiture. 235

N° 155. Suite. Petite pièce appuyée aux deux bouts. . . 237

ARTICLE V. *De la résistance d'un corps prismatique à la torsion*. 237

N° 156. Formule du moment de torsion (exacte seulement pour une section circulaire, ou pour une section astreinte à rester plane). . . . . 237 à 239

Note du n° 156. *Théorie nouvelle de la torsion des prismes et de leur rupture par torsion.*

§ 1. Moment d'inertie *polaire* d'une section. Le moment de torsion ne lui est pas généralement proportionnel. . 239

2. La cause de la résistance à la torsion n'est pas dans le changement de longueur des fibres devenues des hélices. Remarque de Thomas Young. . . . . 240 à 242

3. Cette cause se trouve dans la résistance au glissement des sections les unes devant les autres ou des fibres les unes contre les autres; ou, ce qui revient au même, dans la résistance à l'allongement et à l'accourcissement des diverses lignes matérielles hélicoïdales inclinées à 45 degrés sur l'axe de torsion. Première conséquence, si la section reste plane. 242

4. Courbure ou *gauchissement* que prennent par la torsion les sections transversales lorsqu'elles n'en sont pas empêchées et que leur contour n'est pas circulaire. Conservation de leur normalité à la surface latérale du prisme tordu. (Par suite, normalité des sections, devenues des surfaces courbes, aux arêtes vives devenues des hélices). 244

Pages.

Suite de la note du n° 156.

§ 5. Expressions ($g' = i - \theta v$, $g'' = j + \theta u$) des glissements provenant à la fois de la courbure des fibres en hélices et de la courbure des sections transversales primitivement planes d'un prisme tordu. 245

6. Condition générale $\left(\frac{dg'}{du} + \frac{dg''}{dv} = 0, \text{ ou } \frac{di}{du} + \frac{dj}{dv} = 0\right)$ que doivent remplir, en tous leurs points, les surfaces légèrement courbes dans lesquelles se changent les plans des sections des prismes tordus. Nullité de la somme des courbures de deux coupes à angle droit. Expression par une équation différentielle. 248

7. Démonstration plus directe de cette propriété. 250
(Voir aussi au n° XXXVII de l'*Historique*.)

8. Condition ($g''du - g'dv = 0$) particulière aux points des contours des sections. 252

9. Actions tangentielles sur les sections. Moment de torsion. Détermination générale de la torsion produite, quand on donne ce moment. 253

Théorème comprenant toute la théorie de la torsion des prismes d'égale élasticité dans les sens transversaux : Si, les faces latérales ne supportant aucune action, les éléments $d\omega$ des bases sont sollicités, dans l'état d'équilibre, suivant les sens transversaux u, v, par des forces tangentielles $G\left(\frac{dz}{dv} + \theta u\right)d\omega$, $G\left(\frac{dz}{du} - \theta v\right)d\omega$, z satisfaisant à $\frac{d^2z}{du^2} + \frac{d^2z}{dv^2} = 0$ en tous leurs points, et à $\left(\frac{dz}{dv} + \theta u\right)du - \left(\frac{dz}{du} - \theta v\right)dv = 0$ à ceux de leur contour, le prisme éprouvera d'un bout à l'autre une torsion uniforme θ par unité de longueur, et, ses arêtes, de petits cheminements longitudinaux z ; et il n'y aura ni dilatation ni contraction longitudinale ou transversale.

La même chose a lieu *approximativement* si des forces appliquées et distribuées d'une manière à peu près quelconque aux extrémités ont le même moment $M_1 = G\int_0^\omega \left[\left(\frac{dz}{dv} + \theta u\right)u - \left(\frac{dz}{du} - \theta v\right)v\right]d\omega$ que les forces dont on vient de parler 254

10. Contours de sections, en nombre infini, pour lesquels on obtient immédiatement la forme de la surface courbe dans laquelle la torsion change leur plan, et, par suite, les glissements et la torsion que produisent des forces extérieures ayant un moment donné. 255

11. Mêmes formules en coordonnées polaires. Glissement résultant ou principal. 257

12. Contours de sections d'une forme symétrique. 259

Pages.

Suite de la note du n° 156.

§ 13. Réduction à un couple des forces tangentielles sur chaque base ou section. 261

14. Conservation de la forme des équations quand on change l'origine et les axes des coordonnées transversales. 262

15. Torsion d'un prisme autour de divers axes intérieurs ou extérieurs parallèles à ses arêtes. Torsion simultanée de deux prismes ou cylindres parallèles et solidaires. 264

16. Expression générale du moment de torsion des prismes dont les sections ont des contours représentés par l'équation générale du § 10. 267

17. Plus grands glissements. Points dangereux. Équation de cohésion permanente ou de résistance à la rupture éloignée par torsion. 268

Double recherche nécessaire des points de maximum absolu, s'il y en a sur les sections, et des points de maximum relatif sur leur contour. . . . . *id.*

18. Première particularisation. Section circulaire. Torsion autour de l'axe de figure. 271

19. Section encore circulaire ; mais torsion du cylindre autour d'un axe excentrique. 273

20. Observation générale sur les termes du premier degré dans les équations du contour des sections. 274

21. Section elliptique. . . . . *id.*

Les plans des sections de cette forme se courbent en paraboloïde hyperbolique. Épures. 276

22. Moment de torsion et résistance à la rupture éloignée par torsion d'un cylindre elliptique. Position des points dangereux aux endroits du contour *les plus rapprochés du centre*. Explication des différences avec la théorie ancienne. 278

23. Prisme à section triangulaire équilatérale. Épure. . . 283

Exemple de recherche des maxima absolus du carré du glissement principal. . . . . 286 à 288

24. Assimilation, à l'ellipse, des sections allongées quelconques, quant à la courbure prise par leurs plans. Formule approchée de Cauchy relative aux prismes rectangles. Exacte pour un prisme très-plat, elle est fautive pour un prisme à base carrée. . . . . 289 à 291

(Voyez aussi 4e Appendice, § 39, note p. 621-626.)

25. Prisme à base rectangle. Formules transcendantes et exactes de sa torsion. Notations *sih*, *coh*, *tah* des sinus, cosinus et tangentes hyperboliques. 29

Pages.

Suite de la note du n° 156.

§ 26. Conséquences. Moments de torsion. 295
Vérification expérimentale (en sous-note). 297
(Voir table numérique, p. 362.)

27. Suite des conséquences. Forme courbe que la torsion donne aux plans des sections des prismes carrés ou rectangles. Épures. . . . . 297 à 300

28. Plus grands glissements. Points dangereux. Équation de non-rupture des prismes à base carrée et à base rectangle soumis à la torsion. 301
(Voir table numérique, p. 363.)

29. Détermination élémentaire et très-approchée de la torsion d'un prisme à base carrée rectiligne, par l'assimilation de ses sections à des carrés curvilignes du quatrième degré quant à la courbure prise par leurs plans. 302

30. Sections à contours curvilignes du 4e degré symétriques dans les deux sens. 305

31. Recherche des plus grands glissements. L'absence de maxima absolus prouve que les points dangereux se trouvent sur le contour. 308

32. Recherche de ces points sur les contours du 4e degré, et d'abord sur ceux qui sont égaux dans les deux sens u et v. 310
(Remarque applicable aux maxima et minima des fonctions de deux variables liées entre elles. La méthode analytique ordinaire souvent ne peut les fournir). . . 311

33. Suite. Recherche des mêmes points dangereux sur les contours du 4e degré symétriques mais non égaux dans les deux sens. Ils ne peuvent être trouvés, dans beaucoup de cas, que numériquement. . . . . 312 à 317

34. Méthode générale (analogue à celle de fausse position) pour la recherche *numérique* du maximum ou du minimum d'une fonction d'une variable dont la forme plus ou moins compliquée est donnée explicitement ou implicitement. 318

35. Calcul du moment de torsion et de sa limite pour divers contours du 4e degré. 323
1° et 2° Sections carrées curvilignes. 323, 324
3° et 4° Sections en double spatule analogues à celles des rails de chemins de fer. Exemples de points dangereux qui ne sont pas aux endroits du contour les plus rapprochés du centre. . . . . 325 à 332

36. Observation relative aux sections séparées en deux

Pages.

Suite de la note du n° 156.
orbes. Confirmation du principe du § 15, que le moment de torsion est indépendant de la position de l'axe. 332
(En sous-note). Section en double triangle isocèle. . 335
§ 37. Torsion d'une pièce à côtes, ailes ou nervures (feathered axis). Section en croix de Malte, ou étoile à quatre pointes, du huitième degré. Épure. Les pièces à côtes doivent être exclues des parties des constructions où les efforts tendent à tordre. . . . . 335 à 343
38. Torsion des prismes à bases quelconques. 344
39. Inégale contexture dans les divers sens transversaux. Formules d'*élasticité* et de *cohésion* lorsque la contexture inégale est symétrique par rapport à trois plans rectangulaires. 345
(Voir 3e Appendice, p. 609, pour le cas d'un seul plan de symétrie).
Théorème de réciprocité de Cauchy. L'action à travers une face A estimée perpendiculairement à une face B de même superficie, est égale à l'action à travers B, estimée perpendiculairement à A. 346
(Voir 3e Appendice, p. 546, et, mieux, Appendice complémentaire, § 79, 5°, p. 769.)
Section elliptique. Section rectangle. 351, 352
Condition de non-rupture des prismes dont la contexture est inégale. 353, 354
(Voir aussi 3e Appendice, p. 611, et Appendice complémentaire, § 79, 6°, p. 770-771.)
40. Récapitulation des formules de torsion *simple*, c'est-à-dire non accompagnée de flexion, ni de dilatations ou contractions longitudinales ou transversales, ni de glissements étrangers. 356
Ellipses, triangles, carrés curvilignes, doubles spatules (comme un rail). 359-365
Tables et formules simples relatives aux sections rectangles. 362, 363
Tables pour déterminer approximativement la torsion de prismes à bases quelconques. 366
41. Prismes creux. Courbes de glissement sur une section pleine ou évidée quelconque. 368
Condition pour que le moment de torsion soit exactement la différence de ceux du prisme plein et du prisme d'évidement. Formule approchée. . . . . 369 à 372
42. Torsion et flexion simultanées, avec (ou sans) une dilatation ou contraction longitudinale, et un *cisaillement* transversal. Exemples. 372

Pages.

Suite de la note du n° 156.

§ 43. Condition générale de cohésion permanente ou de résistance à la rupture éloignée, pour ces cas complexes. 373

Formule qui comprend les conditions de tous les cas particuliers. . . . . (au bas) 379

Idem sous une autre forme. 382

(Deux sous-notes. Démonstration et explication simple, de M. Poncelet) . . . . . 375 et 381

44. Équation de cohésion rendue immédiatement applicable. 383

Observation sur la recherche des points dangereux; distinction des solutions étrangères. 388

(Sous-note. Sur des recherches de 1843). 387

45. Valeurs approchées et quelquefois suffisantes des glissements de cisaillement dus aux forces transversales. Recherches de M. Jouravski. 389

Raison de leur défaut de rigueur. 398

46. Valeurs exactes des mêmes glissements de cisaillement, indépendants de la torsion. Identité des limites à imposer aux efforts tangentiels transversaux et longitudinaux. 399

Épures diverses donnant la topographie des surfaces courbes des sections. 411

Théorie exacte de la flexion avec glissements. . 399 à 413

(Voir aussi 2e Appendice, § 13, p. 534, et 3e, § 87, p. 613.)

47. Applications diverses quand on peut négliger les glissements de cisaillement g_1', g''_1. Cylindre à base circulaire à la fois fléchi, tordu et étendu ou comprimé. 414

48. Même cylindre seulement fléchi et tordu. Tableau des résultats pour diverses valeurs attribuées au rapport η_1 des résistances spécifiques R_1, R'_1. 416

49. Même cylindre éprouvant, avec la flexion et la torsion, une extension longitudinale. 417

50. Même cylindre dans le cas plus compliqué où c'est une compression. Choix entre deux positions possibles du point dangereux. 418

51. Cylindre elliptique sollicité *à plat*, et en même temps tordu. 421

52. Même cylindre sollicité de champ. Alors (et à plus forte raison pour une sollicitation oblique) le point dangereux peut se trouver, sur le périmètre des sections, ailleurs qu'à leurs sommets. 424

Pages.

Suite de la note du n° 156.

§ 53. Prisme rectangulaire à la fois fléchi et tordu. Flexions à plat et de champ. Position variable du point dangereux sur le périmètre quand la flexion a lieu de champ. . . . . 430 à 436

54. Même prisme rectangulaire fléchi et tordu, quand le plan de sollicitation à fléchir est oblique par rapport aux côtés de la base. Développement du calcul pour diverses situations de ce plan, et de la ligne, aussi oblique, des fibres invariables, tracée sur la section. . . . . 436 à 441

55. Cas particulier du prisme à base carrée fléchi et tordu. Quelle est la situation ou l'inclinaison du plan de flexion qui exige le plus fort équarrissage. Table détaillée des emplacements de ce point dangereux, pour diverses inclinaisons. Conséquence quand la pièce carrée est tournante. . . . . 441 à 446

56. *Pièce d'égale résistance* à des forces qui font à la fois fléchir et tordre, etc. . . . . *id.*

57. Arbre de transmission de mouvement de rotation sollicité à fléchir et à tordre par deux engrenages ou deux courroies. — Arbre rond. — Arbre carré. . . . 447
Forme d'égale résistance. 452
(Voir aussi au § 65, p. 491 et 493.)

58. Récapitulation des formules propres à faire connaître les dimensions transversales à donner à une pièce droite soumise à une torsion et à une flexion simultanées avec ou sans extension ou compression longitudinale de l'axe. . . . . 453 à 459

59. Pièces tordues encastrées aux deux bouts. Valeur à donner au moment de torsion de chaque partie. . . 459

60. Rupture *immédiate* par torsion. Proportionnalité des résistances aux cubes des dimensions homologues de sections semblables. 461

61. Calcul approximatif des résistances à la rupture immédiate ou prochaine par torsion quand les sections sont : 1° circulaires. 464
2° rectangles larges et minces. 466

62. Détermination expérimentale, pour les diverses matières, des coefficients numériques d'élasticité ou de cohésion transversale G, T_0, G′, G″, T'_0, T''_0 et T. . . 469

63. Torsion de cylindres dont la matière n'est pas de même contexture dans l'étendue des sections. . . . 477

Pages.

Suite de la note du n° 156.

§ 64. *Exemples d'application numérique.* Torsion seule d'abord. 480

1er Exemple. Cylindre à base circulaire. . . . . *id.*

2e *id.* Même cylindre supposé encastré aux deux extrémités. 481

3e Exemple. Cylindre à base elliptique, d'égale contexture transversale. 482

Gauchissement imperceptible et cependant très-influent. . . . . 483 à 484

(Voir aussi note du 2e Appendice, p. 521, 522.)

4e Exemple. Pièce rectangulaire en bois, d'inégale contexture dans les sens transversaux. 484

5e Exemple. Pièce en fonte ayant pour base un carré évidé par quatre quarts de cercle, comme exemple de calcul fondé sur l'analogie et l'interpolation. . . 486

§ 65. *Suite des exemples d'application numérique.* Flexion et torsion simultanées.

6e Exemple. Détermination de T_0 d'après une expérience où il y a flexion et torsion. 489

7e Exemple. Arbre de transmission de mouvement rond et en fonte (de rayon constant et de rayon variable). 491

8e Exemple. Arbre de transmission de mouvement carré et en bois. 493

66. *Suite des exemples.* Flexion et torsion avec extension ou compression longitudinale. 495

9e Exemple. Tirant horizontal auquel est suspendu un poids au bout d'un levier qui y est implanté. . . . . *id.*

10e Exemple. Même pièce. Son équarrissage, le poids qui la tord étant donné. 498

11e Exemple. Poteau soumis à une pression verticale et en même temps à une torsion déterminée par une force horizontale agissant à son milieu au bout d'un levier. 499

Nos 157 à 160. Suite de la torsion (numéros rendus inutiles par ce qui précède) 501

Note de ces numéros pour en rectifier quelques passages. 501 à 504

Note de Navier (1833) où se trouve pour la première fois la relation $\frac{G}{E} = \frac{2}{5}$. 502

Nos 161 à 163. (Renvoyés).

Pages.

ARTICLE VI. *De la résistance d'un corps prismatique à la rupture causée par la torsion*. 505

N°s 164 à 168. (Rendus inutiles par ce qui précède). 505 à 509

Notes sur ces numéros. . . . . *id.*

Note de Navier (1833) où se trouve pour la première fois le rapport $\frac{T}{R} = \frac{4}{5}$. 507

N°s 169 à 172. (Renvoyés).

APPENDICES

AUX NOTES DES ARTICLES I A VI (OU DES N^os I A 172).

---

§ 1. Objet et sommaires des cinq Appendices. (V. plus loin l'Appendice complémentaire.) 512

1er APPENDICE. *Divers points traités par M. Poncelet d'une manière élémentaire*. 512

2. Expression exacte, obtenue élémentairement, du *sinus* de l'angle d'inclinaison pris par les divers éléments d'une pièce droite ou circulaire après une flexion de grandeur quelconque. . . . . *id.*

3. Tracé de la courbe élastique après une flexion quelconque. — Tracé par petits arcs. Tracé par des quadratures numériques. Cas extrêmes où l'on peut se passer des quadratures. 515

4. Détermination élémentaire (et plus exacte qu'à la page 72) de la flèche. 517

5. Cas où l'élastique reçoit une forme déterminée (sur un gabarit, par exemple). 518

6. Condition des encastrements. Inclinaison générale prise par les pièces sur les parois des enclaves. . . 519

2e APPENDICE. *Sur les conditions de l'exactitude mathématique des formules tant anciennes que nouvelles d'extension, de torsion, de flexion avec ou sans glissement. Démonstrations synthétiques.* 520

Pages.

§ 7. Rappel de ces conditions, qui se réduisent à un mode particulier d'application et de distribution des forces aux extrémités des pièces. Nécessité de les faire ressortir au lieu de les dissimuler en quelque sorte. . *id.*
Sur l'application suffisamment approchée des formules pour d'autres modes. . . . . 520 à 524
(Voir aussi pages 40, 254, 521-523, et 829-830.)

8. Observation sur la manière de présenter ces démonstrations. . . . . *id.*

9. Théorie synthétique exacte de la résistance des solides. Principes, définitions et lemmes. 525

10. Suite. Extension et contraction. Théorème I. Scolie I. . 528

11. Lemme pour la torsion et la flexion. 530

12. Torsion. Théorème II et scolie II. 531
Scolie III. Expression des glissements, et équation des contours en termes entiers. 534

13. Flexion. Lemme IV sur les déformations transversales qui accompagnent la flexion. . . . . *id.*
Théorème III. Sur la flexion en arc de cercle sans glissement. 535
Théorème IV. Sur la flexion inégale ou avec glissement. 537

14. Observation sur la méthode suivie, etc. 540

3e APPENDICE. *Formules et équations générales de la théorie de l'élasticité des corps solides.* . 531

§ 15. Avant-propos. Changement des notations. 540

16. Actions moléculaires. Pressions ou Forces élastiques dans un solide. Théorèmes (Cauchy) des projections des plans de pression et de réciprocité des composantes tangentielles. 542
(En note. Courbes des deux sortes de forces dont les actions moléculaires sont des différences). 543

17. Formules des changements de plans de pressions. Composantes sur trois plans nouveaux rectangulaires ou obliques. 547
N. B. Ajouter, aux tableaux de synonymie, les notations de M. Kirchhoff $\begin{matrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{matrix}$.

18. Dilatations et glissements. Leurs relations en divers sens. 549

Pages.

Suite du 3e Appendice.

§ 19. Formules qui les donnent dans les sens d'axes rectangulaires nouveaux. 552

(Voir une autre démonstration, Appendice complémentaire, § 82, note, p. 779.)

En note. Ellipsoïde des dilatations. 553

(Voir aussi Appendice complémentaire, § 82, 2e note, p. 780.)

20. Formules (12) des six composantes de pression en fonction des dilatations et glissements. 554, 556

21. Nombre des coefficients différents. Leur réduction de 36 à 15 par 21 égalités entre eux. 556

(Voir le 5e Appendice, surtout p. 716, 718.)

22. Corps homogènes. Homogénéités parallèle, semi-polaire ou cylindrique, polaire ou sphérique, etc. Corps isotropes. Observation sur l'état dit *naturel*. 560

(Voir aussi Appendice complémentaire, § 80, p. 771.)

23. Cas (exceptionnel) où il y avait des pressions antérieurement aux déformations exprimées par les trois dilations et les trois glissements. 562

En note. Démonstration des formules relatives à ce cas général. Théorème général de mécanique moléculaire. Autre démonstration de la réduction de 36 coefficients à 15. Formules (de M. Cauchy) relatives à des déplacements très-petits. . . . . 565 à 579

(Voir aussi Appendice complémentaire, p. 795.)

24. Corps où il y a un ou trois plans de symétrie de contexture. Réduction des formules à un moindre nombre de termes pour ces sortes de corps. 574

(Voir 5e Appendice, p. 759, pour les formules avec moins d'accents, et Appendice complémentaire, p. 805, note.)

25. Cas où il y a un axe de symétrie ou d'élasticité. . . . 579

(Voir 5e Appendice, p. 759, et Appendice complémentaire, p. 805, note.)

26. Corps isotropes ou d'égale élasticité en tous sens. Formules à deux coefficients, ou à un seul. 581

(Voir 5e Appendice.)

27. Relations des pressions aux points successifs, tant entre elles qu'avec les forces accélératrices. Équations *indéfinies* de l'équilibre intérieur, à satisfaire en tous les points d'un corps quelconque. 583

28. Relations entre les pressions intérieures et les pres-

Pages.

Suite du 3e Appendice.

sions extérieures. Équations d'équilibre *définies* à satisfaire aux points de la surface-limite de chaque corps ou à la jonction de deux portions successivement considérées d'un même corps. 585

§ 29. Expressions des dilatations et glissements, et, par suite, des composantes de pression, en fonction des déplacements des divers points. 587

Déplacements de grandeur quelconque, mais ne donnant lieu dans chaque petite portion d'un corps qu'à des déformations très-petites ou ne changeant que dans de très-faibles proportions les distances entre points très-proches. 589

Déplacements très-petits u, v, w. 591

(En note. Mêmes déplacements de grandeur quelconque exprimés en fonctions de déplacements très-petits et de translations et rotations). 592

30. Équations différentielles contenant les déplacements supposés très-petits. . . . . *id.*

(En note. Cas de pressions antérieures aux déplacements.). . . . . *id.*

31. Usage général des formules et équations de cet Appendice. Méthode inverse. Méthode mixte. Essais et vérifications. Exemple (torsion). 595

(Voir même Appendice, § 35, p. 604, Appendice complémentaire, p. 825 et 840.)

32. Conditions de *compatibilité* à remplir pour que six fonctions de trois coordonnés représentent des dilatations et des glissements. — L'emploi de ces conditions dispense souvent de chercher les déplacements. 597

33. Vérifications et généralisations diverses; et, d'abord, contraction de volume d'un corps de forme quelconque sous une pression normale. 600

34. Suite. Extension longitudinale et contraction latérale d'un prisme de contexture quelconque. 601

35. Suite. Torsion d'un prisme à un seul plan de symétrie de contexture, et d'un cylindre elliptique de contexture quelconque. Équation de cohésion. 603

(Voir App. compl., § 79, 6°, p. 770, et § 96, p. 845.)

36. Suite. Flexion circulaire d'un prisme de contexture quelconque. 612

37. Suite. Flexion inégale ou avec glissements, d'un prisme à un seul plan de symétrie. 613

Pages.

Suite du 3e Appendice.

Observation sur la nécessité d'opérer d'une manière ou inverse ou mixte. 616

4e APPENDICE. *Comparaison de nos formules de torsion à l'expérience. Digression sur les vibrations tournantes.* 617

§ 38. Expériences de M. Wertheim sur la torsion des prismes rectangles, et observations sur la comparaison qu'il établit entre leurs résultats et ceux de la formule de Cauchy. . . . . *id.*

39. Examen de cette formule de torsion, trouvée par M. Cauchy en 1829. 620

(En note. Réduction d'un tiers qu'il faudrait opérer d'après son analyse, à laquelle il a renoncé). . 621 à 627

40. Confirmation par les expériences de Duleau et de Savart, et aussi par celles de Wertheim, de la loi établie par notre formule de torsion des prismes rectangles. 622 à 629

41. Expériences de M. Wertheim sur les cylindres à base d'ellipse. 629

42. Vibrations tournantes. Leur équation différentielle. . 631

43. Durée ou nombre des vibrations tournantes donnant le son le plus grave. 635

44. Rapport du nombre des vibrations longitudinales au nombre des vibrations tournantes d'une même tige. 635

45. Application aux tiges rectangulaires. Vérification, par les vibrations, de notre formule de leur torsion. . . . 640

(Voir aussi 5e Appendice, § 63, p. 686.)

(En note. Observation sur le résultat qui avait été trouvé par Cauchy). 641

46. Amplitude des vibrations de toute espèce. C'est cette amplitude qui détermine le danger de rupture. Mais tout calcul dans lequel on ne suppose pas unie à la pièce heurtée la masse étrangère heurtante, est sans utilité 643

5e APPENDICE. *Discussion théorique et expérimentale détaillée, relative aux rapports entre les coefficients des formules de l'élasticité des solides, et à la réductibilité de leur nombre. — Remarques sur les corps régulièrement cristallisés.* . . 645

47. Rappel de la réduction du nombre des coefficients :

Pages.

Suite du 5e Appendice.

1° pour une contexture quelconque, 2° pour des contextures particulières. 645

§ 48. Conséquence de cette réduction pour les corps isotropes. Expérience confirmative. Première contestation, élevée par M. Oersted, et qui porterait sur toutes les formules quels que fussent leurs coefficients. 646

En note. Démonstration, plus simple qu'à la p. 199, de la relation entre les deux coefficients des formules d'isotropie. Voir aussi p. 570, 580, 805 note, 814 note.). 647

49. Remarque de M. Regnault sur le défaut général d'isotropie des solides employés dans les expériences. . 650

50. Interprétation différente des faits par M. Wertheim. . 651

51. Remarque sur ce qui peut prêter à confusion à cet égard dans les écrits de Cauchy, et sur sa première manière d'établir les formules de pressions. . . . . *id.*

52. Formules proposées par M. Wertheim. Conséquences diverses (analytiques) des formules d'isotropie à deux coefficients quelconques. 657

53. Opinion sceptique à laquelle leur proposition a donné lieu. Nécessité de ne pas s'y retrancher quand on sort de l'analyse pure. L'admission de formules d'isotropie à deux coefficients dont le rapport est variable et même indéterminé est quelquefois sans inconvenient, mais souvent elle peut donner le change et empêcher de reconnaître le défaut d'isotropie et d'employer les vraies formules relatives aux corps dont on s'occupe. 658

54. Autre origine de l'opinion signalée. Formules à 36 coefficients données incidemment par Poisson en 1829 (et auxquelles il a renoncé depuis). 660

(Voyez une autre origine aux §§ 69, 72, p. 708 et 721.)

55. Observation sur le raisonnement de M. Poisson. Il se fonde tacitement sur la loi des actions entre molécules. Une fonction de *quantités très-petites* n'est pas nécessairement une fonction linéaire. Exemples. 662

56. Cas général de linéarité. Vraie raison de la forme linéaire des formules de pression. Une fonction a cette forme quand elle n'est que la *différence de deux valeurs d'une autre fonction* (supposées continues), et, sa variable, une différence correspondante, sup-

Pages.

Suite du 5e Appendice.

posée très-petite. Réduction inévitable des coefficients à quinze. 663

§ 57. Accord de la théorie avec les expériences de M. Regnauld sur les piézomètres en cuivre et en laiton. . 665

58. Même accord avec les expériences sur les piézomètres en verre. 673

59. Expériences de Wertheim et de M. Clapeyron sur le caoutchouc. Observation relative aux matières coagulées plutôt que solidifiées. 677

(Voir encore Appendice complém., § 73, p. 738.)

60. Expériences de Wertheim sur l'allongement des cylindres creux. Remarques sur les dispositions à leurs extrémités. Isotropie improbable. 679

61. Effets d'un défaut d'isotropie. Il explique les faits de plusieurs manières. 681

(Voir aussi Appendice complém., § 93, p. 820.)

62. Observation sur la proposition de prendre $\frac{k}{K} = 1$ constamment. 684

63. Expériences sur les vibrations tournantes. 686

64. Sur un raisonnement présenté par M. Cauchy en 1851, dans un Rapport. Il ne s'applique qu'au cas d'une cristallisation régulière, qui exclut l'isotropie. . . . 689

65. Comment la structure cristalline ou *périodique* pourrait altérer les vingt et une égalités entre les trente-six coefficients. Elle ne les altère pas nécessairement. 691

66. Autre moyen de se rendre compte de cette altération *simplement possible* et de ses limites. 697

Le produit de deux fonctions périodiques, *si elles sont de même période*, peut avoir une moyenne différente de zéro, quoique chacune ait zéro pour moyenne. . 703

67. L'altération des vingt et une égalités entre les trente-six coefficients, si elle a lieu, doit être insensible. Opinion adoptée finalement par Poisson. 704

68. Cette altération ne regarde pas, en tous cas, les corps amorphes ou à cristallisation confuse, comme sont toujours ceux qui sont employés comme matériaux. 705

69. Opinion, sur ce sujet, de divers savants de l'Angleterre et de l'Allemagne. MM. Charles Neumann, Haughton, Clebsch. Première observation sur les travaux de George Green. 706

Pages.

Suite du 5e Appendice.

§ 70. Preuve donnée par MM. Green, Thomson, Kirchhoff, de la nécessité de réduire les coefficients à vingt et un au plus. Les six composantes de pression sont les dérivées partielles d'une même fonction par rapport aux trois dilatations et aux trois glissements. 712

Les quinze égalités de Green. — Les six égalités complémentaires. . . . . 716 et 718

71. Examen des raisonnements par lesquels divers géomètres étrangers établissent les formules sans s'appuyer en apparence sur la loi des actions entre points matériels. . . . . *id.*

72. Examen des motifs censés tirés des faits sur lesquels plusieurs d'entre eux appuient la conservation de vingt et un coefficients pour le cas général de contexture. 1° George Green. 721

(En note.) Propagation des ondes lumineuses dans un milieu hétérotrope où il y avait des pressions antérieurement aux ébranlements. 722

(En note.) On peut obtenir l'onde de Fresnel avec des conditions moins nombreuses que celles de Green, et probablement toujours remplies. Polaire réciproque de l'onde la plus générale. 729

73. Suite. 2° MM. Stokes et Maxwell. Limite de l'application des formules de la théorie de l'élasticité. 732

74. 3° M. Clausius. Observations sur l'*elastische Nachwirkung*. 742

75. Résumé de la discussion du 5e Appendice. — Nécessité d'admettre la loi des actions entre points matériels et ses conséquences. . . . . 746 à 756

76. Conclusion de cet Appendice. 757

Formules de pressions pour des corps à un et à trois plans de symétrie et à un axe de symétrie. 759

Relations, données par anticipation (Voir l'Appendice complémentaire, p. 807), entre les coefficients, pour une distribution simple et continue des élasticités en divers sens. 761

APPENDICE COMPLÉMENTAIRE. *Expériences confirmatrices. — Considérations sur des points précédemment traités. — Ellipsoïdes des pressions et des dilatations. — Usage du Potentiel des actions*

Pages.

moléculaires. — Distribution des élasticités en divers sens. — Leur distribution ellipsoïdale dans les corps amorphes. — Travaux de M. Clebsch. — Démonstration nouvelle, par M. Kirchhoff, des formules de la torsion et de la flexion. 763

§ 77. Objet de cet Appendice. . . . . *id.*

78. Expériences récentes (de M. Morin surtout) confirmant les lois invoquées ci-dessus. 764

(En note.) Formule pratique des ingénieurs anglais. . 767

79. Observations diverses sur ce qui précède : 1° Inclinaison des fibres; 2° Approximation plus grande de la flèche; 3° Un glissement équivaut à une dilatation et une contraction; 4° Sur les arêtes rentrantes; 5° Généralisation et démonstration plus simple du théorème de réciprocité des composantes de pression; 6° Changement des coordnnoées transversales quand la contexture est à un seul plan de symétrie. *id.*

80. Sur l'état dit *naturel* ou primitif et sur sa condition. Il a lieu quand les forces extérieures sont nulles. . . 771

81. Pressions principales et Ellipsoïdes des pressions. . . 774

(En note.) Formules de M. Clebsch pour en déterminer les directions. 777

82. Dilatations principales et ellipsoïdes des dilatations. . 779

(En note.) Démonstration, autre que celle du § 19, p. 552, comme conséquence d'un théorème sur les projections, des formules (11), p. 554, de changement des directions suivant lesquelles on prend les dilatations et glissements. . . . . *id.*

(En note.) Équation générale de cohésion ou de résistance permanente pour un solide quelconque. . . . 781

83. *Potentiel* des forces moléculaires ou intérieures, ou travail qu'elles peuvent fournir jusqu'à *détente* ou retour à l'état naturel; et son emploi. Usage, avec un léger perfectionnement, des méthodes de la Mécanique analytique. 783

84. L'expression du potentiel, supposée établie, conduit aux équations différentielles indéfinie et définie de l'équilibre. 789

Formules (212) des composantes de pression, com-

Pages.

Suite de l'Appendice complémentaire.

plètes, c'est-à-dire avec les termes provenant des pressions p° antérieures aux déplacements. 795

§ 85. Expression complète du potentiel des actions intérieures en les regardant comme fonctions des distances moléculaires. Modification et généralisation des raisonnements de Navier, de 1821. 796

86. Formule symbolique donnant les vingt et un (ou quinze) coefficients des équations de l'élasticité pour un système quelconque d'axes coordonnés x', y', z', connaissant ces coefficients pour un premier système x, y, z. 800

87. Surface qui donne la distribution des élasticités *directes* autour d'un point. Cas de trois plans de symétrie. Conditions (probablement toujours remplies dans la nature) pour que ces élasticités n'aient que trois maxima et minima, et varient suivant une loi simple. 803

(En note.) Démonstrations plus simples qu'aux §§ 24, 25 et 48 (note), p. 575, 580, 647, de la réduction du nombre des coefficients quand il y a des plans ou un axe de symétrie . . . . . 804 et 805

88. Surface donnant la distribution, aussi autour d'un point, des coefficients ou modules d'élasticité E de Young et de Navier. Conditions de leur variation simple et graduelle. 808

89. Distribution *ellipsoïdale* des élasticités directes $a_{xxxxx'x'}$, et, aussi, des modules E. 811

90. Ce mode de distribution doit avoir lieu généralement, au moins à très-peu près, pour les solides amorphes ou à cristallisation confuse, comme sont les matériaux de construction. Effet d'une compression permanente inégale d'un solide isotrope. 812

(En note.) Formule générale (de Cauchy) de réduction de certaines sommes relatives à un système isotrope à un moindre nombre. 814

91. Corps pour lesquels on pourrait supposer un mode de distribution des élasticités un peu différent. 816

92. Comparaison aux expériences de M. Hagen sur les modules d'élasticité des bois en divers sens. Formule à substituer à la sienne. 817

93. Conséquences diverses de la distribution ellipsoïdale

Pages.

Suite de l'Appendice complémentaire.

et des modifications qu'on peut y admettre. Remarques sur les rapports η, η' entre les contractions transversales et les dilatations longitudinales correspondantes, et sur le rapport $\eta_1 = \frac{R'_0}{R_0}$ entre les limites des dilatations et des contractions longitudinales non dangereuses. 820

§ 94. Travaux de M. Clebsch. Problème général de recherche des divers modes de distribution à donner aux forces s'exerçant sur les bases d'un prisme dont les faces latérales sont libres pour que les fibres ou éléments longitudinaux n'agissent les uns sur les autres que dans le sens de leur longueur; et de la détermination des déplacements qui en résultent. Extension, torsion et deux flexions avec glissements. Application suffisamment approximative aux problèmes de la pratique. 825

95. Travaux de M. Kirchhoff : 1° Expressions que doivent prendre les dérivées des déplacements des points des tiges élastiques par rapport à leur coordonnée longitudinale quand ces tiges ont des dimensions transversales infiniment petites. 830

96. Suite. 2° Interprétation et conséquences de ces expressions ou équations. Les déformations de la tige infiniment mince se réduisent à des extensions, torsions, flexions. Les formules ci-dessus sont vraies quel que soit le mode d'application des forces aux extrémités d'une tige, quand elle est infiniment mince. Conséquences pratiques. 840

ERRATA. 850

NOTICE BIOGRAPHIQUE SUR NAVIER,

Par M. le baron DE PRONY, inspecteur général des ponts et chaussées.

Le système des connaissances qui constituent la science de l'ingénieur (l'architecture y est censée comprise) embrasse, à l'époque actuelle, dans leur presque universalité, et sous les points de vue théorique, expérimental et pratique, les diverses branches des sciences physico-mathématiques. Ce système n'a pas toujours été, à beaucoup près, aussi étendu; mais en comparant entre eux les monuments exécutés à des époques successives, et établissant la comparaison non sur la grandeur matérielle de ces monuments, la quantité de travail qu'ils ont exigée, mais sur le degré d'instruction qui était nécessaire pour en dresser les projets et en diriger l'exécution, on voit une correspondance manifeste entre la marche scientifique de l'esprit humain et celle de l'art des constructions. Les connaissances que Vitruve juge nécessaires à un architecte, et dont il donne l'énumération, n'étaient probablement pas toutes possédées par les constructeurs des pyramides d'Égypte, et cependant ne constitueraient maintenant qu'une instruction médiocre.

A des époques de désastreuse mémoire, la marche de l'esprit humain fut arrêtée, ou, plus exactement, devint rétrograde par suite des grandes catastrophes qui plongèrent plusieurs pays policés dans l'ignorance et la barbarie; mais il est à remarquer qu'une des divisions importantes de l'art de construire se trouva assez fortement établie pour résister aux causes de destruction qui attaquaient les autres branches des connaissances humaines, et continua d'apparaître, après l'extinction des dernières clartés scientifiques, comme le filet lumineux qui se fraye un passage au travers d'une atmosphère ténébreuse. Une des preuves du fait que je cite ici est fournie depuis bien des siècles

par les monuments de cette architecture qu'on appelle *gothique;* l'examen analytique du sytème de composition de ces monuments fait reconnaître l'art avec lequel on a su rendre compatibles, en élevant des édifices d'une immense grandeur, l'économie des matériaux, les garanties assurées de stabilité. A ces avantages se réunit, dans l'intérieur des temples, celui d'un caractère éminemment religieux, etc.

On peut regarder le XVIe siècle comme fournissant l'époque à laquelle la science de l'ingénieur a commencé à prendre les grands développements qui ont préparé son état actuel de transcendance. Des travaux hydrauliques importants, de différents genres, ont été exécutés pendant les XVIe et XVIIe siècles, en Italie, d'où il me semble que sont sortis les premiers traités sur le mouvement des eaux.

Pendant la première moitié du XVIIe siècle, la France s'est acquis des droits impérissables à la reconnaissance des nations civilisées par la construction du premier canal à *point* ou *bassin* de partage, celui qui, en partant de Briare, établit la communication entre le bassin de la Loire et celui de la Seine.

Le XVIIIe siècle a vu s'élever, dans cette même France, des ponts en pierre, dont la hardiesse et la beauté n'avaient pas encore d'exemples, et dont les moyens de construction rendent manifeste la supériorité de l'art moderne sur l'art ancien.

Enfin est arrivée l'époque ci-dessus mentionnée, à laquelle le système, presque entier, des sciences physico-mathémathiques s'est allié à la science des constructions considérée dans toute sa généralité. On peut citer parmi les résultats récents de cette heureuse alliance, l'immense perfectionnement des moyens de communication et de transport, tant par eau que par terre; les procédés de substitution du fer à la pierre, les traversées qu'on pourrait appeler *aériennes* des plus grands fleuves; les nouvelles et puissantes ressources tirées de l'action du feu comme force applicable à la locomotion, etc., etc., et il est juste d'ajouter que nous avons, pour cette marche progressive de la science, de grandes obligations à l'Angleterre. Si l'on veut se faire une idée de la vaste étendue des études auxquelles les jeunes ingénieurs sont maintenant obligés de se livrer, il faut prendre connaissance des programmes d'enseignement, tant de la célèbre École

polytechnique que des écoles d'application, où les élèves vont puiser le complément d'instruction nécessaire pour les services publics.

Un des hommes bien distingués de cette dernière époque, est l'ingénieur et académicien, dont la perte récente et prématurée excite nos vifs regrets; ayant été à portée de bien connaître et apprécier, dès son début dans la carrière scientifique, et ses excellentes qualités et le mérite de ses travaux, j'ai cru devoir payer à sa mémoire un tribut d'estime et d'amitié que j'aurais vraisemblablement reçu de lui, si l'ordre naturel des survivances n'eût pas été interverti entre nous deux.

Louis-Marie-Henri Navier, officier de la Légion d'honneur, membre de l'Institut royal de France (Académie des sciences), et inspecteur divisionnaire du corps royal des ponts et chaussées, naquit à Dijon, le 15 février 1785. Son père était un avocat jouissant d'une grande considération, et qui, après avoir été membre de l'Assemblée des notables et de l'Assemblée législative, mourut dans un âge peu avancé, par suites des chagrins que lui causèrent les excès révolutionnaires.

Louis Navier, resté orphelin à l'âge de quatorze ans, eut le bonheur de trouver un second père dans un oncle, compté avec raison parmi les notabilités du corps des ponts et chaussées, M. Gauthey, qui, d'abord ingénieur des états de Bourgogne, devint inspecteur général des ponts et chaussées, par suite de l'organisation départementale de la France; il est mort le 14 juillet 1807, après avoir projeté et fait exécuter des travaux de la plus haute importance, et composé des ouvrages remarquables, dont il sera fait mention dans la suite de cette notice.

L'éducation de Navier, dirigée par Gauthey, devait nécessairement avoir pour objet principal la culture des sciences qu'un ingénieur doit se rendre familière; les progrès du jeune élève furent tels qu'il se trouva, en 1802, en état de subir l'examen d'admission à l'École polytechnique, et d'être un des premiers reçus à cette école par ordre de mérite; après de brillantes études, il entra à l'École des ponts et chaussées en 1804, et obtint en 1808 le grade d'ingénieur ordinaire.

Gauthey, pendant les quatre ou cinq dernières années de sa vie, mettait à profit le peu d'instants de loisir dont pouvait dis-

poser son neveu, en suivant les cours des Écoles polytechnique et des ponts et chaussées, pour l'occuper à la partie de ses travaux personnels, à laquelle les études du jeune élève pouvaient être applicables. Le résultat de cette association a été l'habitude, la grande facilité acquise de bonne heure par Navier, de traiter les questions théorico-pratiques, facilité qui a eu une heureuse influence sur le mérite de ses travaux postérieurs. Avec de tels antécédents il se trouva en état de produire de son propre fonds, à une époque de la vie où la plupart des hommes voués aux sciences ont encore besoin d'un complément d'instruction. Ses premières grandes publications (je ne parle pas de quelques notes et opuscules isolés) furent des tributs de reconnaissance payés au digne parent qui l'avait lancé dans la carrière scientifique. Gauthey avait rédigé en presque totalité, mais non achevé, et laissé même incomplets à d'autres égards, des traités fort étendus sur les ponts et les canaux ; Navier, qui n'était pas l'héritier de son oncle, fit, eu égard à sa médiocre fortune, de grands sacrifices pour acquérir la propriété de ces manuscrits, afin de les publier après les avoir complétés.

Le *Traité des ponts* a paru en 1813, et se compose de deux forts volumes in-4°. Le premier volume a été réimprimé en 1832, avec des augmentations et améliorations considérables. Ce traité, le plus complet de tous ceux qui ont été publiés sur la même matière, doit surtout son utilité et l'avantage d'être mis au niveau des connaissances actuelles, à la grande quantité de notes que Navier y a insérées, et dont la réunion pourrait fournir un ouvrage séparé fort instructif.

Le premier volume contient des détails historiques et descriptifs sur les ponts anciens et modernes, qui sont lus avec beaucoup d'intérêt, non-seulement par les ingénieurs, mais encore par ceux qui, étrangers aux connaissances physico-mathématiques concernant les ponts, sont simplement curieux de connaître l'histoire de l'art. Navier a placé en tête de ce volume une notice biographique sur son oncle.

J'ai dit que ce *Traité des ponts* avait d'abord paru en 1813; il aurait probablement paru plus tôt, si la rédaction de Navier n'eût été interrompue par une mission dont M. le comte Molé, directeur général des ponts et chaussées, le chargea pour aller

à Rome s'occuper de projets très-importants ; savoir, la reconstruction du pont d'Horatius Coclès, plusieurs quais dans la traversée de Rome, et les moyens de préserver la ville éternelle des inondations du Tibre.

J'ai eu la satisfaction de me trouver à Rome lorsque Navier travaillait à ces projets importants, qui sont restés en portefeuille par suite d'événements politiques bien connus.

Un troisième volume des œuvres laissées en manuscrit par Gauthey, et publiées par Navier, traite des canaux de navigation ; ce volume, mis au jour en 1816, offre une collection de sept mémoires contenant, indépendamment des considérations générales sur l'établissement des canaux, des notes fort détaillées sur les principaux canaux de France, tant exécutés que projetés, et particulièrement sur le canal du Charolais, qui a pris ensuite le nom plus caractéristique de canal du Centre, et dont Gauthey a rédigé les projets et dirigé l'exécution.

Navier, en publiant les manuscrits de son oncle, avait satisfait un besoin de son cœur; l'amour seul de la science lui fit entreprendre et exécuter la réimpression de deux ouvrages recommandables, rédigés et mis au jour, par leur auteur, pendant la première moitié du siècle dernier (1729, 1737), savoir : la *Science de l'ingénieur*, et le premier volume de l'*Architecture hydraulique de Bélidor*. L'édition Navier, de la *Science de l'ingénieur*, porte la date de 1813, et parmi les notes et additions dont elle est enrichie, on distingue celles qui concernent la poussée des terres, la forme et les dimensions des murs de revêtement, la théorie des voûtes.

Le premier volume de l'*Architecture hydraulique de Bélidor* est un traité de mécanique, dans lequel les théories de l'équilibre et du mouvement des corps solides et fluides, sont présentées avec leurs applications au cas de pratique dont les ingénieurs ont à s'occuper. Cet ouvrage a joui d'une réputation justement méritée, et à l'époque où il a paru il remplissait complétement son objet; mais cette condition ne se trouvait plus satisfaite après un laps de temps de plus de trois quarts de siècle, d'après la marche progressive des connaissances. Navier a entrepris de suppléer, par des additions et des notes, à l'insuffisance de l'ancien texte, et s'est acquis en remplissant cette tâche des droits

à la reconnaissance des amis des sciences et des arts; ses additions et notes, qui en somme doublent à peu près le volume primitif, renferment une masse d'instructions on ne peut pas plus profitables.

Livré à des *travaux scientifiques* aussi importants, et que l'on verra suivis bientôt de missions et de publications non moins remarquables, Navier a pu encore s'occuper de *travaux pratiques* du genre de ceux dont l'utilité fait le principal mérite (on voit qu'il ne s'agit pas ici du pont des invalides dont il sera bientôt parlé). Je citerai parmi ces travaux :

1° Le pont de Choisy, construit en 1810 sur la Seine;

2° La passerelle de la cité de Paris, reconstruction nécessitée par des combinaisons malheureusement hasardées et qu'il est utile de mentionner comme leçons d'expérience dans l'histoire de l'art;

3° Le pont d'Asnières sur la Seine;

4° Le pont d'Argenteuil, encore sur le même fleuve.

Les trois ponts de Choisy, d'Asnières et d'Argenteuil sont construits avec piles en pierre, et avec travées courbées en arc de cercle.

Mais c'est surtout par ses missions en Angleterre que Navier était appelé à rendre de nouveaux et d'importants services.

La grande utilité des ponts suspendus et des chemins de fer ayant été appréciée par le gouvernement, la direction générale des ponts et chaussées a voulu mettre les ingénieurs français en état de compléter les parties de leurs études liées à ces nouveaux genres de construction, et Navier a été envoyé plusieurs fois en Angleterre et en Écosse, chargé de recueillir les données et les documents nécessaires pour atteindre ce but.

Le mémoire que rédigea Navier sur les ponts suspendus, et qu'il publia en 1823 après ses deux premiers voyages, a été jugé un traité aussi nouveau que complet sur la matière; l'approbation formelle de l'Académie des sciences en constata le mérite d'après un rapport présenté par MM. de Prony, Fourier, Fresnel, Molard et Charles Dupin; l'auteur y avait donné de nouvelles preuves de ses profondes connaissances en mécanique théorique et pratique, de même qu'il y avait enregistré les précieuses et

nombreuses observations qu'il avait recueillies sur les ponts suspendus jusque-là exécutés.

Dès ce moment Navier fut appelé, et sa correspondance le constate, à donner des avis, des conseils sur les constructions importantes de cette nature projetées en France et à l'étranger.

Peu après, Navier fut nommé membre de l'Académie des sciences, et cette récompense mit le comble aux vœux que, jeune encore, il lui était possible de former.

Malheureusement il était dans la destinée de ce savant ingénieur de fournir un nouvel exemple de ces vicissitudes qui ont troublé les vies les plus brillantes d'avenir, et qui semblent réservées aux artistes mêmes, à qui une juste confiance dans leurs méditations donne l'assurance nécessaire pour tenter des essais nouveaux; Navier devait, parvenu à cet apogée de sa carrière, se voir injustement et cruellement blessé dans sa réputation d'ingénieur; on devine que je vais parler du pont des Invalides.

Ce pont, de 155 mètres d'ouverture, était presque égal au plus grand passage jusqu'alors franchi par M. Telfort au détroit de Menai.

Pour apprécier le mérite des recherches théoriques et expérimentales qu'a exigées l'évaluation des forces agissant sur les diverses parties du pont des Invalides, il suffit de rappeler que les chaînes de ce pont étaient exposées à recevoir un effort quatre fois et demie plus considérable que le pont construit en 1820 sur la Tweed, par le capitaine Brown, pont qui était alors cependant le plus grand modèle que l'ont eût à consulter.

Paris a pu juger de l'effet monumental de cette arche colossale reposant sur quatre colonnes égyptiennes; les ingénieurs se sont alors aussi empressés d'étudier, et les dispositions neuves comme armatures des points d'appui ou d'attache de cette grande construction, et l'appareil ingénieux inventé par Navier pour soumettre à un effort de 67,000 kilogrammes (poids presque d'un millier d'hommes), avec quatre ouvriers seulement, les cinq mille pièces composant le système de suspension.

Le pont était terminé lorsqu'un léger mouvement se manifesta dans les puits et contre-forts de retenue; ce mouvement fut aggravé du côté des Champs-Élysées par la rupture, dans la nuit du 6 au 7 septembre 1826, d'une conduite maîtresse des eaux

de la ville de Paris de $0^m,32$ de diamètre; l'irruption torrentielle de ces eaux sous une charge de près de 30 mètres des réservoirs alimentaires de Chaillot (irruption que la nuit prolongea nécessairement), forma un lac au droit des fouilles non comblées, et s'étendit au loin par infiltration dans les remblais déjà effectués.

Il fallut dès lors remettre la construction sur ses échafaudages; la saison était avancée, on craignit que les ponts de services ne pussent être démontés avant les hautes hautes eaux et les glaces de l'hiver; une misérable question d'argent empêcha d'ailleurs de commencer immédiatement les travaux additionnels nécessaires pour consolider les points d'attache de la suspension, et l'on décida d'ajourner ces réparations à la campagne suivante, et de démonter le plancher et les chaînes.

Malheureusement, et pour la science et pour les moyens de justification de l'ingénieur, je dirai même pour l'honneur national, solidairement lié à celui des hommes que chaque pays présente avec orgueil comme donnant la mesure de l'avancement des diverses branches de connaissances, les travaux du pont des Invalides n'ont point été repris, et au contraire on a vu démolir les ouvrages exécutés, et effacer jusqu'aux traces de cette grande et belle entreprise.

Navier vit ainsi s'anéantir subitement un des plus beaux titres qu'il pût avoir à l'estime des hommes instruits, la plus noble récompense de ses honorables travaux.

D'autres considérations ont dû aggraver ses douloureux regrets. Lorsqu'un grand monument, qui excite vivement l'intérêt général, vient ainsi à disparaître tout à coup, au moment où il est prêt à remplir sa très-utile destination, comme le nombre de ceux qui peuvent connaître et apprécier les véritables causes de cette disparition est toujours infiniment petit par rapport au nombre de ceux dont les croyances, quoique fondées sur des apparences trompeuses n'en constituent pas moins ce qu'on appelle l'*opinion publique*, il en résulte nécessairement, dans cette opinion, une défaveur qui, accréditée par des causes que je me dispenserai de signaler, exerce une bien fatale influence sur l'état moral et même physique de celui qui en est l'objet.

C'est aux hommes spéciaux et consciencieux qu'il appartient

de réformer, autant qu'il est en eux, ces grandes et affligeantes injustices.

Je remplis donc un devoir sacré en déclarant à cette occasion :

Que l'événement du pont des Invalides devait être considéré seulement comme un de ces accidents plus ou moins graves que les ingénieurs rencontrent souvent dans les grands travaux ;

Que le remède était aussi facile que peu dispendieux, puisqu'il s'agissait seulement d'augmenter la résistance des contreforts ;

Qu'il est infiniment à regretter que, par l'exécution de ces travaux complémentaires et par l'achèvement du pont, on n'ait point donné au public la preuve évidente des deux précédentes propositions, et acquis à la France une nouvelle manifestation monumentale de ce que pouvaient la science et le talent de l'ingénieur qui avait le premier, et avec tant de sagacité et de profondeur, raisonné les importantes questions que soulève la construction des ponts suspendus (1).

Dès son premier voyage en Angleterre, Navier fixa aussi son attention sur les routes excellentes de ce pays, et remit à ce sujet à l'administration, en 1822, la première note qui ait été rédigée sur les procédés de Mac-Adam, et qui est publiée dans les *Annales des ponts et chaussées* (1er semestre 1832).

Cette notice constatait moins un procédé nouveau pour la construction des chaussées que les résultats remarquables à attendre :

---

(1) La démolition du pont des Invalides a eu pour motifs exclusifs :

1° L'opposition de la ville de Paris à l'établissement d'une route à travers les Champs-Élysées pour arriver à ce pont ;

2° Les contestations entre la compagnie et l'administration, au sujet du payement des travaux de consolidation des contre-forts ;

3° La transaction survenue sur ces difficultés, et par laquelle la compagnie s'est obligée à renoncer au pont des Invalides, moyennant la concession qui lui a été faite de trois ponts sur la Seine, à l'allée d'Antin, à la place de Grève, et près de l'Archevêché.

Tous ces détails sur le pont des Invalides, dont nous garantissons l'exactitude, ont été publiés dans le temps par ordre de l'administration (*Moniteur*, 29 février 1828), et reproduits avec des développements d'un grand intérêt par Navier, dans l'édition de 1830, de son mémoire sur les ponts suspendus, sous le titre de *Notice sur le pont des Invalides*.

1° D'un soin éclairé de tous les jours pour l'entretien des empierrements, pour le parfait écoulement des eaux, pour l'enlèvement des boues et de la poussière;

2° De la suppression radicale des accotements de terre, qui sont en France une cause si funeste de la malpropreté et du mauvais état des routes.

Plus tard, les relations de Navier avec les ingénieurs anglais les plus marquants, et ses recherches multipliées sur ce qui avait rapport aux routes anglaises, aux usages et à la législation qui régissait ces communications, lui permirent de publier son mémoire *sur la police du roulage*. Les opinions qui y sont émises, peuvent être controversées, mais l'amour du bien public et le désintéressement qui ont dicté cet ouvrage, comme le mérite de la discussion et des faits qui y sont présentés, seront toujours pour Navier un titre de plus à l'estime des ingénieurs.

Un nouvel hommage fut rendu aux études spéciales de Navier sur toutes ces questions; une commission avait été nommée par M. le directeur général des ponts et chaussées, avec mission de se livrer à tous les travaux et expériences préparatoires pour les nouvelles dispositions réglementaires à adopter comme police de roulage. Navier fut appelé par l'administration à faire partie de cette commission, et fut élu à l'unanimité, par ses collègues, le secrétaire rapporteur des travaux considérables que cette commission a eu pendant plusieurs année à élaborer.

Navier fut aussi du nombre des ingénieurs envoyés en Angleterre pour étudier les chemins de fer, et c'est à ses connaissances pratiques, comme aussi à ses recherches théoriques sur cette nouvelle branche d'explorations scientifiques, que les ingénieurs doivent les articles remarquables insérés dans les *Annales des ponts et chaussées*, et que l'administration a été redevable des rapports nombreux, lumineux, qui ont signalés, et les études qu'il avait personnellement faites de la grande ligne de Paris à Strasbourg, et sa courte apparition comme inspecteur divisionnaire au conseil général des ponts et chaussées.

Lorsque Navier entra au conseil, il venait de recevoir, quelques mois auparavant, comme récompense de ses infatigables services, la croix d'officier de la Légion d'honneur.

Et cependant Navier pouvait faire marcher de front, avec ces

services si étendus, comme ingénieur, des travaux non moins remarquables, comme professeur, comme académicien.

Nommé, en 1819, professeur suppléant de mécanique appliquée à l'École royale des ponts et chaussées, et professeur titulaire en 1831, il a exercé cette fonction avec beaucoup de profit, et pour les élèves et pour la science; ses leçons, tant lithographiées qu'imprimées, distribuées aux élèves qui ont suivi ses cours, et, en général, répandues parmi les ingénieurs, offrent des corps de doctrine qui deviennent de plus en plus nécessaires à mesure que l'application de la théorie à la pratique des constructions exige une étude plus approfondie des sciences physico-mathématiques.

Une des places de professeur d'analyse et de mécanique à l'École royale polytechnique, étant devenue vacante à la fin de 1830, Navier fut nommé pour la remplir, et en a exercé les fonctions pendant les six dernières années de sa vie; il s'est fait remarquer, dans cette célèbre école, par la méthode et la clarté de son enseignement, et a rendu un grand service à l'instruction en faisant lithographier ses leçons, dont la collection forme quatre cahiers; savoir, deux pour la première année, et deux pour la seconde; un des cahiers de chaque couple contenant l'analyse, et l'autre la mécanique.

Navier, avant d'être reçu à l'Académie royale des sciences, s'était fait connaître avantageusement de cette compagnie savante, par plusieurs mémoires et ouvrages importants; ses additions au premier volume de l'*Architecture hydraulique* de Bélidor, ci-dessus mentionnées, ont été approuvées par l'Académie, sur le rapport de MM. Poisson, Girard, Fourier et de Prony, rapporteur; j'ai dit, plus haut, que son *Traité des ponts suspendus* avait obtenu la même distinction. Parmi les mémoires présentés et lus en séances académiques, je citerai : 1° *Mémoire sur les roues à élever l'eau*, jugé digne d'être imprimé dans les Savants étrangers, sur le rapport de MM. de Prony, Fourier et Dupin, rapporteur, du 2 novembre 1818; 2° *Mémoire sur la flexion des lames élastiques*, jugé comme le premier, digne d'être imprimé, sur le rapport de MM. Poinsot, Dupin et de Prony, rapporteur, du 4 septembre 1820; 3° *Mémoire sur la flexion des*

plans élastiques, lu le 14 août 1820; 4° *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques*, lu le 14 mai 1821; 5° *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides, en ayant égard à l'adhésion des molécules*, lu le 18 mars 1822; 6° *Continuation des recherches sur les lois du mouvement des fluides, en ayant égard à l'adhésion des molécules*, lu le 16 décembre 1822.

Nommé, comme je l'ai déjà dit, membre de l'Académie royale des sciences, le 26 janvier 1824, Navier a contribué fort utilement aux travaux intérieurs de cette compagnie savante, par les nombreux rapports qu'il lui a faits sur des mémoires et ouvrages soumis à son jugement, et dont l'énumération serait trop longue pour être placée dans la présente notice. Les mémoires de sa composition, imprimés dans les recueils de l'Académie, sont :

1° *Dans le tome* 6, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides;* 2° *dans le tome* 7, *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques;* 3° *dans le tome* 9, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides élastiques.*

Les théories exposées dans ces derniers mémoires sont fondées sur ce qu'on pourrait appeler la *mécanique moléculaire*, celle qui fait entrer en considération la composition intime des corps, les actions réciproques des molécules qui les composent. La science de l'équilibre et du mouvement a pris ainsi une extension qui dépasse les limites posées par les Euler, d'Alembert, Lagrange, et prépare l'époque à laquelle diverses branches importantes des sciences naturelles seront ramenées à n'être plus que les divisions d'un même système, bien liées entre elles, et régies par l'analyse mathématique. On a, relativement à ces nouvelles théories et à leurs applications, de bien grandes obligations à notre célèbre géomètre, M. Poisson, qui a fait paraître et continue à publier des ouvrages, lesquels feront époque dans les annales scientifiques.

Ce fut le 23 août 1836 qu'une mort fatale et inattendue enleva Navier aux sciences et à ses nombreux amis; je dis ses nombreux amis, car il pouvait compter comme tels, tous ceux avec qui il avait des relations habituelles; quoique d'un caractère naturellement un peu flegmatique, il n'en était pas moins susceptible d'un attachement aussi durable que sincère, et cette disposition com-

porte d'autres qualités dont il était éminemment doué; les détails de sa vie privée feraient autant d'honneur à son caractère que ceux de sa vie publique en ont fait à sa science et à son talent.

Un cortége d'ingénieurs et d'élèves accompagnait le convoi de Navier : trois des ingénienrs, MM. Emmery, Coriolis et Raucourt ont pris la parole au moment de l'inhumation, et leurs discours brefs, mais pleins de sensibilité, ont été écoutés avec un vif intérêt.

(*Annales des Ponts et Chaussées*, 1837, 1er semestre, p. 1.)

NAVIER,

Par M. EMMERY, Ingénieur en chef directeur.

Au moment où une si honorable couronne est décernée à la mémoire de Navier dans ces Annales qu'il appelait un besoin de notre époque, et qu'il avait déjà enrichies de ses travaux, qu'il nous soit permis d'y enregistrer un dernier adieu : hélas ! les tombes se refroidissent si vite.

Les hommes de cœur ne sauraient assez redire que Navier a succombé avant le temps, parce qu'il a refusé de consulter ses forces, parce qu'il s'est plu en quelque sorte à jouer sa santé, sa vie, contre cette tâche presque sans exemple, de se distinguer à la fois au plus haut degré comme ingénieur, comme professeur, comme savant.

L'École polytechnique, si bien représentée par ces deux cents braves jeunes gens qui, au plus fort de leurs examens, surent tout quitter pour accompagner et porter la dépouille de Navier à sa dernière demeure, cette École se rappellera toujours le culte de dévouement que lui portait notre ami, lorsqu'à l'instar

de l'immortel Monge, il mettait son titre de professeur au-dessus de tous les honneurs auxquels il pût aspirer.

Les ingénieurs n'oublieront jamais ni cet esprit juste et positif qui constituait le caractère distinctif des ouvrages de Navier, et qui lui faisait faire de la théorie presque exclusivement au profit de la pratique, ni ce double don de dessiner et d'écrire avec une merveilleuse facilité, avantage qui lui permettait de mettre, presque sans effort, en circulation, les notions avancées qu'il puisait pour lui-même dans ses infatigables travaux. Car la réunion si rare de tant de qualités avait fait de Navier un ingénieur, un savant à part, qui avait sa voie à lui personnelle toute tracée, et qui était appelé, par ses études en économie politique, par ses voyages, à jeter de vives lumières sur les plus importantes questions.

Nous nous répèterons souvent encore qu'il n'était pas d'homme chez lequel les témoignages d'amitié, les souvenirs de reconnaissance laissassent de plus profondes traces; que lorsqu'on était malheureux surtout, on voyait venir Navier, si froid dans ses rapports officiels, vous serrer la main avec cette expression que connaissaient ses amis, et vous prodiguer alors et son temps et toutes les consolations que peut seule dicter une âme qui sent fortement.

Aussi Navier fut l'ami de Fourier; il mérita d'être le digne successeur de Gauthey; il était un des ingénieurs qu'estimait le plus M. Bruyère.

Ces trois noms diront plus haut que notre voix, qui n'a pour elle que l'accent de la conviction, tout ce que Navier avait de générosité et de probité dans le cœur, de vues élevées dans l'esprit, de hautes capacités et de zèle pour servir son pays.

(*Annales des Ponts et Chaussées*, 1837, 2e semestre, p. 272.)

DISCOURS

PRONONCÉ AUX FUNÉRAILLES DE NAVIER,

au nom de l'Institut, par M. GIRARD, ingénieur en chef,
membre de l'Académie des sciences.

Une perte douloureuse, à laquelle nous étions loin de nous attendre, nous réunit encore aujourd'hui pour remplir un triste et pénible devoir. Celui de nos confrères auquel nous venons de dire le dernier adieu, semblait être appelé, par les lois ordinaires de la nature, à parcourir une plus longue carrière; mais la mort exerce sur nous un despotisme sans pitié, et ne tient compte ni de l'âge, ni du savoir, ni des vertus de ceux qu'elle moissonne.

Louis-Marie-Henri Navier naquit à Dijon, le 15 février 1785. Il n'était pas encore sorti de l'enfance quand il eut le malheur de perdre son père. M. Gauthey, son grand-oncle, l'un des plus célèbres ingénieurs dont la France puisse s'honorer, l'adopta pour fils, et se chargea du soin de son éducation. Laborieux, infatigable, persévérant à toute épreuve, il donna de bonne heure à son jeune pupille l'habitude et le goût du travail; les dispositions de celui-ci pour les études sérieuses et positives se fortifièrent par les exemples journaliers qu'il recevait de son bienfaiteur, dont la maison était devenue pour lui la maison paternelle. Bientôt, l'âge arriva d'entrer à l'École polytechnique, Navier y fut admis, et en sortit avec distinction; il justifia, à celle des Ponts et chaussées, les espérances qu'on avait conçues de sa capacité et de ses talents; enfin, il obtint en 1808 le grade d'ingénieur, qui avait été, jusqu'alors, l'objet de son ambition.

Il s'occupa, aussitôt après, de rassembler, pour être livrés à l'impression, les nombreux mémoires où M. Gauthey avait déposé les résultats de sa longue expérience. Ainsi, la première publication de Navier fut un hommage de reconnaissance et, j'oserais dire, de piété filiale, qu'il rendit à la mémoire de celui auquel il devait le bienfait de son éducation.

Il entreprit ensuite de commenter l'*Architecture hydraulique* de Bélidor ; travail de longue haleine, et non moins utile que le *Traité des ponts et des canaux*. Cependant sa réputation de géomètre et de mécanicien s'étendait de plus en plus. Avantageusement connu de l'Académie des sciences, il fut élu par elle, au mois de janvier 1824, en remplacement de M. Breguet.

Cet honneur, qu'il avait vivement désiré, lui imposa de nouvelles obligations : nous savons tous qu'il les a constamment remplies avec le zèle le plus consciencieux, soit en rendant compte des mémoires renvoyés à son examen, soit en enrichissant les nôtres de ses propres travaux.

Je ne m'arrêterai pas, messieurs, à les énumérer ; cette honorable tâche est réservée à l'un de nos collegues qui saura la remplir en meilleur lieu et en temps plus opportun. Je me bornerai à rappeler que, depuis son admission à l'Académie, Navier fit marcher de front ses études scientifiques, et la pratique de l'art qu'il exerçait; enfin, ce qui était peut-être plus difficile, il sut trouver le temps et les moyens de rendre profitables les leçons qu'il a données, comme professeur, à l'École des ponts et chaussées, et plus tard à l'École polytechnique.

Le peu de mots que je viens de prononcer suffira pour vous faire apprécier l'excellent confrère dont nous avons à déplorer la perte prématurée. Ajoutons cependant que, si la vie se mesure par le nombre et l'importance des travaux dont elle a été remplie, Navier devra toujours être compté parmi les hommes qui auront le plus longtemps vécu. Dévoué sans réserve à ceux dont il avait reçu des témoignages d'estime et d'amitié, personne ne fut plus sensible que lui à ces généreuses affections, ni plus digne de les inspirer.

Que le souvenir de cet homme de bien soit donc à jamais conservé dans l'Académie, comme il se perpétuera dans sa propre famille ! Les tendres soins dont elle l'a entouré, malheureusement impuissants pour le sauver, ont contribué, du moins, à adoucir les derniers moments d'une vie que le travail avait épuisée.

NOTICE

SUR LES OUVRAGES DE NAVIER.

1809. *Œuvres de Gauthey*, inspecteur général des ponts et chaussées, publiées par M. Navier, ingénieur ordinaire [1].

Traité de la construction des Ponts, t. I. Principes, Ponts en pierre.

1813. *Mêmes œuvres*, tome II. Cintres, Ponts en bois et en fer, Ponts mobiles, Détails de construction, Estimation des prix.

1816. *Mêmes œuvres*, t. III, Des canaux de navigation, Canal du Centre.

(1832.) Seconde édition du tome I.

Les notes mises par Navier au tome I sont relatives à la résistance des pierres, à la théorie des voûtes, à celle de la poussée des terres et des murs de revêtement, et à celle du mouvement des eaux, envisagée quant à la détermination de la largeur du débouché des ponts.

Les notes du tome II ont rapport surtout à la résistance des pièces de bois et à celle des constructions en charpente. Il y eût fait de profondes modifications si ce tome avait été réédité,

---

[1] Aspirant le 14 novembre 1806, — ingénieur ordinaire en 1808, à Paris, (sans destination),— 1810 à 1817, attaché au pont de Choisy, — 1819, professeur suppléant de mécanique appliquée à l'Ecole des Ponts et Chaussées, — 1820, ingénieur de première classe. — 1822, professeur titulaire, — 1823, ingénieur en chef, — 1824, membre de l'Institut, — 1830, professeur d'analyse et de mécanique à l'École polytechnique, — 1834, inspecteur divisionnaire.

comme on peut voir à son cours de 1824 (Voir ci-après, n° 76, p. 28, et notre *Historique*, n°s IX et X) [1].

Nul doute que le texte lui-même, dans sa partie mathématique, ne soit de Navier, comme on voit aux p. 92 et suivantes du tome II, et, aussi aux changements qu'il a apportés en 1832 au tome I.

1811. *Projet* d'une gare le long de la Seine à Choisy. In-4° avec 4 belles planches.

---

(1) Il eût sans doute changé aussi une note de la page 91, où il pensait prouver que malgré la perte annuelle que la pourriture fait éprouver aux dimensions résistantes des bois des ponts, on ne doit leur donner qu'un équarrissage extrêmement peu au-dessus de celui qui convient actuellement à l'équilibre; car cette note est affectée d'une erreur de calcul. En appelant a leur équarrissage d'équilibre initial, k l'épaisseur qui pourrit annuellement, n le nombre d'années de durée qu'on veut leur assigner, il faudra porter leur équarrissage à $a+nk$; d'où, annuellement, une dépense proportionnelle à $\frac{(a+nk)^2}{n}$. En différentiant par rapport à n et égalant à zéro pour rendre cette dépense un minimum, on trouve, non pas $n=0$ comme le dit la Note, mais $n=\frac{a}{k}$, ce qui n'a rien d'absurde, et ce qui porterait *à doubler l'équarrissage* de juste équilibre primitif quelle que fût la proportion peu connue $k:a$ de l'usé annuel.

On corrige l'exagération qu'offre ce résultat en tenant compte de l'intérêt de l'argent. Soit r son taux annuel. La somme à placer pour construire le pont et le renouveler tous les n ans, ou la quantité à rendre un minimum, est proportionnelle à

$$(a+nk)^2\,\frac{(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$$

dont la différentielle par rapport à n, égale à zéro, donne pour déterminer cette variable, l'équation

$$\frac{\log \text{hyp}\,(1+r)}{2\left[(1+r)^n-1\right]-n\log \text{hyp}\,(1+r)}=\frac{k}{a}$$

qui est satisfaite par $n=\frac{a}{k}$ pour $r=0$, et qui, si l'on prend $r=0{,}05$, donne

Durée en années $n=$	54,9;	51,0;	46,2;	39,5;	29,3	; 20,6	; 16,6	; 14,0	; 12,3
si l'on a pour l'usé $\frac{k}{a}=$	0,002;	0,0025;	0,00333;	0,005;	0,01	; 0,02	; 0,03	; 0,04	; 0,05
d'où augmentation d'équarrissage $n\frac{k}{a}=$	0,110;	0,128	; 0,154	; 0,197;	0,293;	0,413;	0,497;	0,560;	0,615

1813. *La Science des ingénieurs*, de Belidor. Nouv. édit. avec des notes par M. Navier.

Ces notes sont relatives principalement à la poussée des terres, à la résistance de leurs murs de soutenement, aux voûtes, aux calculs de terrasse, et à la résistance des pièces de bois, que Navier présente de la même manière qu'au tome II de Gauthey (Historique ci-après, nos IX et X), enfin sur les principes de Durand relatifs au beau en architecture.

1813. *Sur la manière d'exprimer le moment d'élasticité des corps;* mémoire (inédit) présenté à l'Académie le 25 janvier; contenait probablement les considérations reproduites par Navier dans les notes sur Gauthey, et auxquelles il a renoncé en 1819 et 1826.

1813. *Sur les constructions en pierre perdue*, Mémoire présenté. Ce même sujet se trouve au tome II de Gauthey, p. 272.

1816. *Note sur la vis* d'Archimède (Correspondance de l'École polytechnique, t. III, p. 45).

1816. *Sur les cas* où l'équation déduite du principe des vitesses virtuelles a lieu entre des espaces finis (*Id.* t. III, p. 49).

1818. *Détails historiques sur l'emploi du principe des forces vives* pour les machines, etc. (Annales de chimie et de physique, t. IX, p. 146).

Petit venait, aux mêmes Annales (septembre 1818), de faire revivre en quelque sorte cet emploi; Navier, en le citant, rappelle que le principe des forces vives, découvert par Huygens, généralisé par Jean Bernouilli (OEuvres, t. III, p. 36), et si habilement appliqué à l'écoulement de l'eau par Daniel Bernouilli, avait été, depuis l'*Hydrodynamica*, entièrement négligé par les auteurs d'ouvrages de mécanique pratique, et même longtemps par les savants eux-mêmes. On sait en effet que d'Alembert reprochait à D. Bernouilli d'en avoir fait usage, le regardant comme *peu exact;* qu'Euler ne l'a pas employé, ce qui rend très-compliqués ses calculs sur les roues à réaction; et que Lagrange, dans sa Mécanique analytique, ne lui a donné qu'un

énoncé restrictif et peu propre à en faire tirer parti, bien que Jean Bernoulli (t. III, 239) eût entendu dans un sens plus large la *conservation des forces vives* puisqu'il ajoutait constamment, à celles qui sont actuellement possédées, celles qui sont en quelque sorte en puissance et qui s'évaluent (par exemple pour un ressort tendu) par des sommes de produits de forces et d'espaces susceptibles d'être parcourus suivant leurs directions jusqu'à ce que ces forces s'annulent [1].

Navier montre le haut degré de simplicité et de clarté que l'emploi du principe des forces vives apporte au contraire aux solutions du plus grand nombre des problèmes de mécanique; et comment on évalue, avec Borda, la force vive employée à produire ce *mouvement intestin* signalé par D. Bernouilli et qui est *perdue* pour le mouvement progressif lorsque la vitesse d'un fluide diminue brusquement; évaluation confirmée par des expériences, et adoptée par Coulomb, Carnot, Lagrange, au lieu de celle de D. Bernoulli et de Bossut.

Et il a, l'année suivante (voy. ci-après), rendu tout à fait usuel l'emploi de ce principe en transformant son énoncé, au moyen de l'introduction de la *quantité d'action*, expression de Coulomb à laquelle Coriolis a substitué celle de *travail*.

Grâce à cet éminent service, et à ce qu'on met aujourd'hui les actions moléculaires au nombre de celles dont on fait entrer le travail en considération, le principe des forces vives ou de la transmission du travail s'énonce clairement, sans restrictions relatives aux liaisons, etc., et s'enseigne aujourd'hui dans toutes les écoles industrielles.

1818. *Sur les roues à élever l'eau*. Mémoire présenté le 2 novembre et resté inédit, bien qu'un rapport de M. Girard (Institut, partie historique) en ait fait voter l'insertion aux *Savants étrangers*. Ses diverses parties ont été reproduites dans les notes sur l'architecture hydraulique de Belidor, et dans le 3e partie du Cours fait à l'École des ponts et chaussées.

---

[1] Voyez Appendice complémentaire ci-après, p. 786.

1818. *Note sur l'action mécanique des combustibles* (Ann. de ch. et de ph., t. XVII, 1821, p. 357). Considérations reproduites à la 3e partie du Cours.

1819. *Examen de la tontine perpétuelle* autorisée le 10 mai 1819 (brochure in-8° de 40 pages).

Navier prouve avec beaucoup de clarté que cet établissement serait sujet aux inconvénients les plus graves. Ses avantages pour les actionnaires sont illusoires d'ailleurs comme le démontre un calcul fondé sur les méthodes de la théorie analytique des probabilités pour l'évaluation des fonctions composées de produits dont les facteurs sont de très-grands nombres.

1819. *Architecture hydraulique de Belidor;* nouvelle édition avec des notes et additions.

On a reproché à Navier cette publication d'un véritable traité de mécanique, sous la forme de notes et corrections à un ouvrage ancien et volumineux.

Mais, ainsi que l'exprime le rapport fait à l'Académie par Poisson, Girard, Fourier et de Prony, Belidor, estimé et recherché par les ingénieurs, devait être réimprimé, et rien ne sent moins l'esprit de spéculation que ces notes si parfaites et si consciencieuses qui, partout, révèlent un ardent désir d'être utile à la science et à l'art.

Plusieurs de ces notes sont des chefs-d'œuvre, et leur publication a signalé l'apparition d'une ère nouvelle où la mécanique pratique se fonde désormais sur des principes certains. Et cette heureuse révolution devait être prompte, car, avec Navier, elle a eu pour promoteurs Coriolis et M. Poncelet.

Citons surtout l'*Addition* (liv. I, p. 376) *Sur les principes du calcul et de l'établissement des machines et sur les moteurs.* C'est là qu'après avoir fait voir que leur *travail* peut toujours être évalué en $k \times mè$, ou en produits d'un poids par une hauteur, sorte de *monnaie mécanique*, Navier remarque que les produits de ce genre ne sont autre chose que ceux qu'il a introduits (p. 106) sous le nom de *quantité d'action* dans l'énoncé du principe des forces vives (voy. ci-dessus); et ce principe est ainsi rendu, d'une manière incomparablement plus claire qu'on

n'avait encore fait, le véritable instrument des calculs relatifs aux machines. La masse de celles-ci est sans influence quand leur mouvement se règle par l'uniformité, mais non pas quand il se règle par la périodicité; d'où l'emploi des volants, dont Navier apprend pour la première fois à calculer les dimensions, et qui, comme il le remarque, ne dispensent pas d'employer, dans certains cas, des régulateurs ou modérateurs dont il donne aussi la théorie.

Un peu plus loin, une discussion judicieuse lui fournit, pour les moteurs animés, une table des quantités moyennes d'action ou de travail, que tous les auteurs reproduisent encore aujourd'hui.

Puis il donne, du calcul des roues hydrauliques et des machines à moudre, à forer, à scier, à épuiser ou élever l'eau, de nombreux exemples qui ont servi de modèles. Il y fait aussi la première distinction nette des orifices évasés et non évasés quant à la dépense de l'eau.

On y trouve aussi (note de la page 76) la première théorie à peu près exacte du choc, fondée sur ce que les corps se composent (comme il dit dès l'*avertissement*, p. xi) de parties qui ne se touchent pas, etc., bien que, dans toutes ses autres notes, la mécanique soit présentée dans l'esprit ancien qui substituait des abstractions aux réalités physiques.

1819. *Sur la flexion des lames élastiques;* mémoire présenté le 29 novembre, et inédit, bien qu'approuvé pour être inséré aux *Savants étrangers*, sur le rapport de Prony (Ann. de ch. et de ph., 1820, et partie historique du tome IV de l'Institut).

Dans ce mémoire, Navier part de l'hypothèse, depuis confirmée, de Jacques Bernouilli, consistant à faire le moment de la résistance à la flexion proportionnel à l'inverse du rayon de la courbure supposée très-petite prise par la lame.

Voyez le n° X de notre historique ci-après.

1819-1820. Sommaire (lithographié) des premières *Leçons de mécanique appliquée* données à l'École des ponts et chaussées.

1re partie. Applications qui dépendent de la considération

des corps dans l'état d'équilibre. Résistance des solides. Massifs. Revêtements. Voûtes. Charpentes.

Objets accessoires. De l'usage des instruments géodésiques et autres, considérés sous le rapport de la précision des résultats. Expression de la probabilité d'une erreur sur le résultat moyen. De la meilleure méthode pour le corriger.

2e partie. Applications qui dépendent de la considération des corps dans l'état de mouvement. Hydrodynamique. Vases. Tuyaux. Canaux. Choc des solides. Résistance des fluides.

Sur la théorie de la chaleur.

3e partie. Des machines.

Déjà il disait : leur théorie emprunte ses éléments, 1° à la Géométrie; 2° à la Physique; 3° à la Mécanique. Ainsi il séparait déjà ce que, depuis, Ampère a appelé la *cinématique*.

Sous le titre : De la manière de disposer les roues, pignons, cames, etc., pour que les axes supportent les moindres efforts qu'il est possible, il donne des conseils nouveaux dont l'observation peut avoir une grande influence sur le succès des mécanismes.

Objets accessoires. De l'éclairage, appliqué aux phares surtout.

1820. *Sur la variation de la température* qui accompagne les changements de volume des gaz (Bulletin de la Société philomathique, 1820, p. 97).

1820. *Mémoire sur la flexion des plans élastiques*, présenté à l'Académie le 14 août, et note explicative remise quelques mois après aux commissaires MM. de Prony, Poisson, Fourier, Cauchy. Il en a été tiré quelques copies lithographiées.

1823. *Extrait des recherches sur la flexion des plans élastiques* (Soc. philom., juin et juillet 1823, p. 92). — Observations à l'occasion d'un mémoire de M. Cauchy (Soc. philom., juin et juillet 1823, p. 36).

Ce mémoire du 14 août 1820, connu seulement par l'extrait de 1823, intéresse fortement l'histoire de la théorie générale de l'élasticité des solides, parce qu'il a été l'occasion des impor-

tants travaux par lesquels Navier et Cauchy en ont posé les bases; et il contient, à la fin, des résultats pratiques importants.

(Voir notre *Historique* ci-après, nos XXII, XXIX et LIX.)

1821. *Note sur le nivellement barométrique* (Ann. de ch. et de ph., t. XIX, p. 60). Navier observe que lorsque la valeur d'un résultat se déduit d'une expression U contenant plusieurs éléments $x, y, \ldots$ fournis par l'observation avec des erreurs Δx, $\Delta y, \ldots$, son erreur relative totale est $\frac{1}{U}\left(\frac{dU}{dx}\Delta x + \frac{dU}{dy}\Delta y + \ldots\right)$. Il en déduit plusieurs conséquences en considérant la température, l'observation du baromètre, etc.

1821. *Mémoire* (du 14 mai) *sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques.*

Renvoyé à MM. de Prony, Poisson et Fourier, il n'a pas été l'objet d'un rapport. Mais, après l'admission de Navier à l'Académie (1824), il a été imprimé au t. VII des Mémoires de l'Institut.

Un extrait avait paru aux Annales de chimie et de physique; un autre extrait, plus étendu, au Bulletin de la Société philomathique, 1823, p. 177.

Ce beau mémoire fait époque, car il a fondé la mécanique moléculaire ou la théorie générale de l'élasticité, développée presque immédiatement après par Cauchy, Poisson et MM. Lamé et Clapeyron.

Voyez l'*Historique* ci-après, n° XXIII.

1822. *Mémoire* (du 16 décembre) *sur le mouvement des fluides* en ayant égard à l'adhésion des molécules. Imprimé au t. VI (1826) des Mémoires de l'Institut.

Un extrait en avait paru aux Ann. de ch. et de ph., t. XIX, 1821, p. 244, et deux autres, plus étendus, au Bulletin de la Soc. philom., 1822, p. 75, et 1825, p. 49, et un autre au Bulletin Ferussac, t. V, n° 214.

Déjà, le 18 mars 1821, ou avant la présentation du mémoire sur les solides élastiques, Navier avait fait à l'Académie une communication sur ce sujet. Il y donnait les trois équations

d'équilibre *indéfinies* ou applicables à tous les points de la masse fluide; les cinq termes différentiels du second ordre qui sont affectés de la constante qu'on peut appeler le coefficient du frottement du fluide, sont exactement les mêmes que les termes du même ordre entrant dans les équations de l'équilibre des solides, sauf les trois projections des vitesses des points du fluide au lieu des trois projections des déplacements des points du solide sur les axes coordonnés; mais l'équation de *continuité*, exprimant la permanence du volume de chaque élément du liquide, réduit ces cinq termes à trois.

Le beau mémoire de l'année suivante (16 décembre 1822) ne fait qu'ajouter, avec diverses applications autrement traitées, l'établissement, par la méthode de la Mécanique analytique de Lagrange, des trois équations *définies* ou à la paroi. Les valeurs des *pressions* non normales qui en ressortent sont aussi de même forme que celles qui sont relatives aux solides, sauf les vitesses au lieu des petits déplacements.

Navier base en effet l'établissement de ces diverses équations sur une supposition analogue à celle qu'il a faite pour les solides, et consistant en ce que les répulsions et attractions qui s'exercent à des distances insensibles soit entre les molécules du fluide soit avec celles des parois solides qui les contiennent, sont augmentées, dans l'état de mouvement, de quantités proportionnelles aux vitesses relatives avec lesquelles elles s'approchent ou s'éloignent les unes des autres; car, dit-il, deux molécules voisines sont dans le même cas que s'il existait entre elles un ressort tendu; si elles se rapprochent ou s'éloignent, le ressort se contracte davantage dans le premier cas et moins dans le second; et, comme les molécules très-voisines n'auront jamais que des vitesses extrêmement petites relativement l'une à l'autre, on peut, quelle que soit la fonction, la supposer proportionnelle à cette vitesse.

Poisson (Journal de l'École polytechnique, 20e cahier, p. 152), Cauchy (Exercices 3e année, mouvement intérieur des corps dénués d'élasticité) et M. Stokes (Voy. ci-après 5e appendice, p. 733) sont arrivés, depuis, aux mêmes équations par des considérations qui ne diffèrent pas quant au fond de celles de Navier.

Et, probablement, toute théorie qui supposera des mouvements variant graduellement et régulièrement d'un point à l'autre d'un fluide, conduira aux mêmes équations [voyez note (6) p. 734, même § 73 du 5e Appendice].

Elles ne supposent, au reste, aucune *adhésion entre les molécules* du fluide, ou aucune *viscosité*. Les gaz ont un frottement tout aussi fort que celui des liquides.

De l'hypothèse qui y conduit, il doit en effet résulter nécessairement un frottement des couches fluides soit contre d'autres couches, soit contre les parois, proportionnel à la première puissance de leurs vitesses relatives, ainsi que l'avait supposé Newton pour le fluide des tourbillons (Principes, livre 2e, section 9e et dernière, hypothèse et proposition LI). C'est en effet ce qui a lieu dans des mouvements très-lents, comme l'a reconnu Coulomb (t. VI des Mém. de l'Ac. des sc. de l'Institut), et dans des écoulements très-réguliers et *linéaires* comme a dit Girard, c'est-à-dire où les molécules voisines décrivent des lignes sensiblement parallèles entre elles, ainsi qu'elles font dans ses expériences sur l'écoulement des liquides à travers des tubes capillaires à paroi très-polie, dont l'entrée était convenablement évasée.

Il n'en est plus de même dès que les parois offrent des rugosités, ou seulement dès qu'il y a, à l'entrée des tubes, une contraction produisant des tourbillonnements qui se propagent d'un bout à l'autre comme l'a remarqué le même expérimentateur. Aussi Navier reconnaît que ses équations, qui font si bien ressortir l'existence nécessaire d'un frottement et de pressions inégales en divers sens quand le fluide se meut, ne sont point applicables aux mouvements, le plus souvent considérés, de l'eau dans les tuyaux non capillaires ou dans les canaux naturels ou artificiels, où se forment une foule de mouvements obliques ou de tournoiements, etc., produisant des *pertes de force vive translatoire* et dont on ne peut tenir compte que par des termes proportionnels aux carrés des vitesses, évalués empiriquement jusqu'ici, et dont les coefficients croissent avec les rugosités comme le prouvent les expériences récentes de Darcy et de M. Bazin.

1822. *Deuxième partie* (hydraulique) *des leçons faites à l'École des ponts et chaussées.* — Autographiée.

1830. *Même partie*, corrigée et augmentée.
(Voir 1838, son impression posthume avec la troisième partie.)

1823. *Notes sur les effets des secousses imprimées à un poids* suspendu à des fils ou à des verges élastiques (Bulletin de la Société philomatique, mai 1823, p. 73).

Il suppose négligeable, dans cette note, la masse du fil ou de la verge, dont il tient très-bien compte à l'ouvrage suivant.

1823. *Rapport* (18 septembre) *et Mémoire sur les ponts suspendus.* In-4°. Imprimerie royale.

1827. De l'entreprise du pont des Invalides. In-8°, 28 pages.

1830. Rapport et Mémoire, etc., 2e édition; augmenté de cet opuscule De l'entreprise, etc., de 1827 ; d'une Notice sur le pont des Invalides, et du détail des épreuves de simple traction, et aussi de percussion longitudinale auxquelles les fers ont été soumis.

L'ouvrage dont nous parlons, composé à la suite d'une mission en Angleterre donnée en 1821 par M. Becquey, directeur général des ponts et chaussées, était peut-être, de tous ceux de Navier, le plus capable de lui faire honneur. Mais il en a recueilli d'amers chagrins qui, sans doute, ont abrégé sa vie.

Il était impossible de traiter plus complétement un sujet difficile, de mettre avec plus de sagacité, de dévouement, de bon esprit, la plus haute science et des notions plus saines et plus complètes au service de la pratique et de l'utilité générale. « Grâces aux recherches de M. Navier » (dit M. Ch. Dupin à la fin du rapport fait à l'Académie le 29 septembre 1823), « la France, « entrée la dernière dans un nouveau genre de construction, se « placera tout à coup au premier rang. »

Mais, au lieu de se borner à conseiller les autres, à leur dicter des règles rationnelles et des principes certains qu'ils n'eussent plus qu'à appliquer en les combinant au besoin avec quelques

éléments nouveaux que les cas particuliers révèlent, et que le sentiment évalue à défaut du calcul, Navier voulut joindre l'exemple au précepte et offrir un spécimen des plus apparents, dont le succès eût forcé toutes les convictions, et eût été pour lui ou plutôt pour les études théorico-pratiques auxquelles il s'était voué, le plus beau des triomphes.

Il choisit pour théâtre une localité où les considérations administratives, les convenances étrangères à l'art, l'opinion capricieuse, les influences diverses, disputent inévitablement à l'utilité publique la décision des mesures, et où une administration éclairée et bien intentionnée a toutes les peines du monde à faire prévaloir ce qu'il y a de mieux.

Le beau projet du pont des Invalides, à Paris, avait été approuvé, malgré les oppositions suscitées par le choix de son emplacement. Le système d'exécution par compagnie d'actionnaires, nouvellement préconisé en principe, avait été adopté malgré les raisons exceptionnelles qui eussent milité pour l'exécution par l'État. Tout, dans les diverses parties de ce projet, avait été prévu, pesé, rigoureusement calculé, tout..... excepté (disons-le) un seul point peut-être, la résistance, dans le sens horizontal, des massifs sur lesquels les chaînes de retenue, après avoir passé sur les colonnes, venaient s'appuyer et se courber circulairement pour changer une seconde fois de direction et se plonger verticalement dans des puits, au fond desquels elles étaient solidement amarrées.

Il suffit en effet de jeter les yeux sur les figures 1, planche XII (pont des Invalides), et 2, planche XI, pour soupçonner un oubli, celui de l'influence du *frottement* des chaînes sur la *direction que doit prendre la résultante* de leurs deux tensions avant et après ce changement de direction; car il semble que Navier supposait que cette résultante diviserait en deux parties égales l'angle des deux directions antérieure et finale comme si ces tensions eussent été d'égale intensité. Or elles devaient différer entre elles de tout le frottement qui a lieu sur les pièces cylindriques de fonte le long desquelles la chaîne s'applique avant de se terminer verticalement.

C'est ce que Navier avait très-bien remarqué à l'article 161, qui renvoie à l'article 130 de son même Mémoire pour le calcul

du frottement, exprimé, comme on sait, par une exponentielle, et d'une intensité considérable pour toute chaîne ou corde plus ou moins enroulée sur un corps immobile. Il conseille sagement et prudemment *de ne pas compter* sur ce frottement pour diminuer la force de l'amarre finale. Mais la même prudence devait engager à *le compter* au contraire, et *au maximum*, pour déterminer la direction de la résultante, car il la rapproche de l'horizontale, et c'était, ainsi, dans une direction peu inclinée sur l'horizon qu'il fallait faire opposer par le massif une grande résistance.

Ce point trop faible fléchit donc, et un léger mouvement s'y manifesta au moment où l'on démolit le pont de service et l'échafaudage.

L'histoire des constructions offre une foule d'exemples de pareils accidents, car, sans parler du dôme de Saint-Pierre de Rome, des supports de Sainte-Geneviève à Paris, de la digue de Cherbourg, etc., il y en a mille dont on entend à peine parler et qui (comme dit Navier dans sa brochure de 1827), loin d'entraîner la renonciation au projet, sont aussitôt réparés qu'aperçus. Celui des massifs du pont des Invalides était des plus facilement réparables; il suffisait de cent ou deux cents mètres cubes de maçonnerie de moellons, c'est-à-dire d'une augmentation d'un à deux pour cent sur la dépense totale, pour faire cesser tout mouvement.

Mais on était à Paris dans le quartier de prédilection des curieux. Un apitoiement indiscret sur l'anxiété de Navier avait été exprimé, le jour même, dans les conversations de l'Institut par un imprudent ami. Les intérêts d'une compagnie financière se trouvaient en jeu. La saison avançait et il fallait débarrasser la rivière de tout échafaudage, ce qui entraînait le démontage complet du pont que l'échafaudage soutenait. L'administration municipale de Paris n'avait accepté que comme contrainte un emplacement qu'elle avait toujours désapprouvé.

On renonça donc à cet emplacement ainsi qu'au projet-spécimen et grandiose d'une seule travée de 160 mètres. Navier, par un sentiment de délicatesse, ne le défendit que tardivement, de peur de déterminer une décision trop contraire aux intérêts de la compagnie, à qui l'on voulait refuser d'abord tout dédom-

éléments nouveaux que les cas particuliers révèlent, et que le sentiment évalue à défaut du calcul, Navier voulut joindre l'exemple au précepte et offrir un spécimen des plus apparents, dont le succès eût forcé toutes les convictions, et eût été pour lui ou plutôt pour les études théorico-pratiques auxquelles il s'était voué, le plus beau des triomphes.

Il choisit pour théâtre une localité où les considérations administratives, les convenances étrangères à l'art, l'opinion capricieuse, les influences diverses, disputent inévitablement à l'utilité publique la décision des mesures, et où une administration éclairée et bien intentionnée a toutes les peines du monde à faire prévaloir ce qu'il y a de mieux.

Le beau projet du pont des Invalides, à Paris, avait été approuvé, malgré les oppositions suscitées par le choix de son emplacement. Le système d'exécution par compagnie d'actionnaires, nouvellement préconisé en principe, avait été adopté malgré les raisons exceptionnelles qui eussent milité pour l'exécution par l'État. Tout, dans les diverses parties de ce projet, avait été prévu, pesé, rigoureusement calculé, tout..... excepté (disons-le) un seul point peut-être, la résistance, dans le sens horizontal, des massifs sur lesquels les chaînes de retenue, après avoir passé sur les colonnes, venaient s'appuyer et se courber circulairement pour changer une seconde fois de direction et se plonger verticalement dans des puits, au fond desquels elles étaient solidement amarrées.

Il suffit en effet de jeter les yeux sur les figures 1, planche XII (pont des Invalides), et 2, planche XI, pour soupçonner un oubli, celui de l'influence du *frottement* des chaînes sur la *direction que doit prendre la résultante* de leurs deux tensions avant et après ce changement de direction; car il semble que Navier supposait que cette résultante diviserait en deux parties égales l'angle des deux directions antérieure et finale comme si ces tensions eussent été d'égale intensité. Or elles devaient différer entre elles de tout le frottement qui a lieu sur les pièces cylindriques de fonte le long desquelles la chaîne s'applique avant de se terminer verticalement.

C'est ce que Navier avait très-bien remarqué à l'article 161, qui renvoie à l'article 130 de son même Mémoire pour le calcul

du frottement, exprimé, comme on sait, par une exponentielle, et d'une intensité considérable pour toute chaîne ou corde plus ou moins enroulée sur un corps immobile. Il conseille sagement et prudemment *de ne pas compter* sur ce frottement pour diminuer la force de l'amarre finale. Mais la même prudence devait engager à *le compter* au contraire, et *au maximum*, pour déterminer la direction de la résultante, car il la rapproche de l'horizontale, et c'était, ainsi, dans une direction peu inclinée sur l'horizon qu'il fallait faire opposer par le massif une grande résistance.

Ce point trop faible fléchit donc, et un léger mouvement s'y manifesta au moment où l'on démolit le pont de service et l'échafaudage.

L'histoire des constructions offre une foule d'exemples de pareils accidents, car, sans parler du dôme de Saint-Pierre de Rome, des supports de Sainte-Geneviève à Paris, de la digue de Cherbourg, etc., il y en a mille dont on entend à peine parler et qui (comme dit Navier dans sa brochure de 1827), loin d'entraîner la renonciation au projet, sont aussitôt réparés qu'aperçus. Celui des massifs du pont des Invalides était des plus facilement réparables; il suffisait de cent ou deux cents mètres cubes de maçonnerie de moellons, c'est-à-dire d'une augmentation d'un à deux pour cent sur la dépense totale, pour faire cesser tout mouvement.

Mais on était à Paris dans le quartier de prédilection des curieux. Un apitoiement indiscret sur l'anxiété de Navier avait été exprimé, le jour même, dans les conversations de l'Institut par un imprudent ami. Les intérêts d'une compagnie financière se trouvaient en jeu. La saison avançait et il fallait débarrasser la rivière de tout échafaudage, ce qui entraînait le démontage complet du pont que l'échafaudage soutenait. L'administration municipale de Paris n'avait accepté que comme contrainte un emplacement qu'elle avait toujours désapprouvé.

On renonça donc à cet emplacement ainsi qu'au projet-spécimen et grandiose d'une seule travée de 160 mètres. Navier, par un sentiment de délicatesse, ne le défendit que tardivement, de peur de déterminer une décision trop contraire aux intérêts de la compagnie, à qui l'on voulait refuser d'abord tout dédom-

magement, et qu'il avait été question de rendre responsable de l'incident, et du retard d'une année qui en était la suite. Il fut donc décidé, malgré sa réclamation, que le pont serait reporté à 200 mètres plus en aval, au débouché de l'allée d'Antin ; qu'au lieu d'avoir un caractère monumental, il se composerait de trois travées, suivant le projet d'autres ingénieurs; que la compagnie, en indemnité de ses maçonneries perdues, etc., aurait aussi, avec une somme en argent, la concession de deux autres ponts sans concurrence ni rabais (ceux de la Grève et de l'Archevêché).

A cette époque surgissait déjà l'esprit de dénigrement, non pas seulement des savants, mais de la science, flétrie sous le nom de pure *théorie* opposée à la *pratique* dès lors exclusivement exaltée dans ce qu'elle a de plus matériel, et à laquelle on prétendait que les hautes mathématiques ne pouvaient servir en rien, comme si, en fait de résultats de calculs, il y avait lieu de faire une distinction entre les procédés plus ou moins élémentaires ou transcendants qui y ont conduit d'une manière également logique. Des savants se faisaient les complices ou les échos de ces critiques de l'ignorance. Navier, académicien des plus éminents et des plus utiles, sans cesse mis à contribution, et auteur de nombreux rapports frappés au coin de la sagacité et du bon sens, fut néanmoins, dès lors, à peine compris de la plupart de ses confrères. Il en fut, heureusement, dédommagé et distrait, en 1830, par la chaire d'Analyse et de Mécanique de l'École polytechnique, qui l'occupa beaucoup, et dont les élèves l'apprécièrent et l'admirèrent avec une sorte de passion.

Dans sa défense (brochure de 1827), il prononça ces nobles paroles : « On me dira sans doute : puisque vous ne pouviez apprécier avec une certitude absolue la résistance d'une certaine partie de votre construction, vous auriez dû en augmenter la masse de manière à vous mettre à l'abri de toute crainte. — Je réponds qu'en agir ainsi c'eût été suivre un système d'après lequel l'artiste, sacrifiant toute idée d'économie à sa réputation, outre aveuglément toutes les dimensions de son ouvrage. Ce système peut avoir des avantages, surtout pour ceux qui l'emploient, mais il a donné lieu souvent à bien des dépenses excessives et inutiles, il a excité les plaintes et les réclamations du pu-

blic, et un véritable ingénieur n'en fera jamais la règle de sa conduite..... Il pourra errer.....; mais, en général, il en coûtera moins pour réparer son erreur que pour procurer à tout l'ouvrage une force superflue. »

Le mémoire de Navier sur les ponts suspendus n'en demeure pas moins, sauf l'omission signalée portant sur un point délicat, mais essentiel, un Traité complet et classique pour son époque, et qui, devançant même l'avenir par la profondeur des recherches, sera probablement toujours consulté.

Pour ne parler que de ce qui se rattache le plus à notre sujet, le calcul des oscillations imprimées par la chute d'un corps pesant, soit à une tige verticale frappée à son extrémité inférieure, soit à une chaîne dont cette secousse déforme la courbe et change en même temps la longueur par une extension qui se propage d'un bout à l'autre, seront toujours cités comme des modèles de l'application de la haute analyse à une branche importante et encore peu étudiée de la résistance des constructions, considérées presque exclusivement jusqu'à nos jours dans l'état statique.

(Voyez notre *Historique* ci-après, n° LV.)

1824. *Troisième partie* (*Machines*) des leçons faites à l'École des ponts et chaussées. Autographiée.

1830. Même partie, refondue et augmentée. (Voy. 1838, son impression posthume avec la deuxième partie.)

1825. Note *sur les questions de statique dans lesquelles on considère un corps supporté par un nombre de points d'appui dépassant trois* (Société philomatique 1825, p. 35, et Bulletin Férussac, t. V, n° 100). — Pour la première fois (voir l'*Historique*, fin du n° XI) Navier a donné la vraie solution de ces sortes de problèmes, dont l'indétermination apparente, qui en faisait des énigmes sans mot, tient aux principes de la statique des corps supposés rigides, et cesse en remarquant que, dans la réalité, ces corps, et même leurs appuis, sont élastiques.

1825. *Sur le calcul des conditions d'inégalité.* (Même Bulletin, p. 66 et 81.) Navier développe les principes de ce genre de cal-

cul, dû à Fourier, et dont l'emploi, par son illustre inventeur, au problème dont nous venons de parler (d'un corps porté par plus de trois appuis), a constitué la dernière tentative des géomètres pour en donner une solution sans sortir de la statique élémentaire qui raisonne sur des abstractions. Cette solution fournit le plus grand poids dont on puisse charger le corps rigide, en un point donné, sans qu'aucun des appuis supporte une charge plus grande que celle sous laquelle chacun romprait, et qui est supposée connue. Navier montre qu'elle ne donne qu'*un maximum* qu'on ne doit point dépasser.

1825. *Flexion des verges courbes.* (*Idem*, p. 98 et 114; et Bulletin Férussac, t. V n° 24.) Cet article en deux parties est extrait du Mémoire sur les lames élastiques, présenté le 29 novembre 1819.

1825. *Solution de diverses questions relatives au mouvement de vibration des corps solides* (Société philom. 1825, p. 178). 1° Mouvement de deux corps unis par une verge élastique sans masse. 2° Choc, contre un point fixe, d'une verge élastique qui se meut longitudinalement, et dont on connaît la masse. 3° Vibrations de cette verge rectiligne pour un état initial donné. 4° *Idem* si la longueur de la verge est infinie. Application au cas où il n'y a de déplacement initial que sur une étendue très-petite.

Les trois dernières solutions, où l'inertie de la verge est prise en considération ainsi que la succession de l'entrée en mouvement de ses diverses tranches, sont d'accord avec ce qu'on trouve à la 2e édition de la Mécanique de Poisson, éditée seulement en 1833 (1).

1825. *Appareil pour essayer la force des chaînes* du pont des

(1) On trouve au *Bulletin de la Société philomatique* de 1826, page 180, une Note de Cauchy, du 19 février 1827, sur le choc longitudinal de deux barres élastiques ayant des longueurs inégales, et où ce Géomètre énonce, sans indiquer son mode de calcul, des résultats remarquables, qui ont été cités par Coriolis à son ouvrage *Du Calcul des effets des machines*, mais qui paraissent avoir besoin d'être confirmés.

Invalides (*idem*, p. 163, avec planche). Cet appareil est un levier horizontal. Pour éviter l'inclinaison qu'il prendrait par suite de l'allongement du chaînon en essai, et le frottement qui serait considérable sur un axe de rotation fixe, Navier donne à ce levier de deuxième espèce un point d'appui mobile, portant de bas en haut, par l'intermédiaire d'une courte tige verticale, sur un second levier, qui est de troisième espèce, et qu'on maintient à peu près horizontal au moyen d'une charge suffisante placée à l'extrémité opposée.

1826. *Résumé des leçons données à l'École royale des ponts et chaussées* sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines. Première partie, sur la résistance des matériaux et sur l'établissement des constructions en terre, en maçonnerie et en charpente.

1833. Deuxième édition. (Elle a été traduite en italien par M. d'Andrea, professeur à l'École militaire de Naples, avec diverses additions.)

C'est l'ouvrage dont nous rééditons la première section.

Il s'y trouvait, à l'époque où il a paru (1824 pour la distribution en feuilles aux élèves, et 1826 pour la mise en vente), un grand nombre de choses dues à Navier. Nous mentionnons, aux nos X, XI, XV et XVII de notre *Historique* ci-après, celles qui sont relatives aux pièces solides et à leurs assemblages.

On y trouve aussi, avec la citation de toutes les expériences connues, un choix judicieux (article VII, intitulé : *Des plus grands efforts*, etc.) des coefficients numériques de cohésion permanente, auxquels les professeurs et les auteurs de traités n'ont presque rien changé depuis. — D'importants perfectionnements à la théorie des voûtes. — La détermination de la stabilité des murs de soutenement et des pieds-droits des voûtes, en ayant égard à la possibilité, non encore remarquée, de disjonctions dans ces massifs de maçonnerie, qu'on regardait auparavant comme des corps d'une seule pièce. — La prise en considération de la possibilité de leur écrasement, quand la résultante des efforts, sans tendre au renversement, passe trop près de l'axe de rotation. — Celle de l'inégale répartition des efforts sur

pressions, d'une formule basée sur la supposition que la densité est celle d'amont et la pression celle d'aval comme pour un liquide ou comme dans la formule de Bernoulli, en corrigeant les résultats par un coefficient un peu variable.

1828. *Rapport* (du 29 septembre) *sur un mémoire de MM. Lamé et Clapeyron* concernant l'équilibre intérieur des solides homogènes. (Journal de mathématiques de Crelle, t. VII, p. 145. Voir l'*Historique*, n° XXX.)

1829. *Rapport verbal à l'Académie sur les études relatives à l'art des constructions* de M. l'inspecteur général Bruyère. (Journal du génie civil, t. III, p. 602.)

Ce rapport, élégamment écrit, et où Navier faisait ressortir l'éminent mérite des œuvres de l'ingénieur pour lequel il avait le plus d'admiration, contient ce passage dont peuvent profiter tous ceux qui s'occupent de constructions :

« Combiner la disposition d'un édifice, ne fut-ce que la maison d'un simple particulier est une occupation intéressante. Les recherches qu'elle exige ne comportent point les déductions rigoureuses qui appartiennent peut-être exclusivement aux sciences mathématiques et dans lesquelles il s'agit toujours de parvenir à une vérité unique et subsistante quoique inconnue. La multiplicité des solutions, les nombreux essais auxquels il faut se livrer pour remplir de mieux en mieux des conditions reconnues et fixées d'avance forment une sorte de jeu piquant qui éveille et soutient l'attention. *L'architecte procède toujours par une méthode à laquelle on est également obligé de recourir quelquefois dans les sciences exactes*, LA MÉTHODE DE FAUSSE POSITION [1]. Il essaie successivement diverses combinaisons et ne se lasse point jusqu'à ce qu'il arrive au terme où l'esprit et le goût sont satisfaits, et ils le seront presque toujours en même temps s'il est vrai que la beauté dans son art consiste surtout dans l'exact accomplissement des convenances de toute espèce. »

---

(1) Voyez ci-après § 34 de la note du n° 156, p. 318-322.

1829. *Rapport sur un nouveau système de barrage, présenté par M. Sartoris* pour faciliter la navigation des rivières. (Journal du génie civil, t. II, p. 147.) Ce système consiste en un bateau servant de vanne et s'appuyant au moyen de roulettes contre les bajoyers. Plus l'eau s'élève en amont plus le bateau est soulevé et l'orifice est agrandi.

Ce rapport est très-lumineux comme tous ceux de Navier, et les conclusions en sont sages.

1829. *Rapport sur la pompe à comprimer l'air, de M. Thilorier*, fait à l'Académie au nom d'une commission chargée de décerner le prix Monthyon. (Journal du génie civil, t. IV, p. 424.) — L'air, à mesure qu'il se comprime, passe successivement sous trois pistons dont les diamètres décroissent progressivement, ce qui diminue les mouvements inutiles ou sans travail opéré. Lorsque des travaux sont opérés par l'homme ou les animaux, c'est (dit judicieusement le rapport) à proprement parler leur temps et surtout leur fatigue qu'il faut payer, et il est aujourd'hui bien démontré, contrairement à une hypothèse ingénieuse de D. Bernoulli, que la production d'une même quantité d'action peut causer des degrés de fatigue très-différents : on le concevra sur le champ en se représentant un homme qui emploierait sa journée à agiter ses bras, etc.

On sait que des réflexions semblables ont conduit, quelques années après, M. l'inspecteur général Favier à une méthode à peu près rationnelle d'opérer le tracé des routes.

1829. *Rapport verbal* fait le 2 février, à l'Académie, *sur l'ouvrage de MM. Tourasse et Mellet*, intitulé : « Essai sur les bateaux à vapeur,... sur les bateaux aquamoteurs, etc. » (Journal du génie civil, t. II, p. 571.)

1829. *Rapport sur l'ouvrage* Du Calcul de l'effet des machines de Coriolis. (Journal du génie civil, t. IV, p. 564; et, aussi, en tête de l'ouvrage lui-même.) Toujours prêt à laisser aux autres une large part de mérite, Navier reconnaît que Coriolis avait rédigé déjà en grande partie son ouvrage dix ans avant sa publication, c'est-à-dire dans le temps où il écrivait lui-même les

Notes sur Belidor qui ont appris à faire usage de la même manière du principe des forces vives et du travail.

1829. *Note relative à l'emploi du fer dans les constructions en maçonnerie.* (Journal du Génie civil, t. III.) Navier prouve clairement que les dilatations de ce métal par la chaleur sont sans danger, vu la faculté qu'il possède de s'étendre et de se contracter par la traction et la pression.

1829. *Considérations sur les travaux des routes en Angleterre et les procédés de Mac-Adam.* (Ann. des Ponts et Chaussées, 1831; 2e semestre, p. 132; Journal du Génie civil, 1829, t. II, p. 1.) Cet écrit avait été présenté à M. le Directeur général des Ponts et Chaussées en 1822. Navier, après avoir montré la supériorité de nos routes au point de vue de l'intelligence et de l'exactitude du tracé et de la régularité de la construction, fait ressortir celle des routes anglaises sous le rapport de l'entretien, et l'efficacité des procédés auxquels Mac-Adam a attaché son nom, et dont aucune publication française n'avait encore parlé alors.

Dans sa conclusion il propose, pour les routes de France, les mesures qui ont été adoptées généralement quinze ans plus tard.

1829. *De l'exécution des travaux publics et particulièrement des concessions.* (Journal du Génie civil, t. VIII. 1830, p. 327; Annales des Ponts et Chaussées, 1832, 1er semestre, p. 1.)

Dans cet écrit remarquable, Navier, loin de se laisser entraîner par l'opinion alors régnante, ne craint pas d'exprimer que les péages (hors ceux d'*entretien*) sont bien plus injustes que ne pouvait l'être l'ancienne corvée; qu'ils entravent le développement de la richesse publique, en restreignant singulièrement l'*étendue du marché*, c'est-à-dire l'espace dans lequel chaque producteur peut acheter les matières brutes et vendre les produits fabriqués, et qu'ils rendent ainsi *les canaux à peu près inutiles*, en faisant préférer souvent le roulage, en sorte que leur construction a été une sorte de cercle vicieux. Il se résume ainsi : 1° l'utilité consiste surtout à diminuer la partie des frais de transport à la charge du commerce. 2° Il serait à désirer que la dépense fût imputée sur les impôts publics. 3° Les concessions ne doi-

vent cependant pas être exclues; mais, en les accordant, le gouvernement doit vérifier l'utilité, le taux des péages; on ne peut y satisfaire que par des projets détaillés et une discussion approfondie; on n'y satisfait nullement en mettant les entreprises au rabais par une adjudication publique.

Navier était trop en avance sur les autres pour avoir la satisfaction de voir ses vues adoptées de son vivant.

1830. *Considérations sur les principes de la police du roulage* (br. in-8°, et Journal du Génie civil, t. IX.) Rédigé rapidement à la demande de M. J. Baude, commissaire du gouvernement provisoire près l'Administration. — Il conclut que le tirage, ainsi que la dégradation de routes, augmente dans un bien plus grand rapport que la charge.

1835. *Considérations sur* idem *et sur les travaux d'entretien des routes;* suivies d'un Appendice contenant un extrait d'enquêtes anglaises.

Cet écrit reproduit, avec des développements, un Rapport fait en 1832 par Navier, au nom d'une commission nommée le 31 juillet. De nouveaux éléments acquis depuis, et fondés sur des expériences importantes, ont porté, en 1841, une nouvelle commission à proposer des mesures moins restrictives; et le perfectionnement du mode d'entretien des routes a permis d'aller encore plus loin.

1830. *Rapport sur la Caisse d'épargne et de prévoyance* fondée par ordonnance royale du 25 juillet 1818; lu à la séance publique annuelle des quatre Académies, le 24 avril 1830. (Journal du Génie civil, t. VIII, p. 257.) — Ce rapport, très-remarquable pour le style comme pour le fond, donne l'historique de cette institution en France, et aussi en Angleterre, où elle a contribué avec les associations de secours mutuels (connues chez nous depuis longtemps) également à arrêter l'effrayant progrès annuel de la *taxe des pauvres*, dans laquelle s'est transformée par la force des choses la loi de travail d'Élisabeth, et qui, chez nos voisins, « détruit entièrement, par une contribution forcée, le sentiment de la pitié chez les uns, celui de la

gratitude chez les autres, et rompt ainsi les seuls liens qui puissent unir les classes extrêmes de la société. » Après une foule de considérations aussi sages qu'élevées, on s'étonne de trouver, vers la fin, quelques phrases concédées à l'esprit de l'époque, et hors du sujet à traiter.

1831. *Note sur la flexion d'une pièce courbe* dont la figure *naturelle est circulaire.* (Annales des Ponts et Chaussées, 1831, 1er semestre, p. 428.) Cette solution, donnant d'une manière exacte des résultats un peu différents de ceux qui avaient été obtenus en supposant la figure parabolique, est reproduite à la 2e édition (1833) des Leçons, nos 468 à 482.

1831. *Analyse des Mémoires de M. Girard sur le canal de l'Ourcq*, la distribution de ses eaux, et l'assainissement de Paris. (Annales des Ponts et Chaussées, 1831, 2e semestre, p. 67.)

1831. *Note relative au projet d'un mur de revêtement de l'avant-port de Dieppe.* (*Idem*, 2e semestre p. 349.)

1831. *Note sur le calcul d'une machine à vapeur.* (*Idem* p. 420.)

1832. *Rapport* fait à l'Académie *sur un mémoire de M. Raucourt* (*de Charleville*) *relatif à la mesure de la vitesse des eaux de la Neva.* (Annales des Ponts et Chausséer, 1832, 2e semestre, p. 1; et Journal du Génie civil, t. X, p. 254.)

Dans ce rapport approbatif, Navier fait ressortir l'utilité de la mesure des vitesses en différents points des sections d'eau. Il montre que le résultat des mesurages faits dans la Neva, soit quand sa surface est couverte d'une couche de glace, soit quand elle est découverte et soumise à l'action du vent, soufflant tantôt dans la direction du courant, tantôt dans une direction contraire, sont d'accord avec la théorie, et mettent en évidence l'existence d'une sorte de *frottement* des filets fluides les uns sur les autres, et, aussi, de la part de l'air, d'un frottement considérable, tantôt retardateur, tantôt accélérateur du courant; et il conclut qu'on ne peut se dispenser de tenir compte de la direction et de la vitesse du vent dans un calcul de débit d'un canal à eau courante.

1832. *Rapport sur un mémoire concernant de nouvelles expériences sur le frottement*, présenté à l'Académie le 12 dé-

cembre 1831 par M. Morin. (Annales des Ponts et Chaussées, 1832, 2e semestre, p. 77.)

1833. *Rapport sur de nouvelles expériences.* (*Idem*, 1833, 1er semestre, p. 234.)

1832. *Rapport sur un mémoire de M. Chabrier, concernant les moyens de voyager dans l'air et de s'y diriger*, et contenant une nouvelle théorie des mouvements progressifs. (Mémoires de l'Institut, t. XI, partie historique, p. lxj.)

Ce Rapport, très-détaillé, suivi d'une note et de calculs, contient une *théorie du vol des oiseaux* (1) et de la natation des poissons, et des considérations sur les moyens de diriger les aérostats. Navier détermine quel multiple la vitesse de progression doit être de la vitesse de l'abaissement de l'aile, et il trouve trois fois dans un cas particulier. La fatigue de l'oiseau pour se soutenir est faible en comparaison de sa fatigue pour avancer. Il dépense par seconde, lorsqu'il plane, la *quantité d'action* (ou de travail) nécessaire pour élever son poids à 8 mètres de hauteur. L'homme, d'après son travail continu habituel, s'élèverait de $0^m,086$, ou quatre-vingt douze fois moins qu'il ne faudrait.

Des hommes dans un ballon muni de roues à ailes obliques ne pourraient lutter que contre un vent de $2^m,33^c$ par seconde pour tenir le ballon immobile. On ne pourrait remplacer l'homme par la vapeur, car l'homme est encore aujourd'hui l'agent mécanique qui, à poids égal, est capable de produire le plus grand travail continu. La création d'un art de la navigation aérienne est donc subordonné à la découverte d'un nouveau moteur.

1833. *Notice nécrologique sur M. Bruyère,* inspecteur général des ponts et chaussées.

(Annales des ponts et chaussées, 1833, 2e semestre, p. 382).

---

(1) Ce sujet avait déjà été traité par Parent. *Essais et recherches de mathématiques*, t. III.

1834. *Sur le mouvement uniforme des wagons dans les parties des chemins de fer qui sont tracées en ligne courbe.*
(Ann. des ponts et chaussées, 1834, 2e semestre, p. 357-370.)
Navier calcule le frottement dans plusieurs suppositions.

1835. *Note sur la comparaison des avantages respectifs de deux lignes de chemin de fer, et sur l'emploi des machines locomotives.*
(Ann. des ponts et ch. 1835, 1er semestre, p. 129-179.)
Addition (idem, p. 381-385.)
Navier donne $P(0{,}005\,A \pm H + \mu\, h)$ pour l'expression du travail moteur capable de faire parcourir la distance A et de faire monter ou descendre la hauteur H à un convoi d'un poids P, le dernier terme entre parenthèses étant relatif aux montées non utilisées pour la descente. Puis il examine le mouvement uniforme du convoi sur les diverses pentes, le mouvement varié lors du passage de l'une à l'autre, et, en se servant des seules données alors possédées sur l'effet des locomotives, et qui étaient tirées de l'ouvrage de Wood et Tredgold, il ramène l'appréciation comparative du prix de transport des 1000 kilogrammes à la fixation d'un très-petit nombre d'éléments.

1836. *Nouvelles considérations sur l'emploi des machines locomotives* dans les chemins de fer et sur l'influence des pentes diversement inclinées, relativement à la dépense du transport.
(Ann. des p. et ch., 1836, 1er semestre, p. 1 à 43.)
Aucun savant n'a eu, plus que Navier, le bon esprit de rectifier ses calculs quand on y a signalé quelque erreur, ou quand de nouveaux documents lui ont appris qu'il les avait basés sur des documents incomplets.

Aussi, à l'apparition du *Traité théorique et pratique des machines locomotives,* où M. de Pambour montrait que la pression dans leurs cylindres est très-sensiblement au-dessous de la pression dans leurs chaudières, et indiquait de nouveaux procédés de calcul, Navier s'empressa de refaire les siens, de tenir compte de l'excès de pression nécessaire aussi pour faire écouler la vapeur par la cheminée, et, encore, d'un élément qu'il reconnaît avoir omis dans son Mémoire de 1835, savoir *la résistance de*

l'air qui s'exerce avec d'autant plus d'intensité sur le convoi que la vitesse de celui-ci est plus considérable.

Ce Mémoire a obtenu en 1837, après la mort de Navier, la première grande médaille d'or donnée par les suffrages des ingénieurs au meilleur article envoyé aux *Annales* (en 1835).

1835. *Statistique appliquée à la médecine.* Remarques à l'occasion du Rapport fait à l'Académie, le 5 octobre 1835, sur les recherches statistiques du docteur Civiale. (Comptes rendus des séances, t. Ier, p. 247.)

« Le calcul, » dit Navier, « est employé seulement à déterminer la *probabilité* des conséquences auxquelles les observations ont immédiatement conduit, et à donner de cette probabilité une évaluation plus précise que le raisonnement seul n'aurait pu faire. L'étendue et la difficulté de cette tâche ne doit point effrayer si la vérité en est le prix..... »

1836. *Rapport sur une machine à élever l'eau, de M. Japelli.* (Comptes rendus de l'Académie, 11 janvier 1836, t. II, p. 37, et Annales des ponts et chaussées, 1836, 2e semestre, p. 112.)

1838. Résumé (posthume) des Leçons données à l'École des ponts et chaussées.

Deuxième partie, contenant les Leçons sur le mouvement et la résistance des fluides, et sur la conduite et la distribution des eaux.

Troisième partie, contenant les Leçons sur l'établissement des machines.

C'est la reproduction de feuilles lithographiées vers 1830, que Navier n'a point revues, et dont il aurait sans doute, à l'impression, changé plusieurs parties.

Ainsi, au n° 62, pour *l'écoulement par un déversoir*, en exprimant, conformément à la manière dont il envisageait le principe de la moindre action (invoqué par lui à l'édition autographiée en 1822), que la dépression de l'eau au-dessus de la crête doit être telle que la force vive de la quantité qui y passe dans l'unité de temps soit la plus grande possible, Navier prend pour cette force

vive *celle qui est due à la vitesse moyenne des filets*, évaluée au n° 35 en regardant leurs vitesses individuelles comme dues aux hauteurs du niveau du réservoir au-dessus de chacun. En égalant la différentielle à zéro, il trouve que cette dépression doit être le $\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{21}{5}}-1\right)^2 = 0{,}2753$ de la hauteur du même niveau au-dessus de la crête du déversoir.

Mais Coriolis, M. Belanger, et récemment M. Brashmann (Comptes rendus 16 décembre 1861, p. 1113), ont remarqué qu'il aurait fallu plutôt, à ce point de vue, prendre la somme des forces vives des divers filets. Or on trouve qu'elle est à son maximum quand la dépression *est nulle*, ce qu'il était facile de prévoir. La manière de déterminer théoriquement cette dépression et la dépense par un déversoir est donc encore à trouver; le frottement des filets y a peut-être une grande part, et il ne paraît pas que l'emploi du principe de la moindre action y soit propre.

On peut faire sur les n°s 52, 67, 121, d'autres remarques.

L'évaluation, au n° 119, de l'effet des coudes plus ou moins arrondis des tuyaux, peut être remplacée avantageusement par une autre plus rapprochée de celle de du Buat. (Voy. Comptes rendus, 6 janvier 1862, t. LIV, p. 38.)

Le raisonnement du n° 163, relatif à l'impulsion des fluides sur les corps plongés, est inexact, vu que les filets, en se recourbant à la partie postérieure, exerceraient une action détruisant celle des filets antérieurs, si l'on ne tenait pas compte des frottements et tournoiements, qui jouent ici le rôle capital.

Cette *deuxième partie* n'en renferme pas moins un grand nombre de choses utiles et alors neuves, entre autres l'évaluation des pertes de force vive à la manière de Borda, substituée avec raison à celle de Bernoulli et de Bossut, etc.

La *troisième partie*, concernant l'établissement des machines, est conforme en partie à ce qui se trouve sur le même sujet dans les *Notes sur Belidor* (ci-dessus, 1819), mais augmentée de nombreux calculs, s'étendant à peu près à toutes les machines connues, celles surtout qui servent à élever l'eau, entre les-

quelles on peut distinguer la *pompe spirale*, utile appareil qu'il a tiré d'un injuste oubli.

1840. *Résumé* (posthume) *des Leçons d'analyse données à l'École polytechnique*, suivi de notes par M. Liouville.

Ces Leçons, à la préparation desquelles Navier consacra de longues veilles, furent singulièrement goûtées des élèves, à cause de leur lucidité, de leur élégante simplicité, et de l'esprit pratique dont elles sont empreintes. Aussi ont-elles été rééditées en 1861, malgré la publication d'ouvrages analogues d'un haut mérite, de MM. Duhamel et Sturm.

Pour lui, par exemple, comme pour Newton, le coefficient différentiel est le *degré de rapidité* avec lequel la fonction varie quand sa variable vient à varier, ou la *pente*, en chaque point, de la courbe qu'elle représente, etc. Il rend visibles les résultats de l'analyse au moyen de considérations géométriques. Il a, le premier, introduit résolûment dans les éléments les procédés indispensables d'intégration des équations aux dérivées partielles, avec des conditions aux limites, par séries trigonométriques, quoique cela ne figurât pas sur le programme, en cela incomplet.

1841. *Résumé* (posthume) *des Leçons de mécanique données à l'École polytechnique.*

Cet ouvrage, comme le précédent, est la reproduction de feuilles lithographiées qu'il n'a pu revoir. Bien que cette science y soit encore traitée, en bien des parties, à un point de vue dont ses travaux ont, plus que tous autres, contribué à amener la réforme (comme nous avons dit à propos des notes sur l'architecture hydraulique de Belidor), il se trouve dans ce livre, rédigé avec simplicité et clarté, beaucoup de choses utiles à consulter et à prendre.

PRÉFACE (DE NAVIER) 1826.

On doit à Galilée les premières tentatives qui aient été faites pour soumettre au calcul la résistance des corps aux efforts qui tendent à les rompre. Jacques Bernoulli, Leibnitz, Euler, la Grange, ont traité diverses questions de ce genre. On a fait sur la force des matériaux un grand nombre d'expériences, parmi lesquelles on doit distinguer celles de Buffon. Coulomb a donné les principes de l'équilibre des voûtes et des murs exposés à la poussée des terres.

Ces recherches ont été jusqu'à présent plus utiles aux progrès des mathématiques qu'au perfectionnement de l'art des constructions. La plupart des constructeurs déterminent les dimensions des parties des édifices ou des machines d'après les usages établis et l'exemple des ouvrages existants; ils se rendent compte rarement des efforts que ces parties supportent et des résistances qu'elles opposent. Cela présente peu d'inconvénients lorsque les ouvrages que l'on exécute ressemblent à ceux que l'on a faits de tout temps, et ne s'écartent pas, dans les dimensions et dans les poids, des limites accoutumées. Mais on ne peut plus en user de la même manière lorsque les circonstances obligent à sortir de ces limites, ou lorsqu'il s'agit d'édifices d'un genre nouveau, et sur lesquels l'expérience n'a rien appris.

L'objet de ces Résumés est d'exposer les conditions de l'établissement des constructions que les ingénieurs dirigent, et de mettre à même de vérifier le degré de résistance de chacune de leurs parties. On s'est occupé principalement des constructions en charpente, sur lesquelles on trouve peu de détails dans les ouvrages destinés à l'instruction, et l'on croit devoir indi-

quer succinctement les principes d'après lesquels les questions les plus importantes ont été traitées.

Nous considérons dans les matériaux deux qualités principales, la force d'élasticité et la résistance à la rupture. Par *force d'élasticité*, on entend la résistance que le corps oppose quand on veut l'allonger ou l'accourcir d'une très-petite quantité. Le rapport entre le poids qui allonge ou comprime un corps prismatique dont la section transversale est égale à l'unité de surface, et la fraction qui exprime la variation de la longueur naturelle du corps causée par ce poids, est la mesure de la force d'élasticité : c'est la quantité désignée par E dans le n° 77. Par *résistance à la rupture*, on entend l'effort qu'il faut faire pour séparer les parties des corps, en agissant par extension, ou l'effort qu'il faut faire pour écraser ces parties en agissant par compression. Le poids qui opère l'un ou l'autre effet, en agissant sur une section transversale égale à l'unité de surface, est la mesure de cette résistance : c'est la quantité désignée par R dans le n° 113.

La force d'élasticité et la résistance à la rupture doivent être déterminées par l'expérience pour les diverses substances, et l'on s'est efforcé de rassembler tous les résultats de ce genre qui paraissent être de quelque utilité.

La connaissance de la force d'élasticité donne les moyens de calculer la quantité dont une pièce de charpente peut se comprimer, s'allonger ou fléchir sous une charge donnée. La connaissance de la résistance à la rupture permet de déterminer la limite du poids qu'une pièce peut supporter. Mais cela ne suffit pas pour l'établissement des constructions, parce qu'il s'agit de connaître, non pas le poids qui rompt une pièce, mais le poids dont on peut la charger, sans que l'altération qu'elle subit augmente avec le temps. La recherche de cette dernière limite, qui est de la plus grande importance, peut être rarement l'objet d'expériences directes; mais on peut ici se servir avec avantage des exemples fournis par les constructions existantes.

Nous remarquons qu'en cédant aux efforts auxquels elles sont exposées, les parties des pièces s'accourcissent ou s'allongent, et nous prenons la proportion de cette variation de longueur pour la mesure du degré d'altération de ces parties. Connaissant donc quel est, dans les constructions dont l'expérience constate la solidité, la quantité dont les fibres qui subissent les plus grandes variations de longueur sont allongées ou accourcies, nous regardons ces variations comme des limites que l'on peut atteindre, et qui ne peuvent être dépassées sans danger. A ces variations de longueur correspondent des efforts qui seraient capables de les produire en agissant directement par tension ou par compression. Ces efforts sont regardés comme étant les plus grands que les fibres puissent supporter; et la pièce, pour l'établissement d'une nouvelle construction, est censée prête à rompre quand ces efforts ont lieu. C'est ainsi qu'en attribuant à la quantité R une valeur beaucoup moindre R' (voyez le n° 181), les formules relatives au cas de la rupture peuvent servir à calculer les dimensions qui doivent être attribuées aux pièces dans les constructions.

Pour donner un exemple de ces évaluations, on dira que la force d'élasticité du fer forgé est E = 20 000 000 000 kil.; c'est-à-dire que ce poids, agissant sur une barre dont la section transversale serait un mètre carré, allongerait ou accourcirait cette barre d'une quantité égale à sa longueur primitive, les variations de longueur étant toujours supposées proportionnelles aux poids qui les produisent. La résistance de la même substance à la rupture est R = 40 000 000 kil., parce que ce poids romprait une barre semblable en la tirant suivant sa longueur. Enfin, on admet que le fer serait altéré si les fibres étaient allongées ou accourcies de plus des 0,0005 de leur longueur naturelle; et comme cette variation de longueur serait produite par un poids de 10 000 000 kil. agissant sur la même barre, on attribue cette dernière valeur à la constante R', et l'on regarderait dans une construction une barre de fer forgé comme étant trop chargée, si les fibres les plus tendues ou les

plus comprimées supportaient un effort de plus de 10 000 000 kil. sur un mètre carré (voyez les nos 182 et 183).

Ces notions admises, tout se réduit à rechercher, dans chaque construction, l'effet des efforts auxquels elle est exposée pour allonger ou accourcir les parties des pièces, soit par une action dirigée dans le sens de leur longueur, soit par une action oblique ou transversale qui oblige la pièce à fléchir, et par conséquent allonge les fibres placées à la face convexe, et accourcit celles qui sont placées à la face concave. Les résultats qui avaient été donnés jusqu'à présent sur l'équilibre des solides élastiques ne s'appliquaient qu'à un très-petit nombre de cas. Mais au moyen des nouvelles questions qui ont été résolues, on peut aujourd'hui se rendre compte de la force des principales pièces, dans les constructions en charpente que les ingénieurs dirigent, avec la même facilité et la même exactitude que l'on se rend compte de la force des chaînes dans un pont suspendu.

L'élément principal des calculs est l'évaluation des limites des efforts que l'on peut faire supporter aux parties des divers matériaux. Cette évaluation, établie d'après l'expérience des constructions existantes, ne peut présenter une exactitude rigoureuse. Il pourra donc exister quelques différences dans les nombres qui seront adoptés par diverses personnes. Le temps et la réunion d'un grand nombre d'observations peuvent seuls fixer les idées sur ce sujet.

Les règles relatives à l'équilibre des murs de revêtement des terres ou des voûtes avaient été exposées dans d'autres ouvrages; mais il était nécessaire d'avoir égard, comme on l'a fait ici, à la possibilité des disjonctions dans les murs ou dans les pieds-droits, que l'on considérait ordinairement comme des corps d'une seule pièce.

Les ingénieurs, en préparant les projets des travaux qu'ils dirigent, suivent ordinairement une marche analogue à ce qu'on nomme dans les sciences la méthode de fausse position. C'est-

à-dire qu'après avoir conçu et décrit par le dessin la disposition d'un ouvrage, ils examinent s'ils ont satisfait à toutes les conditions nécessaires, et rectifient leur projet jusqu'à ce qu'ils y soient parvenus. Parmi ces conditions, l'une des plus essentielles est l'économie; la solidité et la durée ne sont pas moins importantes. Au moyen des règles exposées dans ces Résumés, on pourra connaître dans chaque cas les limites que l'on ne pourrait dépasser sans exposer l'ouvrage à manquer de solidité. Il ne faudrait pas conclure d'ailleurs que l'on doit toujours, pour avoir égard à l'économie, se placer tout près de ces limites. Les différences que l'on trouve dans les qualités des matériaux, et plusieurs autres motifs, s'y opposent; l'art consiste principalement à juger jusqu'à quel point il est permis de s'en approcher.

AVERTISSEMENT DE NAVIER

SUR LA DEUXIÈME ÉDITION (1833).

La première édition de ce Résumé, qui a paru en 1826, étant épuisée depuis longtemps, on a dû le réimprimer, et l'on s'est efforcé de le rendre moins imparfait.

Nous avons rapporté les résultats des expériences sur la résistance des matériaux publiés depuis 1826, et plusieurs résultats inédits que M. Minard, ingénieur en chef des ponts et chaussées, a bien voulu nous communiquer.

Les inexactitudes ou erreurs qui avaient été reconnues, et

dont plusieurs nous ont été signalées par M. Coriolis, ont été rectifiées, et l'on a complété la solution de quelques questions.

On a évité toutefois d'augmenter beaucoup l'étendue de l'ouvrage (ce qu'il eût été facile de faire sans sortir du sujet). Il a paru convenable de se borner aux questions les plus importantes, et dont la solution pouvait servir d'exemple dans les nouveaux cas qui viendraient à se présenter. Comme il existe d'ailleurs un écrit dans lequel la théorie mécanique des ponts en chaînes de fer est exposée avec détail, il eût été superflu de s'en occuper ici.

Nous avons indiqué les auteurs des résultats les plus remarquables qui ont été donnés dans ces derniers temps. Les personnes qui voudraient connaître en détail l'histoire des travaux dont cette partie de la mécanique a été le sujet, pourront recourir à divers ouvrages, parmi lesquels nous citerons principalement le *Traité analytique de la résistance des solides et des solides d'égale résistance*, par M. Girard, membre de l'Institut; le recueil des articles de Robison, publié après sa mort sous le titre de *A System of mechanical Philosophy;* l'ouvrage anglais de M. Barlow, intitulé : *An Essay on the Strength and Stress of Timber;* le *Traité de la poussée des terres*, par M. Mayniel; les *Mémoires sur la poussée des terres et sur les voûtes*, donnés par MM. Français et Audoy, dans le n° 4 du *Mémorial du génie*. On pourra juger, en consultant les ouvrages dont il s'agit, du point auquel ce genre de recherches avait été porté, et des efforts qui ont été faits pour les étendre et les perfectionner.

On reconnaîtra principalement que les conditions d'équilibre d'un massif de terres, qui forment le sujet de l'article 1er de la IIe section, n'avaient point été données, et qu'il en est de même à l'égard des résultats présentés dans l'article 3 de la même section, et des notions relatives à l'usage des tirants ou des ceintures de fer destinées à consolider les constructions en maçonnerie.

Quant aux questions relatives à la résistance des corps solides et à l'établissement des constructions en charpente, on

n'avait traité que les cas les plus simples de l'équilibre d'une pièce droite, c'est-à-dire les questions élémentaires exposées dans la première section de cet ouvrage, et le premier des cas d'équilibre d'une pièce chargée verticalement, qui forment le sujet de l'article 2 de la IVe section. Toutes les autres questions relatives à l'équilibre d'une pièce droite ou courbe, chargée horizontalement, verticalement ou dans une direction oblique, ont été considérées et résolues pour la première fois par l'auteur. Il en est de même des questions relatives à la flexion et à la rupture des plans. Les applications qui ont été faites de ces diverses solutions à l'établissement des principales constructions en charpente semblent mériter l'attention des ingénieurs.

N. B. Comme cette préface et cet avertissement de Navier offrent à peu près les seuls passages de son livre où il parle des recherches antérieures sur la matière qu'il doit traiter, nous pensons qu'on nous saura gré de donner, sur ce sujet intéressant, des détails en grande partie peu connus, et que nous étendrons à peu près jusqu'à l'époque où nous sommes.

HISTORIQUE ABRÉGÉ DES RECHERCHES SUR LA RÉSISTANCE ET SUR L'ÉLASTICITÉ DES CORPS SOLIDES.

I. **Moyen âge.** — Les architectes de cette remarquable période ne nous ont initiés par aucun écrit dans le secret de la manière dont ils déterminaient les proportions de leurs constructions si légères et si hardies [1]. « Ils cherchaient sans

---

[1] On ne trouve à peu près rien sur ce sujet dans l'*Album* ou le *Calepin* de Villard de Honnecourt, architecte du XIIIe siècle, publié en 1858, avec luxe, à l'Imprimerie impériale, et suivi de notes de feu M. Lassus.

cesse, » dit M. Viollet-Leduc [1], « et la routine n'avait pas de prise sur eux; en cherchant, ils trouvaient; ils allaient toujours en avant, et ne disaient jamais : Nous sommes arrivés..... Tous leurs efforts tendaient à équilibrer les forces et à ne plus considérer les points d'appui que comme des quilles maintenues dans la verticale, non par leur propre assiette, mais par la neutralisation de toutes les actions obliques..... Ils connaissaient le principe du levier droit ou coudé, et probablement n'ignoraient pas celui de la composition des forces concourantes, qui peut s'en déduire si naturellement quand les forces sont rectangulaires, bien qu'on en attribue la découverte à Stevin, qui le premier l'a formulé dans sa Statique en 1586. » Ils avaient une sorte de passion pour la diminution du cube des appuis ; ils se livraient probablement à quelques essais comparatifs, à l'aide de leviers, avant d'employer quelque pierre non encore connue.

Quant aux charpentes, ils en connaissaient et raisonnaient les assemblages [2]; mais le bas prix des bois permettait de donner de fortes dimensions aux pièces. On peut cependant présumer qu'ils savaient qu'une pièce prismatique chargée transversalement résiste en proportion bien plus forte par son épaisseur que par sa largeur, car Galilée semble avoir pour but principal, en cherchant le premier la loi théorique de cette résistance, de déterminer au juste la proportion en question, ainsi que le rapport entre la résistance dite *absolue* qui s'exerce quand on tire une pièce dans le sens de sa longueur, et sa résistance dite *respective* ou *relative*, qui entre en jeu quand on veut la rompre par un effort dirigé perpendiculairement. Il y avait été amené, après une visite à l'Arsenal de Venise, en réfléchissant sur les causes de la non-réussite en grand des machines qui ont réussi en petit [3].

---

(1) Dictionnaire raisonné de l'Architecture française du XIe au XVIe siècle, t. IV, article *Construction*.

(2) On trouve dans Villard de Honnecourt la description du plancher formé par quatre pièces d'une portée moindre que le côté de la salle carrée qu'il est destiné à recouvrir, celle d'une roue hydraulique dont les quatre rais principaux embrassent l'arbre sans l'entamer, etc.

(3) Académie des sciences, 1702, partie historique, p. 102.

II. **Galilée.** — L'auteur des immortels Dialogues, considérant donc d'abord un parallélipipède ou un cylindre horizontal encastré dans un mur [1] à une de ses extrémités, et sollicité à l'autre par un poids, et supposant égales toutes les résistances à la disjonction aux divers points de la base ou section située dans le plan du mur, en sorte que leur résultante horizontale passe au centre de cette base, met en équilibre cette résultante avec le poids en les faisant agir aux deux extrémités d'un levier coudé à angle droit, dont il place le point d'appui ou l'axe de rotation *à la partie inférieure* de la même base ou section de rupture. Les forces étant réciproques à leurs bras de levier, il conclut que la résistance *absolue* est à la résistance *relative* comme le bras horizontal, qui est la longueur ou la saillie du solide, est au bras vertical, qui est sa demi-épaisseur ou hauteur.

De là Galilée déduit facilement qu'une pièce rectangulaire sollicitée de champ résiste plus que la même pièce sollicitée à plat dans le rapport de la plus grande à la plus petite dimension transversale; que les poids capables d'être supportés par des pièces soit encastrées à un bout, soit posées sur deux appuis, sont comme leurs largeurs, comme les carrés de leurs épaisseurs, et en raison inverse de leurs longueurs; que les cylindres creux, tels que les os, les plumes, les *cannes* ou tiges de graminées, etc., résistent bien plus aux efforts transversaux, à égal volume, que les cylindres pleins, dans une proportion qu'il détermine; ce qui lui donne lieu de se livrer, sur les œuvres de la création, à des considérations d'un ordre élevé. Enfin, fondant du même jet la théorie des solides d'égale résistance dont l'application procure la plus grande économie de matière, Galilée montre qu'une pièce encastrée, de largeur constante, et dont la face inférieure est un plan horizontal, remplira la condition de résister autant partout d'un bout à l'autre si la face supérieure a pour coupe verticale longitudinale une para-

---

[1] Dialogo secundo, Giornata terza, 1638. — Opere di Galileo Galilei, t. III, p. 63, article 556 de l'édition de 1744.

bole dont le sommet est à l'extrémité où le poids se trouve suspendu.

III. **Suite de Galilée. Blondel. Marchetti.** — Tous ces théorèmes de Galilée sont justes et ont été confirmés par les recherches faites ultérieurement, sauf toutefois celui qui donne le rapport entre les résistances à la rupture par effort longitudinal et par effort transversal, car c'est le seul point sur lequel influe l'erreur de sa double hypothèse consistant à faire toutes égales les tractions aux divers points de la section de rupture, et à placer au bas de cette section l'appui du levier fictif.

On lui a bien plus reproché, pendant quelque temps, la conséquence suivante qu'il tire de son théorème de la forme parabolique d'égale résistance d'une pièce encastrée : « D'où l'on voit, » dit-il (p. 81), « comment avec une diminution de plus de 33 p. 100 on pourra faire des poutres sans rien diminuer de leur force, ce qui en particulier dans les grands navires peut être très-utile pour régler leurs *couvertures;* car dans de pareils édifices la légèreté importe infiniment. » Cette assertion a fourni l'occasion de contestations très-vives sar la priorité de la découverte et de la rectification de l'erreur qu'on y croyait renfermée. Cependant le principe, posé par lui, de l'économie d'un tiers sur la matière, est parfaitement juste et applicable aux pièces posées sur deux appuis tout comme aux pièces encastrées, si ces pièces ne sont chargées qu'en un seul point, car leur section longitudinale d'égale résistance doit offrir alors deux paraboles ayant leurs sommets sur les appuis et se rencontrant en ce point [1]. On ne doit prendre une *coupe elliptique*, comme l'ont conseillé le célèbre architecte François Blondel dans sa deuxième lettre au physicien suédois P. Wurtius [2], et ensuite Alexandre Mar-

---

[1] Sous-note de la p. 30 du t. II du Traité de la Construction des ponts de Gauthey; et, aussi, n° 323 (p. 503) de l'édition 1833 des présentes *Leçons*.

[2] F. B. *Epistola ad* P. W. *in quâ famosa Galilæi propositio discutitur circà naturam lineæ quâ trabes secari debeant ut sint æqualis ubiquè resistentiæ, et in quâ lineam illam non quidem parabolicam ut ipse Galilæus arbitratus est, sed ellipticam esse demonstratur.* (*Data Parisiis*, 1661.) Dans cette lettre, Blondel dit qu'il avait composé, dès 1649, un opuscule sur la Résistance des solides, intitulé *Galilæus promotus*. Sa première lettre, de 1657, était relative aux expériences entreprises par le suédois Wurtius sur le même sujet.

chetti, professeur à Pise [1], que lorsque la pièce doit résister à une charge quel que soit le point où celle-ci agisse (ce qui peut être en effet le cas des poutres des ponts des vaisseaux); et alors, comme l'a remarqué Navier [2], la poutre n'est d'*égale résistance* pour aucune position de la charge, car elle a un excédent d'épaisseur partout excepté en un seul endroit; la coupe en demi-ellipse ne lui donne cette propriété que lorsque la charge est également répartie sur toute la longueur, comme l'a remarqué également Navier [3]; mais il y a toujours une économie de matière en l'adoptant dans l'autre cas [4].

IV. **Hooke et Mariotte. Établissement du principe fondamental.** — Pendant que les principes de Galilée étaient commentés aussi et appliqués par le P. Fabri (Traité de physique, Lyon, 1669), par Vincent Viviani, et surtout par son continuateur le P. Grandi (Guido), camaldule, dont le traité, très-remarquable au point de vue géométrique [5], a été inséré à l'édition de 1744 des OEuvres complètes de Galilée, deux des plus illustres physiciens dont s'honorent l'Angleterre et la France posaient les bases de la vraie théorie de la rupture des solides, ou plutôt, et ce qui importe plus comme on va voir, des modifications qu'ils subissent longtemps avant qu'elle se déclare, et qui sont susceptibles de l'amener.

En 1678, Robert Hooke, à la suite d'une étude des ressorts d'acier [6] (surtout de montre), donnait son fameux principe *ut tensio sic vis*, trouvé par lui, dit-il, dès 1660, mais annoncé seulement en 1676 sous l'anagramme *ceiiinossssttuu* [7], et

---

(1) *De Resistentiâ solidorum*, in-4°, Florence, 1669.—Ad lectorem. — Propositio 39. — Appendix. — Et, aussi, *Lettera nella quale si ribattono l'ingiuste accuse date dal P. D. G. G.*, 1711, pages 18 et 27.

(2) Page 323 (n° 503) de l'édition de 1833 des présentes Leçons.

(3) *Idem*, n° 324, p. 504.

(4) Seulement elle n'est alors que des $\frac{4-\pi}{4} = 0{,}215$ au lieu des 0,333.

(5) *Geometrica demonstratio Vivianorum problematum*, in-4°, 1699.

(6) *Lectures* De potentiâ restitutivâ *or of Springs*, explaining the Power of springings Bodies ; inséré à ses *Philosophical Tracts* and *Collections*.

(7) A la suite de sa *Description of Helioscopes and some other Instruments*.

énonçant comme base de la théorie de l'élasticité, la *proportionnalité* des extensions ou contractions aux efforts qui les amènent ou qu'elles développent. Il explique par là les mouvements vibratoires des corps; et s'il ne tire du même principe aucun calcul de résistance à la flexion, il fait déjà cette remarque féconde, que la matière des barres élastiques fléchies oppose une réaction (springing) de traction du côté qui devient convexe et une réaction égale de pression du côté qui devient concave.

Vers le même temps (en 1680) notre Mariotte, ayant aperçu par plusieurs expériences sur des tiges de bois et de verre que le rapport entre les poids qui produisent la rupture par traction longitudinale et par effort transversal était plus grand que celui qui résulte du calcul de Galilée, constatait aussi [1] que les parties des corps *même les plus durs* (tels que le verre, l'acier) « s'étendent plus ou moins sous l'action de différents poids, » à peu près proportionnellement à ces poids, « et retournent ensuite d'elles-mêmes à leur première étendue; » et qu'elles se compriment aussi, en sorte « qu'un bâton qu'on plie se *resserre vers la concavité de la courbure et s'étend vers la convexité avant que de rompre*, » et il ajoutait « qu'il est très-vraisemblable que *ces pressements résistent autant que les extensions*, et qu'il faut une même force pour les faire; » enfin, que les parties étendues ne rompent que parce que leur extension *vient à dépasser une certaine proportion* qu'elles ne peuvent plus souffrir.

Il montre donc d'abord que si l'on met, comme Galilée, l'axe fixe de rotation au bas de la section, en sorte que les fibres longitudinales dans lesquelles on peut concevoir le solide divisé ne soient qu'étendues, l'inégalité de leurs tensions diverses qui varient uniformément depuis zéro pour la fibre inférieure jusqu'à celle qui est capable de rompre la fibre supérieure, place leur

---

[1] Traité du mouvement des eaux (qui ne fut publié qu'en 1786 par les soins de Ph. de la Hire après la mort de Mariotte, arrivée le 12 mai 1684), 1 volume in-12, et ensuite Œuvres complètes, 5e partie, deuxième discours, où il cherche la force à donner aux tuyaux de conduite et à leurs platines, relativement à la hauteur d'eau qu'ils supportent.

résultante aux deux tiers de la hauteur [1]; et comme cette résultante, à l'instant de la rupture de la fibre la plus tendue, n'est que la moitié de la force qu'il faudrait pour les rompre toutes à la fois par traction longitudinale, on a entre cette dernière force (résistance *absolue*) et celle qui fait rompre par flexion (résistance dite *relative*) le même rapport qu'entre la longueur du solide et *le tiers* de son épaisseur (au lieu de la moitié qu'avait trouvée Galilée en supposant tacitement toutes les tensions égales).

Et, ensuite, vu les compressions d'une partie des fibres, dont ce premier calcul ne tenait pas compte, Mariotte place définitivement *au milieu de la hauteur du solide* l'axe d'équilibre sur lequel elles ne sont ni étendues ni comprimées (c'est-à-dire cette ligne que M. Ch. Dupin a appelée *des fibres invariables*, et M. Tredgold ligne *neutre*), et il considère à la fois les résistances développées par les compressions en dessous et par les extensions en dessus.

Il se trompe, il est vrai, par une singulière inadvertance, du simple au double dans la supputation du résultat [2], ce qui lui fait trouver la même chose que « si toutes les parties s'étendaient, » ou que si la rotation se faisait autour du bas de la section et non pas autour du milieu, et lui donne le rapport de la longueur du solide au tiers de son épaisseur pour celui des résistances *absolue* et *relative*, ou les *deux tiers* du résultat de Galilée, quand il aurait dû n'en trouver que *le tiers* d'après son point de départ. On ne doit pas moins considérer Mariotte comme ayant posé d'une manière à peu près complète, au moins pour les prismes ayant des sections de forme symétrique dans deux sens rectangulaires dont l'un est celui de la force sollicitante, les principes sur lesquels on se base encore aujourd'hui pour calculer les flexions, et aussi la résistance des solides dans les limites en deçà desquelles on se tient toujours, et où les extensions et compressions

---

(1) Fontenelle observe, dans les Mémoires de l'Académie pour 1702, que c'est substituer, pour le point d'application de la résultante, le *centre de percussion* ou d'oscillation au centre de gravité de la section.

(2) *Idem*, 13e alinéa du *Discours*.

des fibres restent sensiblement proportionnelles aux efforts qui les sollicitent.

V. **Jacques Bernoulli.** — C'est donc à tort (1) qu'on a à peu près généralement regardé Jacques Bernoulli comme ayant le premier, ainsi qu'il le prétend, tenu compte des compressions, et comme ayant donné, conformément au titre de son écrit de 1705 (2), la véritable hypothèse à adopter pour calculer ce genre de résistance des solides. L'illustre géomètre de Basle n'avait aucunement parlé de compressions dans son précédent écrit, contenant la découverte de la courbe élastique (3) (*voy.* n° XII) et qui est d'ailleurs postérieur de neuf ans à la publication du *Traité du mouvement des eaux*. Il ne fait même, à la théorie de Mariotte, qu'un seul changement peu heureux, consistant à regarder les extensions et contractions comme *augmentant dans un rapport moindre que les forces qui les produisent;* il prétend le démontrer d'une manière mathématique en disant que si les compressions étaient proportionnelles aux poids qui les causent, la fibre finirait par « se comprimer de plus que toute sa longueur; » il ajoute qu'il en doit être de même des extensions, « parce qu'elles ne sont que des compressions négatives, » et il croit le confirmer, en ce qui regarde les pièces solides, par des expériences sur des *cordes à boyaux*, qui en effet suivent cette loi (4), toute contraire à ce qu'on a récemment trouvé pour le fer et pour les bois étendus au delà

(1) Navier en fait déjà la remarque à une note du Traité de la construction des ponts de Gauthey, t. II (1813), chap. 1er, p. 20.

(2) Véritable hypothèse de la résistance des solides avec la démonstration de la courbure des corps qui font ressort; lettre du 12 mars 1705, insérée aux Mémoires de l'Académie pour la même année; ou *Jacobi Bernoullii opera omnia*, t. II, p. 976.

(3) Jacobi Bernoullii Curvatura laminæ elasticæ. Acta eruditorum Lipsiæ Junii 1694 p. 262, ou Opera omnia, p. 576.

(4) Une corde à boyau de 3 pieds, chargée successivement de 2, 4, 6, 8 livres, s'étendit de 9, 17, 23, 27 lignes, tandis qu'elle se serait étendue de 9, 18, 27 et 36 lignes si elle avait suivi la loi de proportionnalité.

L'historien de l'Académie pour 1705 ajoute cette raison peu concluante : « que si les extensions étaient proportionnelles aux forces, comme les forces peuvent augmenter à l'infini, il faudrait que les fibres pussent s'étendre aussi à l'infini, ce qui est absurde.

de la limite de conservation de leur contexture. De plus Bernoulli, se trompant du simple au double comme Mariotte, dans son lemme IV, affirme que « la force transversale capable de rompre, est la même que si les fibres étaient ou toutes étendues ou toutes comprimées, » et avance que la position qu'on adopte pour l'axe fixe autour duquel se font les rotations est tout à fait indifférente, soit qu'on le mette en bas de la section ou en haut ou en tout endroit intermédiaire. C'est que, n'apercevant pas le principe de l'égalité nécessaire des deux sommes des forces tendant à accourcir les fibres et des forces tendant à les allonger (*voy.* n° VII), principe qui est seul propre à fixer la position de cet axe, il cherche à échapper, par un raisonnement singulier, à la nécessité de déterminer cette position préalablement. La compensation partielle de cette seconde erreur par la première est cause de la conformité approchée de ses résultats avec ceux de quelques expériences de rupture faites précédemment par Mariotte.

C'est ce qu'observe très-bien, en citant Parent et Bilfinger (*voy.* n° VI), l'auteur d'une note mise au bas du Lemme IV à l'édition complète des œuvres de Jacques Bernoulli.

Mais voyons d'abord ce qui avait été dit auparavant touchant la loi des allongements des fibres sous diverses tractions.

VI. **Leibnitz, Varignon, Parent.** — Leibnitz, en uillet 1684, c'est-à-dire deux mois après la mort de Mariotte [1], dont il cite les recherches, mais comme ne connaissant que par ouï-dire ses seuls résultats expérimentaux, admettait comme Mariotte et comme Hooke la loi de proportionnalité des tractions aux allongements, en plaçant, du reste, comme Galilée, l'axe de rotation au bas de la section.

Varignon, considérant que cette hypothèse de proportionnalité de Mariotte, quoique très-vraisemblable, « pouvait n'être pas au gré de tout le monde », présentait, en 1702, un *Mémoire sur la résistance des solides pour tout ce qu'on peut faire d'hypothèses*

---

(1) Demonstrationes novæ de resistentiâ solidorum. (Acta eruditorum, Lipsiæ, Julii 1684, p. 349.)

touchant la force ou la ténacité des fibres du corps à rompre (1); dans lequel (en plaçant toujours l'axe fixe au bas de la section ou en ne tenant pas compte des compressions) il donnait une formule générale où la résistance opposée par les fibres restait une *fonction indéterminée* de leur extension, fonction sur laquelle on peut faire beaucoup d'hypothèses sans que le rapport des résistances pour diverses sections soit autre, au moins pour celles qui sont rectangulaires, elliptiques etc., que ce qu'a trouvé Galilée, à savoir le rapport des largeurs multipliées par les carrés des épaisseurs. Il faut, on le conçoit, supposer une autre loi que celle de proportionnalité aux premières puissances des extensions, si l'on veut que les formules donnent bien les charges capables de produire la *rupture immédiate*, au lieu de ne donner, comme les formules dont on fait aujourd'hui usage, que les charges au delà desquelles la contexture commence à s'altérer, car cette loi simple ne s'observe pas jusqu'à ce que la rupture s'opère (2). C'est pour appliquer cette idée de Varignon que Jacques Bernoulli fit sa tentative, peu heureuse disons-nous, de 1705.

Mais les erreurs de supputation de Bernoulli et de Mariotte furent très-bien remarquées et rectifiées par un autre géomètre, trop peu cité, l'académicien Parent, qui, après avoir publié divers mémoires relatifs à la théorie géométrique de la résistance des solides et à la détermination « d'autant qu'on veut de figures d'égale résistance » pour des modes quelconques d'application des forces (3), où il mettait encore, comme ses devanciers, l'axe de rotation au bord inférieur de la section, remarqua enfin très-judicieusement, dans un dernier travail (4) (comme fit Coulomb aussi quelque temps après) *qu'un point ou une ligne indivisible*, comme est ce bord, *ne saurait avoir assez de résistance*

---

(1) Mémoires de l'Académie pour 1702.

(2) Voir ci-après notre note du n° 151, p. 173 à 185.

(3) 2 avril 1706, 4 juin 1707 et ..... 1708, et 22 février 1710, au recueil des Mémoires de l'Académie. C'est dans celui de 1708 que Parent donne le moyen de tirer d'un tronc d'arbre la poutre qui offre la plus grande résistance. (Voy. ci-après, n° 120, p. 128.)

(4) Essais et Recherches de mathématiques et de physique, 3e volume, XIVe mémoire : *De la véritable Mécanique des résistances relatives des solides, et réflexions sur le système de M. Bernoulli de Bâle*, 1713.

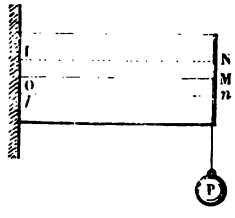
pour servir d'appui, en sorte qu'il faut *une portion finie* de la partie inférieure de la section du solide pour résister aux compressions. Il prouva que la somme des résistances des fibres comprimées doit être égale à la somme des résistances des fibres étendues, ce qui est, dit-il, une propriété dont on n'avait pas encore parlé. Cette propriété fournit, comme on sait actuellement, l'équation servant à déterminer la position de l'axe de rotation, appelé maintenant ligne neutre ou des fibres invariables (1). En ajoutant les moments, autour de cette ligne, des deux espèces de résistance, pour en égaler la somme au moment du poids qui tend à rompre par flexion, il trouve facilement que les résultats de Mariotte et de Bernoulli sont *deux fois* trop considérables; et le même raisonnement lui sert à montrer que leurs transformations en quelque sorte graphiques des deux moments en un seul étaient illégitimes et affectées d'un double emploi, ou, ce qui revient au même, de l'omission d'une défalcation qu'il fallait opérer.

Bilfinger, peu d'années après (2), fit la même remarque critique, et, en restituant à Mariotte l'idée première de prendre en considération les compressions, aussi nécessaires pour l'équilibre que les extensions, rectifia comme Parent la conclusion qu'il en tirait mal.

VII. **Coulomb**. — Occupés bientôt des questions mathématiques relatives à la flexion des tiges ou aux *courbes élastiques*

---

(1) Le raisonnement de Parent est remarquable. Si P est le poids suspendu à une extrémité de la pièce horizontale encastrée OM, et si L, *l*, sur la section d'encastrement, sont les points d'application des résultantes des tractions des fibres à travers la partie supérieure et de leurs pressions à travers la partie inférieure, ce raisonnement revient à observer qu'en représentant la première résultante par la longueur LN de la pièce, il faut que le poids P le soit par $Nn = Ll$, afin que ces deux forces, en se composant ensemble, en produisent une Nl qui passe par *l*, condition pour que la somme des moments de P et des deux résultantes horizontales soit nulle autour de ce point *l*. Or il faut pour cela que la deuxième résultante soit représentée par $ln = LN$; elle est donc égale à celle des tractions.



(2) Académie de Saint-Pétersbourg, 1729, t. IV, p. 178. *De solidorum resistentiâ specimen.*

qu'elles affectent (*voy.* n° XIII), les savants cessèrent de s'occuper de leur résistance à la rupture jusqu'en 1773, époque où Coulomb présenta son célèbre Mémoire composé, dit-il, pour son usage particulier dans ses travaux d'ingénieur militaire à la Martinique, et où se trouvent posées presque toutes les bases de la théorie de la stabilité des constructions (1); mémoire où il montre que les questions d'équilibre y relatives peuvent se traiter comme des questions de maximum ou de minimum, ce qui préludait, en même temps que les recherches théoriques d'Euler et de Lagrange, à cette méthode de l'emploi du *potentiel* ou du travail mécanique qui est suivie aujourd'hui avec succès par des géomètres éminents (2) (*voy.* n° XLII).

Sans avoir eu probablement connaissance du Mémoire de Parent, de 1713, Coulomb se place de suite au vrai point de vue. D'un lemme de statique générale, encore peu connu alors malgré son évidence, et consistant en ce que l'équilibre d'un système sollicité par des forces quelconques exige la nullité de la somme algébrique de leurs composantes suivant trois directions rectangulaires, il déduit que dans la pièce horizontale sollicitée verticalement, il doit y avoir, à travers toute section transversale, égalité entre la somme des tractions horizontales des fibres étendues, et la somme des pressions aussi horizontales des fibres contractées, ce qui lui donne, sur la section d'encastrement par exemple, la position de la ligne de séparation, ou des fibres qui ne varient pas de longueur. En égalant le moment du poids suspendu, c'est-à-dire son produit par la longueur du prisme ou par la distance entre l'encastrement et la suspension, à la *somme du moment des tractions et du moment des pressions des fibres*, il obtient immédiatement le rapport, à ce poids, de la

---

(1) *Essai sur une application des règles de Maximis et Minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'Architecture.* (Savants étrangers, année 1773, t. VII, publié en 1776.)

Ce mémoire a été réimprimé dans notre siècle avec celui de 1784 sur la torsion des fils et celui que le même Coulomb a publié sur les machines.

(2) Aucune cause naturelle, dit Euler (développant une idée de D. Bernoulli), ne produit d'effet, qui, envisagée sous un certain rapport, ne soit un maximum ou un minimum.

force de traction qui tendrait toutes les fibres autant que la plus tendue de toutes.

Ce rapport, quand la section a une forme rectangulaire à côtés horizontaux et verticaux, est celui de la longueur de la pièce au *sixième* de sa hauteur, ce qui fait deux fois plus que suivant le calcul de Mariotte, moins exact que ses principes, et trois fois plus que suivant le calcul de Galilée.

Coulomb, au reste, tout en rejetant la roideur parfaite supposée par Galilée, ou la rupture simultanée de toutes les fibres sans extension préalable, remarque très-bien que si la matière du prisme ne suit pas jusqu'au dernier instant la loi de proportionnalité des efforts aux dilatations et compressions, l'axe final de rotation pourra se trouver ailleurs qu'au milieu de la section, et que le rapport en question pourra être moindre (1). Mais il repousse l'opinion que cet axe puisse être au bas, par cette raison péremptoire, déjà aperçue par Parent, qu'une ligne sans épaisseur ne saurait supporter à elle seule une pression finie.

VIII. **Girard, Barlow, Tredgold.** — Le Mémoire de Coulomb comprend tant de choses dans peu de pages, que, pendant plus de quarante ans, l'attention des ingénieurs et des savants ne s'était fixée sur aucune, ainsi que M. Poncelet l'a remarqué pour ce qui est relatif à la théorie des voûtes (2).

Ainsi Girard, en 1798, tout en le citant, n'en avait tenu nul compte; et croyant, sur l'assertion de Bernoulli, que la position attribuée à l'axe des fibres invariables est indifférente, plaçait cet axe au bas de la section comme Leibnitz (3). Les principes si

---

(1) On peut voir à ce sujet la note que nous avons mise au § 151 ci-après, p. 173 à 185.

(2) *Examen critique et historique des principales théories ou solutions concernant l'équilibre des voûtes.* (Comptes rendus des séances de l'Académie, t. XXXV, 1852, p. 497, 531, 577.)

(3) *Traité analytique de la résistance des solides, et des solides d'égale résistance.* Cet ouvrage est écrit avec une clarté élégante, et les nombreux calculs y sont assez bien faits. Mais leurs bases, et les conclusions, sont souvent fausses; par exemple, pour les solides encastrés aux deux bouts, quand la charge n'est pas à égale distance des encastrements etc. Aussi, son utilité se réduit-elle à celle des résultats des expériences de la section 3e *sur la force et l'élasticité spécifiques du chêne et du sapin.*

simples posés par Coulomb ne furent étudiés et compris que dans notre siècle. Encore ne le furent-ils que peu à peu, car, tout en donnant une expression exacte du moment total des forces qui s'exercent à travers toute section symétrique, Duleau [1], sans faire attention à la 3e *proposition préliminaire* de Coulomb et à ce que signifient deux petits triangles dont il égale les aires entre elles pour exprimer l'équilibre des forces horizontales ou l'égalité de la somme des tensions à la somme des pressions des fibres, croyait voir que, d'après ce savant, la ligne de passage des tensions aux pressions devait se déterminer en égalant la *somme des moments* des premières à la *somme des moments* des secondes; principe faux qui assignerait à cette ligne ou axe des fibres invariables une situation très-différente de la véritable, pour les sections qu'elle ne partagerait pas en deux portions symétriques.

Plusieurs autres auteurs éminents, entre autres M. Barlow [2], faisaient la même confusion, avouée ingénument et rectifiée par cet illustre correspondant de l'Institut dans son dernier ouvrage sur la force des matériaux [3], en citant M. Eaton Hodgkinson comme la lui ayant judicieusement signalée [4]. Leur habile et savant compatriote, M. Tredgold, en mettant comme eux, et comme Coulomb et Young, l'*axe neutre* à sa vraie place pour les sections rectangulaires, imaginait un principe singulier [5] pour en déterminer la position dans les sections d'une autre forme, sans comprendre encore le principe si simple et si rationnel de Parent et de Coulomb.

---

(1) *Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé;* mémoire présenté en 1813, et imprimé en 1820; pages 2 et 3.

(2) *An Essay on the Strength and Stress of Timber*, 1817, art. 120.

(3) *A Treatise on the Strength of Timber, cast Iron, malleable Iron*, etc. 1837, art. 40.

(4) Au volume IV des Mémoires de Manchester, nouvelle série.

(5) *Essay on the Strength of cast Iron*, art. 85a; et *Elementary Principles of Carpentry*. Ce principe qu'il substitue, dit-il, à plusieurs règles fausses données par les anciens auteurs, était qu'en doublant chacune des deux parties dans lesquelles l'axe neutre divise la section donnée, les deux sections de forme symétrique qui en résultent soient celles de deux pièces de même résistance l'une que l'autre; il revient à la condition que, pour les deux parties, le moment d'inertie autour de cet axe cherché, divisé par la hauteur ou plus grande ordonnée, donne le même quotient; ce qui n'atteint point le but réel et véritable.

IX **Navier. Premiers essais, et leur rectification.** — Navier aussi, dans les premiers écrits de sa jeunesse, se laissa tromper par l'assertion de Jacques Bernoulli et de Mariotte, relative à l'indifférence prétendue de la situation adoptée pour la ligne des fibres invariables; il chercha même à l'appuyer d'un raisonnement [1], qui prouve seulement que, soit qu'on la place au bas ou au milieu d'une section rectangle, le moment des résistances est comme le cube de l'épaisseur pour une flexion déterminée (et non comme le carré, ainsi que l'avaient cru Girard et beaucoup d'autres) [2]. De plus, quelques résultats d'expériences lui faisant soupçonner « un vice caché dans la composition des formules, » il entreprit d'en donner de nouvelles : il supposait pour cela que chaque fibre, bien qu'infiniment mince, opposait à la flexion (comme les *lames* envisagées par Bernoulli et qui venaient de faire l'objet de son étude), une certaine résistance proportionnelle à sa courbure, et que, vu sa liaison avec les autres, elle opposait à l'extension une seconde résistance, supposée à la fois proportionnelle au degré de son allongement, et à sa longueur absolue [3]; ce qui lui donnait pour la somme des moments des résistances des fibres une expression composée de deux termes [4].

Mais Navier ne pouvait rester dans cette singulière erreur, que nous avons dû mentionner parce qu'elle se trouve dans un volume non réédité d'un grand ouvrage. Il la rectifia dans son premier cours de l'école des ponts et chaussées en 1819. On y voit qu'il donna alors [5], pour le moment total des résistances des fibres, une expression exacte, la ligne des fibres invariables étant

---

(1) Tome II (1813) du Traité de la construction des ponts de Gauthey, note après le chapitre 1er, page 20.

(2) Et lui-même à ce qu'il paraît, avant d'avoir été détrompé à ce sujet par M. Bernard, aujourd'hui correspondant de l'Institut, alors élève hors de concours (1813).

(3) *Idem*, sous-note, page 33.

(4) *Idem*, page 34. Il est évident qu'en écrivant la sous-note de cette page, il oubliait de tenir compte, en déduction, des actions et réactions mutuelles des parties dans lesquelles il divise une tige ou une fibre qu'on étend.

(5) Sommaire (lithographié) des leçons de mécanique appliquée données à l'École des ponts et chaussées, 1819-1820. Première partie, n° 60 (De la résistance à la flexion des corps prismatiques suivant la figure de leur section transversale).

supposée connue; mais que, comme Duleau, il déterminait encore cette ligne en posant une équation fausse entre le moment total des résistances des fibres allongées et le moment total des fibres accourcies, moments qui sont bien loin d'être égaux dans les pièces à base de triangle, de trapèze, de T' simple, etc.

Ce n'est que dans son cours de 1824, imprimé et distribué par feuilles la même année, et publié en 1826, c'est-à-dire dans la première édition de l'ouvrage que nous rééditons, que toute erreur de ce genre fut corrigée, et que Navier, seul entre tous les auteurs, détermina la ligne que traversent les fibres invariables sur des sections de toute forme, en égalant entre elles, non plus les deux sommes des moments, mais les sommes des résistances elles-mêmes des fibres tendues et des fibres pressées.

D'où il déduisit, le premier aussi, le principe si simple du passage de cette ligne *par le centre de gravité de la section* lorsque la matière est d'égale contexture dans toute son étendue, et qu'on se tient dans les limites de la *conservation de la contexture*, ou, comme on dit, *de l'élasticité*, ou plutôt tant que les efforts restent proportionnels aux effets.

X. **Navier (suite). Young.** — Dans ce même remarquable cours de 1824, dont nous avons été un des auditeurs, et qui fit faire à cette branche de la Mécanique un pas considérable, Navier rattacha plus franchement et complétement que n'avaient fait ses prédécesseurs, la théorie de la résistance des solides à celle de leur élasticité, ou celle de la rupture par flexion à celle de *simple flexion* sans rupture [1], dont l'illustre physicien Thomas Young avait, en 1807, donné les formules exactes en y faisant entrer, le premier, un *module d'élasticité*, mais en ne s'occupant que des sections divisibles en deux parties symé-

---

[1] Dès 1819, dans un article (au n° 71) de son cours lithographié, intitulé : *De la rupture considérée comme l'effet de la séparation des fibres allongées ou de l'écrasement des fibres accourcies*, il exprimait que la théorie de la résistance à la rupture exposée dans les autres articles au point de vue de ses devanciers était en quelque sorte artificielle et qu'il fallait y renoncer.

triques par une ligne horizontale qui est alors évidemment celle des fibres invariables (1).

Il put ainsi résoudre une multitude de questions non encore abordées; car ce sont les petites déformations subies par une pièce solide qui déterminent la distribution des efforts, non-seulement entre les diverses fibres à leur passage à travers une même section, mais aussi entre les diverses parties de cette pièce et entre les diverses pièces d'un même système.

Navier fit à la fin de l'art. IV (2e remarque du § 151 ci-après), une distinction essentielle entre la résistance à la rupture immédiate ou prochaine dont il est presque impossible et heureusement peu utile d'assigner les lois, et la résistance à une rupture *éloignée*, ou à une énervation qui amènerait la rupture au bout d'un temps plus ou moins long (2), et il montra (ce que Young avait indiqué en passant comme nous venons de dire) le vrai parti qu'on peut tirer des formules de flexion pour en prévenir les chances, en limitant convenablement les dilatations ou extensions, ce qui convient mieux et produit souvent d'autres résultats que de limiter les efforts ou tensions; et ce qui n'empêche cependant pas, si on le trouve commode, d'éliminer ensuite les dilatations-limites, ainsi que les coefficients d'élasticité, des

---

(1) *A Course of Lectures on natural Philosophy and the mecanical Arts.* Le Dr. Young y dit, vol. 1er, p. 141, que l'altération permanente de forme limite la force des matériaux presque autant que la fracture, puisque l'effort qui est capable de produire cet effet est suffisant pour l'accroître jusqu'à ce que la fracture ait lieu; bien qu'il reconnaisse (p. 142) que cette altération de forme *ne fasse pas perdre l'élasticité* (voy. ci-après p. 22); et vol. II, art. 335, que la résistance est limitée par l'extension ou la compression que la substance peut supporter sans *manquer* (failing) ou s'affaiblir.

Son *Module* est (ci-après, p. 18) la hauteur en pouces que donne le quotient de la charge d'un prisme d'un pouce carré de base par l'allongement ou le raccourcissement qu'elle produit pour chaque pouce de hauteur, et aussi par le poids du pouce cube; ce qui fait, en substituant le mètre au pouce anglais, le poids E de Navier divisé par le poids du mètre cube, ou exprimé en hauteur d'un prisme de même matière ayant le mètre carré pour section.

(2) M. de Guillebon (lithographie du cours qu'il a fait en 1839) dit à cette occasion que la désignation, *moment de rupture*, est donnée à tort à l'expression qu'on égale au moment des forces extérieures pour poser la condition de stabilité; car, vu que la proportionnalité des forces aux dilatations et compressions ne se conserve pas, l'équation qui en résulte est fausse si on l'applique à l'état où se trouve la pièce à l'instant qui précède celui où elle rompt.

équations de cohésion ou de non-rupture; en sorte que ces expressions des conditions de la stabilité de la contexture des pièces peuvent ne contenir que des efforts-limites [1], dont les valeurs sont fournies par diverses expériences ou observations. (*Voy.* n° XLIV.)

XI. **Suite de Navier. Cas où le calcul des résistances doit être précédé de celui des flexions.** — Si d'ailleurs on peut, dans quelques cas, poser les équations de stabilité d'une manière directe, sans parler ni des flexions éprouvées ni du coefficient de l'élasticité qui y résistait, il est absolument nécessaire, dans une foule d'autres, d'opérer préalablement le calcul analytique de ces flexions, et plus généralement des déplacements des points des pièces. Ce sont, par exemple (voir ci-après, § 7 de la note du n° 113), les cas où les flexions qui seront prises augmenteront sensiblement certaines composantes des forces extérieures, et surtout leurs bras de levier, comme quand les pièces sont sollicitées dans une direction parallèle ou presque parallèle à la leur. Ce sont aussi ceux où il y a lieu de combiner ensemble une flexion et une torsion. Mais ce sont surtout les cas nombreux où une partie des forces est inconnue parce qu'elles consistent en des réactions d'appuis ou d'encastrements, des actions mutuelles de diverses pièces assemblées, etc., qui ne sont point données *à priori*, et pour la détermination desquelles les théorèmes de la statique élémentaire, exprimés entre les seules forces *extérieures* ou non-réciproques agissant sur un corps, ne fournissent qu'un nombre insuffisant d'équations.

Ces sortes de problèmes, d'une nature implicite, peuvent être résolus, comme nous verrons au n° XLIX, par un procédé général, consistant à construire analytiquement les expressions des déplacements des points en fonction des forces tant connues

---

[1] V. ci-après §§ 7 de la note du n° 113, p. 93; 44 du n° 156, p, 83, et note (2) de la p. 829, Appendice complémentaire, § 94. Une erreur du n° 365 de la section IV de Navier relative à la situation de la section dangereuse ou de rupture dans une pièce horizontale chargée de divers poids, a été corrigée dans un cours lithographié de 1837-1838. M. d'Andrea, dans sa traduction italienne de 1836, avait fait la même correction.

qu'inconnues, celles-ci représentées par des lettres, et de s'en servir pour exprimer les conditons définies que les déplacements doivent remplir aux points particuliers où ces forces agissent, par exemple leur nullité aux points fixes, leur égalité et les raccordements qu'ils doivent observer aux jonctions des pièces ou des diverses parties dans lesquelles il faut partager une même pièce parce que les déplacements y sont donnés par des équations différentes (1). De cette manière on parvient constamment à poser autant d'équations qu'on a d'inconnues à déterminer; car il n'y a, dans les questions de mécanique physique, évidemment aucune indétermination.

Navier a posé et résolu le premier, dans son Cours de 1824 (et même déjà dans celui de 1819), un certain nombre de ces sortes de questions, celle par exemple de la pièce encastrée aux deux bouts et sollicitée ailleurs qu'au milieu de sa longueur (de sorte qu'on ne puisse pas obtenir, comme Girard, la solution par une assimilation à un cas plus simple); celles de pièces droites posées sur plus de deux appuis, ou de pièces courbes arrêtées aux extrémités; enfin, le fameux problème de décomposition d'une force suivant des droites matérielles concourantes au nombre de plus de deux dans un même plan ou de trois dans des plans différents (2). S'il n'a pas indiqué la méthode générale dont l'application à tous les cas réaliserait l'espérance de sa préface de 1826 (p. lxxxvij), si même, pour diverses

---

(1) Navier a appris à poser ainsi des équations distinctes pour les flexions de ces diverses parties, qui sont séparées par des points où agissent des forces isolées, et autres où la loi de sollicitation change. Il n'a pas eu besoin ainsi de recourir, comme a fait Poisson, à l'emploi difficile des *fonctions discontinues*. (Traité de mécanique, 2e édition, 1833, n° 323.)

Nous avons eu lieu d'apercevoir qu'une division de ce genre doit encore être opérée, même quand il y a parfaite continuité ou aucun changement de forme des expressions, lorsqu'il s'agit de déterminer par exemple la flexion d'un anneau ou d'un ressort de dynamomètre *fermé*, car une pareille pièce n'a pas d'extrémité; il faut donc poser l'équation d'équilibre, non pas, comme à l'ordinaire, de toute la partie au delà d'une section quelconque, mais d'une portion comprise entre deux sections, en remplaçant la portion au delà de la seconde par une force et un moment, dont on détermine ultérieurement les intensités en posant les conditions de raccordement. (Cours lithographié, 1837-1838 nos 49, 82; ou Comptes rendus 1843, 6 novembre, t. XVII, p. 1025.)

(2) N° 533, page 345 de l'édition de 1833.

sortes de charpente, il est revenu aux décompositions arbitraires ou hypothétiques, fondées sur des suppressions, dont on se servait vaguement avant lui, on doit toujours lui attribuer le principe de ces solutions de questions qui ont été longtemps pour les géomètres une énigme désespérante, restant en effet sans mot tant qu'on attribue aux corps une parfaite rigidité [1] qui ne se trouve réellement dans aucune de leurs parties, ni même probablement de leurs dernières particules [2] et qui rendrait tout indéterminé dans la répartition intérieure des efforts auxquels elles sont soumises.

Au reste, à la même époque, dans une note [3] intitulée *Sur les questions de statique dans lesquelles on considère un corps supporté par un nombre de points d'appui surpassant trois*, Navier, en rapportant les résultats de ses belles solutions relatives à la pièce élastique droite ainsi supportée, observait très-bien que l'indétermination apparente cessait en tenant compte de l'élasticité ou du corps, ou des appuis, ou de l'un et des autres à la fois.

Le même cours de 1824 contient la solution de beaucoup d'autres problèmes sur lesquels nous reviendrons au n° XV.

XII. **Courbes élastiques planes. Jacques Bernoulli.** — Parlons auparavant des *courbes élastiques*, et d'abord de celles qui sont comprises dans un plan.

Leur recherche, plus géométrique que physique, a pu être fort avancée avant que les travaux de Coulomb, de Young et de Navier eussent fait connaître les vraies valeurs du nombre constant (ε ou EI ci-après, au n° 80 et à sa note, p. 30, 31) qui figure dans leur équation.

Galilée avait pensé que la courbe affectée par un ressort droit que l'on ploie pouvait être une parabole, les PP. Pardies et de

---

(1) Voy. *Opuscules de d'Alembert*, t. VIII, p. 36. Sur quelques questions de dynamique. — Et, t. XVIII des Mémoires de Saint-Pétersbourg, un essai d'Euler.

(2) Voyez ci-après, n° XXII.

(3) Société philomatique, 1825, p. 35.

Lanis une funiculaire. Mais Jacques Bernoulli (et ce fut là sa véritable découverte) en indiqua la vraie nature, d'abord en 1691 sous forme d'énigme [1], puis explicitement dans l'année 1694 [2] en basant sa détermination sur cette propriété fondamentale « qu'en un point quelconque le rayon de courbure est en raison inverse du moment, autour de ce point, de la force qui produit la flexion, » propriété dont il donna une démonstration dans l'année 1695 [3], en *attribuant une épaisseur* à la lame ou au fil élastique, et en supposant, comme Leibnitz, qu'une quelconque de ses sections acquiert une petite inclinaison sur une section voisine et primitivement parallèle en tournant autour d'une de ses bases ou de ses tangentes, qu'il prend, avec Galilée, pour l'axe d'appui d'un levier coudé. Mais il traita plus amplement ce sujet *de la courbure des ressorts* en 1705, à la suite de sa lettre *Véritable hypothèse*, etc., citée ci-dessus [4], et où il a été, avons-nous dit, moins heureux quant à la détermination du coefficient de cette proportionnalité.

En égalant, avec lui, pour un fil élastique primitivement rectiligne, le produit de ce coefficient ou de cette constante par l'inverse du rayon de courbure du fil en un point quelconque, à la somme des moments, autour de ce point, des forces qui sont supposées le solliciter dans un seul et même plan depuis là jusqu'à une de ses extrémités [5], on a, pour la courbe qu'il affectera, une équation différentielle du second ordre, dont on obtient toujours une intégrale première quand on peut prendre des axes coordonnés par rapport auxquels on connaisse la direction et la situation de la résultante de ces forces sollicitantes;

---

(1) Acta eruditorum Lipsiæ, page 282, ou Œuvr. compl. n° XLII.

(2) *Idem*, juin 1694, p. 262, ou Œuvres n° LVIII.

(3) *Idem*, décembre, p. 537. Explications et notes; Œuvres, n° LXVI.

(4) Mém. de l'Ac. 1705; ou Œuvres, t. II, p 976. Une question du même genre a été traitée par son frère Jean Bernoulli; Œuvres, t. IV, n° CLXXIV.

(5) Nous verrons (n° XVI) que cette égalité n'a lieu qu'autant que la tige est droite ou plane, et que son plan, ou celui qui passe par sa fibre moyenne et par la résultante des forces, comprend aussi l'un des deux axes principaux d'inertie de ses sections transversales.

et une seconde intégration ramène le problème aux quadratures [1].

Ces quadratures, quand on n'y emploie pas les transcendantes elliptiques, ne peuvent s'obtenir qu'en développant la fonction sous le signe $\int$ en série, comme ont fait Bernoulli, Euler et Lagrange, ou en faisant usage de diverses méthodes d'approxi-

---

[1] Il est clair, en effet, que si l'on pose l'équation, qui est de la forme

$$\frac{EI}{\rho} = X(y-b) - Y(x-a),$$

où ρ est le rayon de courbure, EI est une constante, et a, b sont les coordonnées x, y du point d'application de la résultante dont X, Y sont les projections sur les x et les y, et si l'on change ces coordonnées, en faisant

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha$$

en d'autres x', y' telles qu'il ne reste après substitution que la coordonnée x' dans le second membre, ce qui revient à prendre y' parallèle à la résultante $R = \sqrt{X^2+Y^2}$, l'équation, qui se réduira, s étant l'axe et C' une constante, à

$$\frac{EI}{\rho} = EI\frac{d\frac{dy'}{ds}}{dx'} = x'\sqrt{X^2+Y^2} + C',$$

aura pour intégrale première, C'' étant une autre constante,

$$EI\frac{dy'}{ds} = R\frac{x'^2}{2} + C'x' + C'' = EI\sqrt{1-\frac{dx'^2}{ds^2}};$$

d'où l'on tire, en x' et dx' seuls, la valeur de ds, et par suite celle de $dy' = \frac{dy'}{ds}ds$. On aurait la même chose en prenant les axes coordonnés nouveaux, ou leur angle α avec les anciens, de manière à n'avoir dans le second membre que y', et en remplaçant $\frac{1}{\rho}$ par $= \frac{d.\frac{dx'}{ds}}{dy'}$. On y arrive aussi avec Lagrange (Ac. de Berlin, 1769, *Sur la force des ressorts pliés*, ou *Mécanique analytique*, 1re partie, section V, art. 50), sans changer d'axes coordonnés, en introduisant pour variable auxiliaire l'angle φ que fait avec celui des x la tangente à la courbe élastique au point (x, y); car $\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds}$, $x = \int \cos\varphi\, ds$, $y = \int \sin\varphi\, ds$; d'où, substituant et différentiant, $EI\frac{d^2\varphi}{ds^2} = X\sin\varphi - Y\cos\varphi$, qui multipliée par $2d\varphi$ et intégrée donne

$$EI\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = -2X\cos\varphi - 2Y\sin\varphi + C''';$$

d'où l'on peut tirer ds et par suite dx en φ et $d\varphi$ seuls.

mation numérique ou graphique dans les cas pour lesquels ces séries, après l'intégration, ne sont pas convergentes, comme l'a remarqué M. Poncelet [1].

XIII. **Classification des courbes élastiques planes par Euler.** — Euler fit, en 1744, une énumération complète des courbes élastiques planes, dans un mémoire [2] où il prend, d'après ce que nous venons de dire, l'ordonnée y parallèle à la résultante, quand il y en a une, et où il déduit leurs formes et les lois diverses de leurs circonvolutions, tantôt de l'intégration de leur équation en série, tantôt de l'équation différentielle elle-même, car la série n'est pas toujours convergente. Il y cherche d'abord, à la suite de considérations métaphysiques sur le double moyen d'investigation qu'offrent, d'une part, les causes finales, et, de l'autre, le calcul des effets des causes efficientes, quelle doit être la courbe rendant un minimum une certaine quantité appelée *force potentielle* par Daniel Bernoulli, qui lui avait conseillé cette recherche; quantité qui est, ici, *l'intégrale de l'élément de l'arc divisé par le carré du rayon de courbure*, pour une longueur donnée de l'arc entre deux points où les directions de sa tangente sont aussi données [3]. Euler trouve que ce sont bien

---

(1) Dans son Cours de mécanique industrielle (1840, inédit) à la Faculté des sciences de Paris, 44e leçon.

(2) Additamentum *De curvis elasticis* à la suite de son bel ouvrage *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, dont les méthodes ont été remplacées par celle des variations.

(3) Cette quantité, appelée aujourd'hui simplement le *potentiel* (Voy. App, compl. p. 783, 796), n'est autre chose que le *travail de flexion*. On a en effet, comme aux nos 77 et 80 (note), p. 29, 31, ρ étant le rayon de courbure, $ds\frac{v}{\rho}$ pour l'allongement subi par un élément de fibre, d'une longueur primitive ds, si v est sa distance à celles qui ont conservé cette longueur entre deux sections voisines ω; d'où pour cette fibre une tension dont l'intensité, nulle quand la flexion commence, a maintenant pour grandeur $E\,d\omega\frac{v}{\rho}$. Il en résulte que le travail de son allongement est $\frac{1}{2}Ed\omega\frac{v}{\rho}.ds\frac{v}{\rho}$; ce qui donne $\frac{E}{2}\frac{ds}{\rho^2}\int v^2 d\omega$ pour toutes les fibres sur la longueur ds; ou, I étant le moment d'inertie de la section, $\frac{EI}{2}\int_0^l\frac{ds}{\rho^2}$ pour le travail de flexion sur une longueur quelconque l de la tige.

en effet les courbes élastiques de Jacques Bernoulli, définies par la proportionnalité de la courbure, en un point quelconque, au moment des forces autour de ce point.

Il les classe en *neuf espèces*, dont les six premières sont relatives aux cas où les forces ont une résultante qui coupe la courbe, et se distinguent par les grandeurs plus ou moins considérables de l'angle de cette résultante et de la tangente au même point, qui ne peut être qu'un point d'inflexion, même lorsqu'il se trouve à une extrémité libre, puisque le moment et par conséquent la courbure y est zéro.

La courbe élastique est de première espèce, quand cet angle de la résultante et de la tangente est infiniment petit;

De deuxième, quand il est fini et aigu;

De troisième, quand il est droit;

De quatrième, quand il est obtus, mais moindre que 131°41';

De cinquième, quand il a tout juste cette grandeur, pour laquelle la courbe prolongée se replie sur elle-même, et a un nœud au point où la résultante la coupe;

De sixième, quand l'angle est plus grand, sans excéder deux droits.

La septième et la huitième espèce, qui sont sans point d'inflexion, ne peuvent être produites que par des forces dont la résultante agit par l'intermédiaire d'un bras de levier, sur un point hors de la lame primitivement droite qui a été fléchie.

Et la neuvième espèce, fort remarquable, est relative au cas où les forces, situées toujours dans un plan, n'ont pas de résultante, c'est-à-dire où elles *se réduisent à un couple*. Euler montre que la courbe *est alors un cercle*.

Dans le cas de la quatrième espèce, si l'angle de la tangente et de la force est supposé très-peu au-dessus de l'angle droit, on peut, en mettant approximativement l'élément de l'abscisse pour l'élément de l'arc, intégrer l'équation en termes entiers, ce qui donne simplement une courbe parabolique du troisième degré. C'est le cas très-connu d'une pièce horizontale peu flexible encastrée à un bout et sollicitée à l'autre par un poids, et c'est de la réunion de deux des courbes de cette quatrième espèce, se

raccordant au point de suspension du poids, que se compose la ligne affectée par l'axe d'une pièce *posée sur deux appuis* et sollicitée transversalement dans l'intervalle; et alors les véritables points d'application des forces, ou les points pour lesquels leur moment est nul, sont aux extrémités, vu les réactions des appuis. Euler remarque le premier qu'en observant la petite flèche de flexion on peut déterminer par l'expérience la constante qui mesure l'élasticité de la lame; mais il se trompe en regardant cette constante comme proportionnelle au *carré* et non au cube de l'épaisseur.

La première espèce n'est pas moins importante. Elle se distingue par une singularité qui a étonné les géomètres, et donné lieu à de nombreuses discussions. Elle est relative au cas où la force fait un angle excessivement aigu avec la tangente. C'est le cas des pièces dites sollicitées *debout*, c'est-à-dire pressées dans une direction sensiblement parallèle à leur longueur. Euler, substituant encore approximativement à l'élément de l'arc celui d'une coordonnée, qui est alors prise parallèle à la force, intègre complétement l'équation par sinus sous forme finie. Il en déduit une grandeur que la force est obligée d'atteindre pour pouvoir opérer un commencement de flexion, et qui, une fois surpassée, suffit par cela seul pour que la force détermine la rupture, car la courbure acquise lui donne un bras de levier sans cesse croissant.

C'est ce qu'il a appelé la *force des colonnes*. Le coefficient d'élasticité y entre seul, et non le coefficient de cohésion, parce que quelque grand que soit celui-ci, la pièce ne pourra résister à une flexion qui, une fois commencée, devient rapidement et indéfiniment croissante [1].

---

[1] Duleau et M. Bernard (aujourd'hui correspondant de l'Institut) sans avoir pu consulter, à Cubzac, le mémoire d'Euler, ont aperçu ce principe d'une autre manière, à savoir en supposant approximativement que la courbure de la pièce, d'une longueur a, pressée debout par un poids Q, prend la même courbure que si, étant appuyée à ses extrémités, elle était sollicitée transversalement au milieu par une force p résultante des deux forces Q supposées agir suivant ses tangentes extrêmes. Alors, en effet, f désignant la flèche de courbure, l'inclinaison de ces deux tangentes sur la ligne de

A la fin de cet admirable mémoire, Euler étend son analyse :

1° A une lame d'élasticité ou de grosseur inégale ;

2° A une lame égale, mais naturellement courbe, et il prouve qu'on doit égaler le moment des forces au produit de la constante par la différence $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}$ des inverses des rayons de courbure ancien et nouveau ρ_0 et ρ ;

3° A une lame sollicitée à la fois par des forces agissant en des points particuliers et par d'autres distribuées sur toute une partie de la pièce, telles que celles qui résultent de son poids propre ;

4° Enfin aux oscillations de la lame abandonnée à elle-même après avoir été fléchie (Voy. ci-après, n° LIII).

Euler revient, dans un mémoire de 1757 (1), sur ce qu'il a dit de la *force des colonnes*, et justifie l'assertion en apparence singulière qu'aucune flexion ne sera prise par un ressort droit pressé longitudinalement, tant que la pression n'excédera pas une certaine intensité dépendant de son élasticité, et qu'il trouve aussi inverse du carré de sa longueur, comme l'avait annoncé Musschenbroeck en 1729 (2).

XIV. **Suite. Lagrange. Euler. (Pièces debout. Paradoxe apparent.)** — Lagrange confirme ce résultat d'Euler dans un premier mémoire (3), où il exprime d'une manière simple les intégrales premières de l'équation de l'élastique au moyen des deux variables s (l'arc) et φ (l'angle que la

---

jonction des deux extrémités serait $\frac{3f}{a}$ (n° 87 ci-après); d'où $\frac{P}{Q} = 2 . \frac{3f}{a}$. Or (même n° 87, p. 75), on a $f = \frac{1}{2} p \left(\frac{1}{2} a\right)^3 \frac{1}{3EI}$; d'où $Q = \frac{8EI}{a^2}$, expression différant peu de celle $\frac{\pi^2 EI}{a^2} = 9{,}87 \frac{EI}{a^2}$ d'Euler. MM. Bernard et Duleau concluaient, comme Euler, qu'une charge produisant la plus petite flèche était capable d'en produire une grande, et de rompre, quoique proportionnelle à la seule *élasticité* et indépendante de la *cohésion*.

(1) Académie de Berlin, 1757.

(2) *Introductio ad cohærentiam corporum firmorum*, 1729.

(3) *Sur la force des ressorts pliés*, Académie de Berlin, 1769.

tangente fait avec une droite fixe), en faisant voir que la quadrature exacte de l'expression trouvée pour l'ordonnée dépend de *la rectification des sections coniques*, ou de ce qu'on appelle les fonctions elliptiques aujourd'hui. Mais il remarque qu'on peut intégrer par logarithmes ou par exponentielles réelles, dans le cas de la sixième espèce, quand la force, qui agit par traction, est dirigée presque dans le prolongement de la tangente, ou fait avec celle-ci un angle très-peu différent de deux angles droits.

A un mémoire *sur la figure des colonnes* (1) publié peu après dans un autre recueil, Lagrange élucide complétement la question de la courbe de première espèce, et fait disparaître toute difficulté analytique sur le résultat relatif à ce cas d'une pièce sollicitée *debout*, en donnant, au moyen d'une série, une intégrale exacte de l'équation différentielle sans substituer l'abscisse à l'arc; d'où une relation exacte aussi entre la flèche de courbure, la longueur développée de la pièce, et la force qui la fait fléchir. Elle montre clairement que pour toute force au-dessous de la grandeur trouvée par Euler, la flèche *serait imaginaire*.

C'est dans ce même Mémoire de Lagrange que se trouva faite, pour la première fois, la remarque que la pièce ainsi sollicitée est susceptible de prendre une courbure à deux, trois quatre... ventres, avec inflexions intermédiaires, ce qui a lieu en effet si quelques points sont empêchés de s'écarter latéralement, mais moyennant qu'on donne à la force 4, 9, 16... fois plus d'intensité que pour la courbure à un seul ventre sans inflexion.

L'analyse de Lagrange fournit la valeur de la flèche de courbure, ce que ne peut pas faire l'analyse d'Euler. Elle donne aussi, pour la longueur de l'arc fléchi, une expression exacte et différant quatre fois plus de sa corde que celle que divers auteurs ont cru pouvoir déduire d'un raisonnement qui les fait aussi arriver à une valeur de la flèche moitié moindre que la véritable (2).

---

(1) Académie de Turin, volume de 1770-1773.

(2) Sous ce rapport, les formules du n° 385 de l'édition de 1833 de Navier

Nous ne parlons pas de la fin de ce même Mémoire, où Lagrange conclut d'un calcul incomplet qu'un *renflement* non-seulement des colonnes formées d'assises en pierre, mais même de tout soutien ou poteau d'une seule pièce, n'augmente pas la résistance; ce qui n'est admis ni dans la théorie qui a prévalu, comme on verra au n° 506 (p. 325 de l'édition de 1833), ni dans la pratique, comme on peut voir par la forme des bielles en fonte de machines à vapeur.

Euler revient encore sur cet intéressant sujet en 1778, dans trois Mémoires [1], où il examine ce qui arrive quand la colonne *n'est sollicitée que par son propre poids*. Le calcul le conduit à cette conclusion : que quelque haute, pesante et faible de résistance élastique que soit la colonne, elle ne prendra aucune flexion; tandis qu'elle fléchirait dans sa partie inférieure, si la partie supérieure y était simplement posée. Cet *insigne paradoxe* s'explique en remarquant qu'alors, à la face du contact des deux parties, l'axe de la pièce pourrait faire un angle avec la verticale, tandis que cela est impossible si la partie supérieure est liée invariablement à la partie inférieure.

Il suffit d'ailleurs que la plus petite force horizontale agisse en même temps, ou bien que la résultante des poids des parties supérieures s'écarte tant soit peu de la ligne centrale, pour déterminer la flexion.

XV. **Suite. Navier. Ses solutions de problèmes implicites. Flexion des pièces courbes.** — On doit à Navier d'avoir remarqué que l'équation différentielle de la courbe élastique peut, pour toutes les *espèces* d'Euler (hors la première et la neuvième qui n'en ont pas besoin), être intégrée facilement sous forme finie, même quand il y a une charge

---

sont à modifier. Les considérations présentées à ce sujet aux n°s 89-91 de notre Cours lithographié de 1837-1838 ont été données depuis, avec plus de développement, par M. Ernest Lamarle (Flexion du bois, 2e partie) et par M. Bresse (Cours de méc. appl., 1859, n° 89, p. 208).

[1] Académie de Saint-Pétersbourg. *Determinatio onerum quæ columnæ gestare valent. — Examen insignis paradoxi in theoriâ columnarum occurrentis. — De altitudine columnarum sub proprio pondere corruentium.*

répartie sur la longueur totale ou partielle, même quand il y avait une petite courbure préalable, dans tous les *cas où la flexion est très-petite*; et, cela, sans négliger l'influence de cette flexion sur les bras de levier définitifs des forces, ou en conservant à l'équation sa forme implicite. On y arrive avec lui en dirigeant l'axe d'une des deux coordonnées, non plus suivant la résultante des forces, comme faisait généralement Euler, *mais suivant une des tangentes à la courbe*, de manière à pouvoir remplacer l'élément de l'arc par l'élément correspondant de cette coordonnée (1). L'ordonnée obtenue s'exprime tantôt par des sinus circulaires ou ordinaires, tantôt par des exponentielles réelles ou des *sinus hyperboliques*. C'est dans une habile application de cette remarque aux divers problèmes qui intéressent la pratique que se trouve surtout le mérite de son beau Mémoire inédit du 29 novembre 1819 sur la *flexion des lames élastiques*, approuvé par l'Académie le 4 septembre 1820 (2). Les diverses solutions qui s'y trouvaient comprises ont été données dès 1820, avec d'autres, dans son Cours.

La solution relative à une pièce naturellement droite, mais

---

(1) En effet, si c'est l'axe des x, ds pouvant être remplacé par dx, ou $\frac{1}{\rho}$ par $\frac{d^2y}{dx^2}$, on a une équation de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) + m^2y \quad , \quad \text{ou} = f(x) - n^2y,$$

la fonction $f(x)$ dépendant à la fois de la manière dont la pièce est chargée transversalement, et de sa petite courbure primitive si elle en avait une. Cette équation a pour intégrale

$$2my = e^{mx}\int e^{-mx} f(x)\,dx - e^{-mx}\int e^{mx} f(x)\,dx,$$

$$\text{ou} \quad ny = \sin nx \int \cos nx\, f(x)\,dx - \cos nx \int \sin nx\, f(x)\,dx.$$

Si la fonction $f(x)$ dont dépend la courbure primitive est entière, les deux intégrales s'obtiennent sous forme finie. Ces deux expressions développées donnent toutes celles de Navier. M. d'Andrea, traducteur de Navier, a considéré des cas où la pièce aurait aussi une charge continue longitudinale.

(2) Annales de chimie et de physique, t. XV.

déjà *fléchie*, et posée, la convexité en haut, entre deux appuis ou enclaves, et chargée au milieu, est d'un genre neuf et extrêment remarquable. Les autres, relatives à une pièce droite non fléchie préalablement, et sollicitée à la fois dans le sens de sa longueur et dans un sens transversal, comme les tirants, entraits, arbalétriers, soupoutres de ponts et entretoises de portes d'écluses, etc., se ramènent aux deux cas (nos 412, 415 de l'édition de 1833, fig. 60, 61), où on la suppose encastrée à un bout et sollicitée obliquement à l'autre, et à ceux (nos 569, 592, fig. 130), où l'on tient compte, en outre, d'une charge transversale répartie sur toute la longueur. Ces solutions sont très-utiles, bien qu'elles aient fort peu passé dans les applications jusqu'ici (1). On doit remarquer aussi les solutions (nos 406, 409, fig. 58, 59), relatives à une pièce sollicitée longitudinalement, mais à une certaine distance de son axe; la première, en supposant cette distance petite, fait cesser, dans un sens pratique, pour les pièces chargées *debout*, les difficultés de la solution abstraite d'Euler et même de Lagrange, car elle tient compte des déviations inévitablement dues à ce que ces pièces ont une certaine épaisseur.

Une pièce qu'on fléchit peut être naturellement courbe. Euler a montré (2) que si sa première forme est circulaire, on peut ramener aux quadratures la détermination de sa forme nouvelle tout comme quand elle est en rectiligne, quelle que soit l'ampli-

---

(1) Toutes les formules qu'il donne à ce sujet, malgré leur apparente complication, deviendraient usuelles au moyen de petites tables numériques donnant, les unes, les cosinus naturels tant circulaires qu'hyperboliques de divers nombres depuis zéro; les autres, les rapports des tangentes tant circulaires qu'hyperboliques à leurs *arcs*. Lorsque, d'après la nature des données, ces cosinus, ou ces rapports, se trouveraient peu différents de l'unité, ce serait un signe que l'équation de résistance permanente peut être posée sans avoir égard à la flexion inconnue, ou sans tenir compte de l'augmentation qu'elle apportera aux bras de levier des forces.

S'il nous est donné d'annoter avec quelque étendue la 4e section de ses leçons, nous nous proposons de comparer les solutions de Navier avec celles que fournirait l'intégration exacte au moyen des fonctions elliptiques (en prenant, avec Euler, la direction de la force pour un des deux axes coordonnés) et de donner des tables complémentaires si la différence est sensible.

(2) Même mémoire *De curvis elasticis*, art. 49.

tude de la flexion qu'on lui fait subir [1]. Il en est autrement si la forme primitive n'est pas celle d'un arc de cercle, car le rayon de courbure variable, dont l'inverse multiplié par une constante est à ajouter au second membre de l'équation différentielle, n'est généralement donné qu'en fonction des coordonnées primitives de chaque point, et non pas en fonction de ses coordonnées ultérieures ou après flexion [2].

Mais on doit à Navier d'avoir aperçu qu'on ramène encore aux quadratures le problème de la flexion plane pour une forme primitive de courbe à simple courbure absolument quelconque *si la flexion opérée est très-petite*, en sorte qu'on puisse prendre approximativement, pour bras de levier définitifs des forces quelconques qui font fléchir, ceux qu'elles possédaient au commencement de la flexion.

Il obtient même les intégrales ou les quadratures très-simplement en fonction entière de l'abscisse quand la courbure est assez peu considérable pour que la dérivée de l'arc puisse être développée suivant les puissances entières de la dérivée de l'ordonnée, si la courbe primitive peut être assimilée à une parabole du second degré. Et il en serait de même en l'assimilant à une parabole d'un degré quelconque ayant une équation à un ou plusieurs termes, ce qui est toujours possible approximativement.

Et quand la forme primitive est un arc de cercle d'autant de degrés qu'on veut, Navier a reconnu, en 1831 [3], que l'in-

---

(1) En effet, on n'a qu'à ajouter la constante $\frac{EI}{\rho_0}$ au second membre de l'équation $d\frac{\frac{dy'}{ds}}{dx'} = x'\sqrt{X^2+Y^2} + C'$ de la 6e note du n° XII ci-dessus; cela n'empêche pas la transformation de cette équation et la suite du calcul.

(2) Cependant si, à partir d'un point d'encastrement, on divise la pièce en plusieurs portions finies assez petites pour que dans chacune le rayon primitif puisse être regardé comme constant, on peut de proche en proche, et en exprimant des conditions de raccordement, obtenir approximativement la forme nouvelle, quelque différente qu'elle soit de l'ancienne. (*Note sur les flexions considérables des verges élastiques*, au Journal de Liouville, 1844.)

(3) T. Ier des Ann. des P. et Ch., 1831, p. 428, et n° 453, p. 292 de l'édition de 1833 des présentes leçons. Voir aussi le n° 607, où il trouve que le milieu de l'arc n'est pas le point où une charge exerce la plus forte action.

tégration se faisait exactement et s'étendait même à une demi-circonférence, ce qui permet de calculer la flexion, les poussées et la résistance des grands systèmes de charpente cintrés.

XVI. **Flexion oblique ou déviée.** — Avant de passer à la flexion à double courbure, arrêtons-nous à considérer le cas fréquent où la flexion d'une pièce droite est *déviée*, c'est-à-dire où elle s'opère dans un plan plus ou moins oblique à celui de *sollicitation*, qui est le plan du moment ou du couple résultant des forces faisant fléchir.

M. Persy, professeur à l'École d'artillerie et du génie de Metz, a très-bien remarqué, en 1834 (1), que l'équation unique de moments, posée comme à l'ordinaire autour de la ligne des fibres invariables, ne suffisait pas pour assurer l'équilibre entre les forces extérieures et les forces intérieures de tension ou pression des fibres à travers une section, à moins que cette ligne ne soit *un des deux axes principaux* d'inertie de celle-ci, passant par son centre de gravité.

Cette condition n'est pas toujours remplie, car elle exigerait que le plan du moment résultant des forces extérieures fût toujours perpendiculaire à un de ces deux axes de plus petit et de plus grand moment d'inertie des sections. Nous avons montré en conséquence qu'il fallait poser *deux équations de moments* des forces (2), et que ce qu'il y avait de plus simple pour obtenir la flexion, était de les prendre autour des deux axes d'inertie. Quand aucun de ces deux moments n'est nul, la flexion est *déviée*, ou s'exécute dans un autre plan que celui de sollicitation à fléchir. Comme elle est résultante, en quelque sorte, de deux flexions qui auraient lieu dans des plans perpendiculaires entre eux et aux axes principaux, les équations de résistance sont très-faciles à poser. Elles donnent des résultats tout différents de ceux auxquels on est conduit soit pour la flexion, soit pour la rupture, quand on ne tient pas compte de cette déviation, qui s'explique aisément, du reste, en considé-

(1) Cours lithographié à Metz, nos 42, 43, p. 24.

(2) *Comptes rendus*, 30 octobre et 6 novembre 1843, t. XVII, p. 946, 949, 1024, et *Mémoire sur la torsion* de 1853-1854 aux Savants étrangers, t. XIV, art. 42.

rant que le plan de *flexion effective* tend toujours à se rapprocher du plan de *plus facile flexion* de toute pièce inégalement flexible en divers sens, c'est-à-dire de toute pièce dont la section n'est pas *isotrope* [1], ou n'a pas ses moments d'inertie tous égaux autour de droites tracées sur son plan par son centre de gravité.

Et si la pièce est primitivement courbe, ou bien si les sections d'une pièce droite n'ont pas toutes leurs axes principaux dans les deux mêmes plans passant par son axe, la pièce ainsi sollicitée est toujours *tordue en même temps que fléchie*, et elle prend une double courbure (Voyez nos XX, XXI).

XVII. **Flexions accompagnées d'extension ou compressions longitudinales. Limites de ces dernières, déduites par M. Poncelet des limites des extensions.** — Les pièces droites ou courbes sollicitées à fléchir éprouvent aussi, en général, sous l'action des composantes longitudinales des forces extérieures, une extension ou une contraction qui affecte leur axe ou fibre moyenne, et qui s'additionne à celles que la flexion donne aux autres fibres. Navier, après en avoir très-bien fait la remarque, se contente de calculer l'accroissement total de l'axe, sans déterminer la part des déplacements individuels de ses points dans les sens des coordonnées, due à cette deuxième cause de déformation, ce qui est nécessaire pourtant afin d'obtenir la forme nouvelle prise par les pièces, et de pouvoir calculer complétement, pour celles qui sont naturellement courbes, les *poussées* ou les réactions totales des appuis ou arrêts de leurs extrémités.

Nous avons cherché, en 1837-1838, à combler cette lacune, ou à opérer, comme on dit aujourd'hui, cette *correction* aux

---

[1] On pourrait, si l'on veut un mot spécial, appeler *isostrophes* (στρέφω, tourner), les sections qui tournées de toutes les manières donnent le même moment d'inertie. Mais nous ne voyons pas de danger de confusion à leur donner l'appellation déjà connue *isotrope*, qui a la même signification, bien que Cauchy l'ait créée pour distinguer une contexture particulière de corps élastique et non une classe de formes de sections.

résultats obtenus en ne tenant compte que des flexions qui fournissent généralement la *partie principale* ou la plus considérable. Nous l'avons fait [1] au moyen du principe, que nous démontrions, de *superposition* ou d'addition de petits effets, ce qui nous a fourni une expression complète de la poussée horizontale d'un arc soit de parabole, soit de cercle, supposé chargé au milieu seulement; en tenant compte aussi d'un autre effet, du même ordre de grandeur que celui des contractions de l'axe courbe, savoir celui des *glissements* (n° suivant), dont nos recherches ultérieures modifient l'évaluation sans la diminuer [2]. Et nous indiquions même comment il faut compléter la solution quand les sections extrêmes de l'arc, au lieu de tourner librement, sont astreintes à conserver une direction déterminée, comme dans le cas d'encastrement, ce qui fait passer la résultante des réactions ailleurs qu'au point de la fibre moyenne répondant à chaque naissance.

M. Bresse a étendu l'évaluation corrigée des poussées aux cas où une charge isolée est appliquée ailleurs qu'au milieu (ce qui donne le moyen de calculer par une addition, comme il le remarque, les résultats d'un nombre quelconque de charges semblables, placées en divers points), et, aussi au cas d'une charge uniformément répartie sur toute la longueur soit de l'arc, soit de sa projection horizontale; et il a donné des tables numériques, fort étendues, de calculs tout faits des *parties principales* dues aux seules flexions, et des *coefficients de correction*, au-dessous de 1, par lesquels il faut les multiplier pour tenir compte des contractions de la fibre moyenne, car il suppose l'effet des glissements négligeable [3].

---

(1) Cours lithographié, n°s 11, 79, 80, 81.

(2) Comme on peut voir par les valeurs des inclinaisons prises par la fibre moyenne sur les sections, aux §§ 2 et 3 de la note du n° 153, p. 212, et 45, 46 de la note du n° 156 ci-après, p. 389 à 410.

(3) Les utiles tables et formules de M. Bresse, ingénieusement dressées et disposées, sont fréquemment consultées par les ingénieurs qui ont à projeter des ponts ou viaducs en fonte ou en fer; d'autant plus qu'elles donnent, outre les poussées ou réactions extrêmes, le moyen d'évaluer sans calcul, au moins dans le cas d'une charge répartie, la pression la plus considérable qu'éprouvent les fibres, et de poser par conséquent immédiatement l'équation de résistance per-

Au reste, Navier, bien que n'évaluant pas l'effet des contractions de la fibre moyenne pour modifier plus ou moins la grandeur des poussées, y a égard, ainsi qu'à ses dilatations possibles, lorsqu'il calcule la résistance ou qu'il établit les conditions de stabilité de la cohésion, en maintenant la plus grande extension ou contraction dans de prudentes limites.

Ces deux limites sont difficiles à déterminer (voyez plus loin), celle surtout des compressions qui tendent à produire l'écrasement.

L'écrasement n'est cependant au total qu'une disjonction des parties dans un sens latéral ou perpendiculaire à la force qui comprime. Ainsi, celui du bois pressé dans le sens de ses fibres s'opère par leur séparation les unes des autres; celui d'une rondelle de métal, par sa fente tout autour qui lui donne la forme d'une rosette; celui d'un petit bloc de pierre, par la division latérale en espèces d'aiguilles longitudinales avant son broiement en poussière. Aussi M. Poncelet a-t-il ramené théoriquement, dans son cours de 1840 à la Faculté de Paris, le danger des compressions longitudinales à celui des dilatations transver-

---

manente. La première idée s'en trouve à son mémoire de 1848 (*Études théoriques sur la résistance des arcs. Ann, des P. et Ch.*, 1er semestre, p. 150). Mais à son ouvrage de 1854 (*Recherches analytiques sur la flexion et la résitance des pièces courbes*, in-4°), et dans son Cours (1re partie) publié en 1859, il a ajouté les *corrections* numériques et il a donné à ses tables leur dernière forme. M. Bresse tient compte aussi de deux éléments nouveaux, les effets des changements de température, et ceux du *calage* qu'on opère en chassant des coins sous les appuis des pièces ou à leurs jonctions. Il ramène, d'une manière simple, les cas de non-symétrie à ceux où il y a symétrie dans l'action des forces sur un arc solide; et il peint aux yeux, par des courbes figuratives, la suite des grandeurs, soit des moments de flexion aux divers points, soit des pressions supportées par la fibre moyenne et par les fibres d'*intrados* et d'*extrados*, qui en sont les plus éloignées.

M. Bresse suppose que les réactions des appuis s'exercent au centre des sections extrêmes, ou sur la fibre moyenne de la pièce. Mais M. Darcel, dans un *Mémoire sur divers problèmes relatifs aux arcs et fermes métalliques surbaissés* (*Ann. des P. et Ch.*, 1862, 2e sem. p. 60) a fait servir le même mode de calcul, pour un arc paraboliqne peu courbe, au cas des *naissances planes*, où ces sections ne peuvent librement tourner, en sorte que la résultante des réactions passe ailleurs qu'en ce point; et il a considéré aussi, ainsi que M. Albaret (*Calcul des arcs métalliques, Ann. des P. et Ch.* 1861, 1er sem., p. 90, et 1862, 2e sem., p. 305) le cas où la section de la pièce courbe n'est pas constante.

sales dont elles sont toujours accompagnées comme on verra ci-après (nº XLIV).

XVIII. **Glissements et forces tangentielles. Duhamel du Monceau. Coulomb. Young. Vicat, etc.** — Mais les pièces solides éprouvent deux autres genres de modifications :

1° Celle qui résulte du *glissement* latéral des sections transversales les unes devant les autres, et du glissement nécessairement simultané des fibres longitudinales les unes contre les autres;

2° Celle qui résulte de la torsion, ou de la rotation inégale (provenant d'autres glissements) de ces diverses sections autour de l'axe de la pièce.

M. Vicat a appelé l'attention, en 1833, sur le premier de ces deux effets, qui peut aller jusqu'à trancher une pièce solide, et auquel sa matière oppose une résistance qu'il a appelée *force transverse*, dont l'omission, par divers auteurs, a été le sujet principal des accusations que porte cet ingénieur célèbre contre toute la théorie de la résistance des solides (1).

Il n'avait pas échappé cependant à Coulomb ni au docteur Thomas Young.

Coulomb, dans un passage de ses célèbres *Remarques sur la rupture* (2), reconnaît en effet que l'évaluation donnée par lui de la résistance d'une pièce horizontale encastrée à un bout et sollicitée à l'autre par un poids *n'est vraie* que si les composantes verticales de force, développées dans chaque section et dont la somme pour chacune est égale nécessairement à ce poids n'influent que très-peu sur la tendance à disjonction ; condition qui est remplie, ajoute-t-il, *lorsque le bras de levier du poids est beaucoup plus grand que l'épaisseur de la pièce.*

C'est dire assez que l'influence de cet *effort tranchant*, comme l'ont appelé les ingénieurs des ponts tubulaires de Menai et de

---

(1) Recherches expérimentales sur les phénomènes physiques qui précèdent et accompagnent la rupture ou l'affaissement d'une certaine classe de solides. (*Annales des Ponts et Chaussées*, 2e semestre.)

(2) Mémoire de 1773 cité au nº VII.

Conwai (1), et ensuite M. Belanger (2), peut devenir souveraine dans les pièces excessivement courtes, comme sont les tenons, crochets, ergots, petits boulons ou rivets, clavettes, goupilles et autres pièces que des forces transversales tendent à trancher ou à *cisailler*, terme très-expressif employé par M. Love (3).

Coulomb, un peu plus loin, considère cette même résistance au glissement dans les assises des murs de soutenement, dans les massifs de terre, dans les joints des voûtes, etc. (4).

Young, outre l'extension, la compression, la flexion, distingue, au nombre des effets des forces sur les solides, ce qu'il appelle la *détrusion* (5), produite, dit-il, « lorsqu'une force transversale est appliquée tout contre un endroit fixe de la même manière que les lames d'une paire de ciseaux (6); » et il y rapporte la torsion (voy. n° XIX).

Il observe qu'en y ayant égard, la détermination de la forme d'égale résistance cesse de donner paradoxalement zéro pour l'épaisseur d'une pièce horizontale chargée verticalement, au-dessus des deux points où elle est appuyée; et il propose, pour tracer le profil de la pièce, de substituer à la parabole la tangente à peu de distance de ces points.

Le glissement transversal relatif des sections est toujours accompagné d'un glissement longitudinal relatif des fibres; car si l'on imagine un petit carré formé de quatre lignes matérielles situées n'importe où à l'intérieur d'un solide, il ne peut se changer en losange par le glissement d'un de ses côtés devant le côté opposé, sans qu'il y ait en même temps glissement relatif des deux autres côtés opposés, et aussi de toutes les lignes qui leur sont parallèles. La rupture d'un corps très-fibreux par

---

(1) *Shearing Strain*. Description de ces ponts par M. Edwin Clarke.

(2) Théorie de la résistance et de la flexion plane, 1858 et 1862.

(3) Mémoire sur la résistance du fer et de la fonte, 1852 et 1859.

(4) Il cherche même à donner, de l'écrasement d'un pilier, une explication fondée sur un effet de cette espèce; explication que nous ne croyons pas être la véritable (ci-après note du n° 3, p. 6).

(5) *To detrude*, Detrudere, chasser hors de sa place; d'un mot latin qui n'a fourni à notre langue qu'*intrusion*, *intrus*.

(6) *A Course of Lectures*, etc. Lecture XIII. On passive strenght and friction.

glissement ou cisaillement transversal, paraît être toujours précédée d'une disjonction de ses fibres longitudinales qui cessent d'abord d'adhérer l'une à l'autre sans cesser de se toucher.

C'est aussi, comme il a été remarqué, en 1767, par Duhamel du Monceau [1], à cause de cette adhésion des fibres et de leur résistance au glissement l'une contre l'autre qu'une pièce rectangulaire d'une certaine épaisseur, posée horizontalement sur deux appuis et chargée au milieu, résiste beaucoup plus que ne feraient les voliges superposées dans lesquelles on l'aurait divisée par des traits de scie horizontaux ; ou qu'un morceau de fort carton résiste plus, comme il dit, qu'un jeu de cartes qu'on ploie.

La résistance élastique au glissement peut d'ailleurs être attribuée à des résistances à l'extension et à la compression; car quand les côtés opposés d'un carré matériel glissent les uns devant les autres, l'une de ses diagonales s'allonge, l'autre s'accourcit. (Voy. note au n° XLII, et aussi § 6 de la note du n° 2, p. 194, et App. compl., p. 768.)

Elle s'évalue, en tous cas, pour l'unité superficielle, par le produit Gg d'un certain coefficient d'élasticité G par le glissement g rapporté à l'unité de distance des lignes ou des faces parallèles qui cheminent un peu ainsi l'une devant l'autre.

Il est facile d'introduire le glissement dans le calcul des modifications ou déformations d'une tige élastique, et d'évaluer son influence sur les conditions de résistance à la rupture éloignée, ou sur la grandeur de la dilatation maximum, qui a lieu dans un sens un peu oblique aux fibres, comme on a fait dans un cours de 1837-1838, et dans un mémoire de 1843 [2], *quand on suppose ce glissement le même à tous les points de chaque section.* Mais on a reconnu, depuis, qu'il diminuait du centre au bord des sections [3]; et c'est aussi ce qui résulte implicitement ou

---

(1) *Du transport et de la force des bois*, livre V, p. 412 et suivantes.

(2) Comptes rendus, 30 octobe 1843.

(3) Mémoires sur la torsion, lu le 13 juin 1853, art. 44; et sur la flexion, lu le 20 novembre 1854 et le 20 juillet 1855, inséré en 1856 au journal Liouville. Voir aussi note ci-après du n° 153, § 2.

indirectement des considérations élémentaires et ingénieuses présentées il y a peu d'années par M. Jouravski [1]. Mais ce n'est que pour des formes particulières de sections que ces considérations donnent des résultats suffisamment approchés, et il faut en général en substituer de plus compliquées (Voy. ci-après, n° XXXVIII, et le § 46 de la note du n° 156) si l'on veut évaluer exactement son influence qui, heureusement, n'est jamais considérable. (Voy. n°s XVII, XLIV, XLV.)

XIX. **Torsion (d'un cylindre circulaire). Coulomb.** — La *torsion* est au glissement ce que la flexion est aux extensions et compressions des fibres. La résistance ou réaction élastique qui lui est propre n'est que celle qu'opposent ensemble les éléments d'une section à glisser devant les éléments correspondants d'une section voisine lors de leur rotation l'une devant l'autre, ou, ce qui revient au même, celle qu'opposent à glisser l'une contre l'autre les fibres primitivement droites qui ont ces éléments pour bases, lorsqu'elles s'inclinent sur l'axe et se courbent pour se changer en hélices toutes du même pas. Tant qu'elle reste très-petite, sa réaction n'est nullement attribuable, comme l'ont pensé quelques auteurs, à la résistance à l'allongement que prennent, en se courbant ainsi, les fibres les plus éloignées de l'axe, et à la contraction que doivent prendre simultanément l'axe et les fibres les plus voisines comme le remarque Young; car cette cause, pour une torsion petite du premier ordre, ne développe, comme il le prouve, qu'une résistance petite du second ordre et négligeable, et d'ailleurs proportionnelle au *cube* de l'angle de torsion, ce qui n'est nullement conforme aux observations, desquelles il résulte que la réaction est proportionnelle à cet angle lui-même [2].

Les lignes matérielles dont l'allongement et l'accourcissement peuvent être regardés comme engendrant la réaction de torsion sont plutôt celles qui forment, autour de l'axe, des hélices in-

---

(1) Annales des ponts et chaussées, cahier de novembre et décembre 1856, et ci-après, note du n° 156, § 45, p. 389.

(2) Lectures on natural Philosophy, volume I, p. 139.

clinées à 45 degrés sur les fibres dans deux sens opposés [1].

La torsion a été étudiée pour la première fois par Coulomb [2]. Il ne considère que les cylindres à base circulaire; et un raisonnement simple lui montre que les moments, autour de leur axe, des forces qui les font tordre, sont, pour même matière, proportionnels aux rotations par unité de longueur, et *aux quatrièmes puissances des diamètres* (*V.* note du n° 156, § 60, p. 461).

C'est aussi ce qu'on trouve en supposant les résistances proportionnelles aux distances à l'axe, et ce qu'on aurait généralement en supposant que les sections quelconques *restent planes*, car il en résulte que le *moment de torsion* est égal au produit $G(I+I')\theta$ du *moment d'inertie* $I+I'$ de la section autour de son centre (ou à la somme des moments I, I' autour des deux axes principaux qui y passent) multiplié par la torsion θ (l'angle de torsion pour l'unité de longueur, estimé en arc d'un rayon $=1$) et par le même coefficient G qui sert pour la résistance au glissement.

On a cru quelque temps que cette sorte de résistance était exprimée par la même formule quelle que fût la forme de la section, et que les points les plus éloignés de l'axe de torsion étaient ceux où résidait le plus grand danger de désagrégation et de commencement de rupture. Des recherches de M. Cauchy, dont nous avons modifié et étendu les résultats, et dont nous parlerons aux n°s XXXVI et suivants, ont appris qu'il n'en était pas ainsi à beaucoup près; ce qui vient de ce que pour toute autre forme du contour que le cercle les sections primitivement planes ne restent pas planes, et qu'ainsi les glissements, toujours mesurés par les petites inclinaisons que prennent les fibres sur les normales aux éléments de ces sections, ne sont point proportionnels aux distances diverses des fibres à l'axe.

Nous y reviendrons après avoir donné (n°s XXII et suiv.) l'historique de la branche nouvelle de la Mécanique appelée la théorie générale de l'élasticité.

---

(1) Voy. ci-après, § 3 de la note du n° 156.

(2) Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et l'élasticité des fils de métal, lu en 1784. Académie des sciences, volume de 1784, publié en 1787.

XX. **Courbes élastiques à double courbure, et torsion avec flexion. Lagrange. Binet. Poisson, Wantzel, etc.** — Nous pouvons exposer maintenant ce qui a été fait pour déterminer les *courbes élastiques à double courbure*.

Lagrange en a donné des équations différentielles du second ordre [1], mais incomplètes parce que, se bornant à généraliser l'application du principe de Jacques Bernoulli, il a basé l'établissement de ces équations sur la supposition implicite que les forces ne s'exerçaient que dans les plans osculateurs à la fibre moyenne de la tige fléchie, ou qu'elles n'avaient de moments qu'autour des normales à ces plans.

Binet a signalé, en 1814 [2], l'omission du moment, qui existe généralement aussi, *autour de la tangente* à cette fibre, c'est-à-dire du moment ou du couple composant qui fait tordre et qui développe une réaction de torsion, dont est capable toute tige élastique capable de résister à la flexion; et Poisson, en 1816, dans la Correspondance de l'École polytechnique [3] et ensuite dans l'édition de 1833 de son traité de Mécanique [4], a ajouté pour y avoir égard, à chacune des trois équations de Lagrange, un terme égal à ce *moment de torsion* multiplié par le cosinus d'un des angles que la tangente à la fibre moyenne fait avec les trois coordonnées (note page suivante).

Mais, bien que présentées comme applicables au cas le plus général, les trois équations différentielles ainsi construites ne conviennent réellement qu'à celui où la tige fléchie était primiti-

---

(1) *Mécanique analytique*, 1re partie, section V, § III, article 48 et surtout 50.

(2) *Sur l'expression analytique de l'élasticité et de la roideur des courbes à double courbure;* mémoire lu le 22 août 1814, et inséré au Journal de l'École polytechnique, tome X ou 49e cahier, 1815, p. 418. Il y donne des équations où entrent des forces s'opposant aux changements respectifs de la longueur, de la courbure des tiges, et de l'inclinaison mutuelle de leurs plans osculateurs. Il y fait, le premier, la remarque que l'analyse de Lagrange ne saurait s'appliquer à un ressort en hélice, car la torsion est autant en jeu que la flexion dans sa résistance élastique à une force qui l'allonge ou l'accourcit.

(3) *Sur les lignes élastiques à double courbure;* tome III, n° III, de janvier 1816, p. 355-360.

(4) Tome I, nos 346 à 348.

vement rectiligne, et où sa section a une forme *isotrope* (n° XVI) ou dont tous les moments d'inertie sont principaux et égaux autour de droites tracées dans son plan par son centre (comme les sections circulaires, carrées, etc.). Dans tout autre cas, c'est-à-dire quand la tige était primitivement courbe, ou bien quand ses sections sont hétérotropes (comme le rectangle, l'ellipse etc.), les forces ont nécessairement, lorsque l'équilibre est établi, un *troisième moment* ou couple composant, s'exerçant autour de la droite qui est perpendiculaire à la fois à la tangente à l'axe et à la normale à son plan osculateur, c'est-à-dire *autour du rayon de courbure* de l'axe ou fibre moyenne courbe de la tige fléchie et tordue [1];

---

[1] En effet, quand une tige naturellement droite a une section de l'une des formes *isotropes*, qui sont les seules pour lesquelles le plan de flexion coïncide avec le plan du moment des forces qui tendent à fléchir (n° XVI ci-dessus), si l'on décompose le moment de toutes les forces autour d'un point quelconque de l'axe de la tige, en deux autres, dont l'un s'exerce autour de cet axe, l'autre moment, qui sera le plus grand autour de droites perpendiculaires au même axe, opérera une flexion *dans son plan même*, et ce plan se trouvera être ainsi, en cet endroit, le plan osculateur de la courbe de l'axe fléchi. Mais il en sera autrement si l'axe de la tige avait primitivement une courbure, car elle se composera en chaque point avec la courbure nouvelle imprimée dans un plan généralement différent; ou bien si, d'après la forme hétérotrope de la section, la courbure imprimée l'est dans un autre plan que celui de ce deuxième moment qui la produit. Si nous représentons par M_x, M_y, M_z les moments, autour des parallèles aux coordonnées x, y, z menées après la flexion par un point (x, y, z) de l'axe ou de la fibre moyenne, des forces qui agissent depuis ce point jusqu'à une des deux extrémités de la tige; par M_n, M_ρ, M_s, les moments des mêmes forces 1° autour de la normale n au plan osculateur, 2° autour du rayon de courbure ρ, 3° autour de l'élément ds de l'arc s de la courbe, nous aurons, en appelant X, Y, Z les projections, sur les plans yz, zx, xy, du *parallélogramme de contingence* formé sur deux éléments consécutifs ds, $ds + d^2s$, c'est-à-dire en faisant

$$dyd^2z - dzd^2y = X, \quad dzd^2x - dxd^2z = Y, \quad dxd^2y - dyd^2x = Z,$$

et d'après les valeurs connues des cosinus des angles faits avec les trois coordonnées par n, ρ et ds:

$$\frac{\rho X}{ds^3} M_n + \frac{\rho}{ds} d\frac{dx}{ds} M_\rho + \frac{dx}{ds} M_s = M_x,$$

$$\frac{\rho Y}{ds^3} M_n + \frac{\rho}{ds} d\frac{dy}{ds} M_\rho + \frac{dy}{ds} M_s = M_y,$$

$$\frac{\rho Z}{ds^3} M_n + \frac{\rho}{ds} d\frac{dz}{ds} M_\rho + \frac{dz}{ds} M_s = M_z.$$

Quand la tige élastique est primitivement droite et quand sa section est iso-

et l'illustre géomètre omet de tenir compte de ce moment.

Poisson arrive en conséquence à ce résultat, donné comme un théorème général : « Que le moment de torsion est constant d'un bout à l'autre de la tige en équilibre », ou, plutôt, de chaque portion de cette tige où il n'y a que des forces pouvant être censées appliquées à son axe ou fibre moyenne (comme la pesanteur), ou, autrement dit, de chaque portion comprise entre des sections où peuvent s'exercer des forces dont la résultante est appliquée à une distance finie de cet axe par l'intermédiaire d'un bras de levier. Mais ce théorème n'est vrai que dans le même cas particulier de tige primitivement droite et de section isotrope ou d'égale inertie en tous sens, pour lequel les équations de Poisson sont complètes et le moment autour du rayon de courbure est nul à l'état d'équilibre définitif. Pour tout autre cas, le moment de torsion est variable; *sa dérivée, par rapport à l'arc de la courbe d'axe, est égale au quotient, par le rayon de courbure après la flexion, du moment des forces autour de ce rayon*; théorème aperçu par Wantzel en lisant une de nos notes, et qui doit remplacer celui de Poisson, pour chaque portion de tige définie et limitée comme on vient de dire [1].

---

trope ou d'égale inertie, la flexion n'a lieu, comme on vient de dire, que dans le plan du plus grand moment des forces autour des diverses perpendiculaires à son axe ou à sa fibre moyenne; en sorte que $M_\rho = 0$; et il faut effacer les seconds termes des premiers membres de ces trois équations, qui ne sont alors autre chose, aux notations près, que les trois équations de Poisson, numérotées (1) à l'article de la *Correspondance*, et (*b*) à la fin du n° 317 du *Traité de Mécanique*, car M_s est bien ce qu'il appelle le *moment de torsion*. Mais les termes en M_ρ subsistent dans tous les autres cas, et devraient figurer dans les équations que nous citons, présentées par Poisson comme générales.

[1] En effet, on a le moment de torsion $M_s = M_x \frac{dx}{ds} + M_y \frac{dy}{ds} + M_z \frac{dz}{ds}$ (notations comme tout à l'heure), d'où

$$dM_s = M_x d\frac{dx}{ds} + M_y d\frac{dy}{ds} + M_z d\frac{dz}{ds} +$$
$$+ \frac{dx}{ds} dM_x + \frac{dy}{ds} dM_y + \frac{dz}{ds} dM_z.$$

Le premier trinôme du second membre, multiplié par $\frac{\rho}{ds}$, est égal à M_ρ, car

XXI. **Suite. Mise en compte du troisième moment. Déplacement angulaire du rayon de courbure.** — Pour établir des équations générales et complètes de l'équilibre des tiges élastiques sur lesquelles agissent des forces extérieures, et qui affectaient avant cette action ou qui affectent maintenant une forme courbe non plane, il faut tenir compte de ce que les forces peuvent avoir, après la déformation éprouvée, le *troisième moment* dont on a parlé, qui tend à faire tourner une portion de la tige par rapport à l'autre portion autour du *rayon de courbure* de sa fibre moyenne au point où elles se joignent; moment dont l'existence peut provenir, avons-nous dit, ou de la courbure primitive cette fibre, ou de l'inégale flexibilité de la tige autour de ses diverses lignes normales, qui tient elle-même à la forme non isotrope ou d'inégale inertie des sections transversales.

Alors les trois équations d'équilibre de rotation qu'il convient de poser comme les plus simples, sont celles où l'on exprime les moments des forces autour de la tangente à la fibre moyenne en un point quelconque et autour des deux axes principaux d'inertie de la section au même point. Comme les rayons de courbure font généralement avec les axes d'inertie, après la déformation de la tige, des angles un peu différents de ceux qu'ils faisaient primitivement, ces rayons ont éprouvé, sur le plan des sections, un *déplacement angulaire*, ou, ce qui revient

---

$\rho \frac{d}{d} \frac{d(x, y, z)}{ds}$ représente les trois cosinus des angles faits par le rayon ρ avec les x, y, z; et le second trinôme est nul, comme on le reconnaît facilement avec Poisson par l'analyse (Mécanique, 1833, n° 318) ou avec M. Bertrand par un raisonnement synthétique (note III de la nouvelle édition de Lagrange), pour chacune des portions de tige limitées comme on a dit, ou qui ne sont sollicitées qu'à leurs extrémités par des forces autres que celles dont les résultantes partielles coupent l'axe courbe. Donc

$$\frac{dM_s}{ds} = \frac{M_\rho}{\rho},$$

relation donnée pour la première fois aux *Comptes rendus*, 15 Juillet 1844, t. XIX, p 182, dans une Note dont nous avions communiqué le contenu à Wantzel, qui, le jour même, y a ajouté ce théorème nouveau.

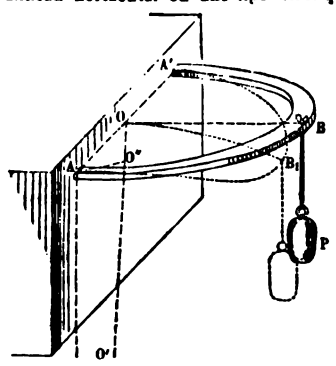
au même, les sections ont changé d'orientation ou d'azimut par rapport aux plans osculateurs qui les coupent suivant ces mêmes rayons. Ce déplacement angulaire est même lié aux deux autres éléments sur lesquels nous venons d'appeler l'attention, car il a toujours lieu quand les forces ont un moment autour du rayon de courbure et quand la tige de forme non plane a une section non isotrope (1).

Ce même déplacement angulaire relatif des sections et des rayons de courbure correspondants a autant d'influence sur la flexion d'une tige que le changement de sa première courbure, seul élément considéré par Lagrange, et sur la torsion que le changement de sa *cambrure* ou seconde courbure, ou des inclinaisons mutuelles de ses plans osculateurs, introduit par Binet.

La torsion, en effet, dans l'étendue d'un élément de la fibre moyenne, ou la rotation relative, autour de cet élément, des deux sections qu'il sépare, se compose de deux parties, dont l'une est l'augmentation qu'a éprouvée l'angle de *cambrure*

---

(1) On s'en rend compte clairement par deux exemples. Soit d'abord un demi-anneau horizontal ou une tige élastique mince dont la fibre moyenne est un demi-cercle ABA', encastrée et serrée solidement à ses extrémités A, A', et sollicitée à son milieu B par un poids P. La courbe à double courbure AB_1A' dans laquelle se change cette fibre moyenne aura, auprès de l'encastrement A ou A', pour projection horizontale le demi-cercle lui-même, et pour projection sur un plan vertical perpendiculaire au diamètre AOA', la courbe suivant laquelle fléchirait une tige droite horizontale de même section et d'une longueur OB, sollicitée au bout par la moitié du poids P. Son centre de courbure, pour le point A, sera O'', pied de la perpendiculaire abaissée de A sur la ligne de jonction OO' des centres de courbure de ses deux projections, car le carré de l'inverse de AO'' est égal à la somme des carrés des inverses de AO et AO'. Il y a donc eu un déplacement angulaire OAO'' du rayon de courbure, et il est dû à ce que la force P *a un moment autour de ce rayon* AO devenu AO'', indépendamment, dans ce cas, de la forme de la section, qui pouvait être circulaire aussi bien que rectangulaire.

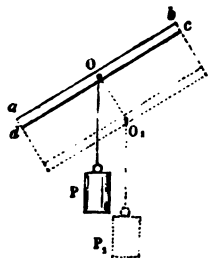


En second lieu, supposons qu'une pièce droite très-mince, telle qu'une lame de

formé par les deux plans osculateurs de la fibre aux extrémités de cet élément, et dont l'autre est la différence, aux deux mêmes extrémités, des déplacements angulaires qu'ont éprouvés les traces de ces plans sur les sections. Et, dans la même étendue, la flexion autour de chacun des deux axes principaux d'inertie d'une des deux sections voisines, a pour mesure l'augmentation éprouvée par l'angle de contingence *de la projection* de la fibre moyenne sur un plan perpendiculaire à cet axe; or cette augmentation dépend nécessairement de l'angle *nouveau* que fait le plan en question avec le plan osculateur qui contient les deux éléments consécutifs de la fibre qu'on y projette. La flexion dépend donc aussi du déplacement angu-

---

fer-blanc dont la fibre moyenne horizontale se projette en O, et dont les faces sont inclinées à l'horizon, soit sollicitée, à l'extrémité opposée à celle où elle est supposée encastrée, par une force OP verticale et agissant par conséquent dans un sens oblique aux côtés de la section *abcd*. Cette fibre fléchira, non pas dans le plan vertical de sollicitation se projetant suivant OP, mais dans un plan oblique se projetant suivant OO_1 presque perpendiculaire aux grands côtés *ab*, *dc*, d'après ce qu'on a dit page cxxj ou note du n° 83 ci-après) pour la flexion plane *déviée*. Or, supposons qu'au lieu d'une lame droite on ait une lame primitivement courbe dont la section encastrée soit toujours *abcd*, et dont la fibre moyenne soit une courbe plane se projetant suivant la verticale OP, ayant sa tangente horizontale en O; le rayon de courbure au même point O sera, après la flexion, dirigé suivant une ligne oblique telle que OO_1. Il aura donc éprouvé, sur le plan de la section *abcd*, *un déplacement angulaire* POO_1 qui sera dû, dans cet exemple, non au moment M_ρ, mais à ce que la section n'est pas ce que nous appelons isotrope, ou à la grande inégalité de ses deux moments d'inertie principaux.



En général, si ε est l'angle du déplacement du rayon sur une section, si I et I' sont ses deux moments d'inertie principaux, e l'angle primitif et par conséquent $e+\varepsilon$ l'angle ultérieur du rayon de courbure avec l'axe du moment I', et E le module d'élasticité, on trouve

$$\sin\varepsilon = \frac{\rho}{E}\left[M_\rho\left(\frac{\cos^2 e}{I}+\frac{\sin^2 e}{I'}\right) - M_n \sin e \cos e\left(\frac{1}{I}-\frac{1}{I'}\right)\right],$$

expression montrant bien comment le déplacement angulaire ε dépend à la fois du moment M_ρ autour du rayon de courbure, et de l'inégalité de I et I', qui constitue ce que nous appelons l'hétérotropie de la section.

laire qu'a pu subir, sur la section, la trace du plan osculateur; c'est-à-dire le rayon de la courbe non projetée [1].

Il en résulte qu'une tige courbe peut éprouver une flexion ou une torsion considérable sans que ses courbures ou sans que la forme de la fibre moyenne changent aucunement. Il suffit pour cela que ses sections tournent par rapport aux plans osculateurs, ou que ses rayons de courbure ne passent pas finalement par les mêmes points des sections que primitivement [2].

Toute analyse dans laquelle on voudra embrasser le cas le plus général de double courbure et de sections quelconques, et

---

[1] Si ε est le déplacement angulaire, ou si, e étant l'angle fait avec un des deux axes principaux par le rayon de courbure primitif ρ_0, $e+\varepsilon$ est l'angle que fait avec le même axe principal le rayon nouveau ρ, l'on a $\frac{\cos e}{\rho_0}ds$ et $\frac{\cos(e+\varepsilon)}{\rho}ds$ pour les angles de contingence primitif et ultérieur de la projection de la fibre moyenne sur le plan passant par cet axe d'inertie et par l'élément ds de la fibre; en sorte que la *flexion* autour de *l'autre* axe principal de la section correspondante, rapportée à l'unité de distance, est

$$\frac{\cos(e+\varepsilon)}{\rho}-\frac{\cos e}{\rho_0},$$

et la flexion autour du premier axe est, de même

$$-\frac{\sin(e+\varepsilon)}{\rho}+\frac{\sin e}{\rho_0},$$

ce qui donne

$$\sqrt{\frac{1}{\rho^2}-\frac{2\cos\varepsilon}{\rho\rho_0}+\frac{1}{\rho_0^2}}$$

pour la flexion résultante, égale à la racine de la somme de leurs carrés, et non pas $\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}$ comme l'ont cru d'illustres auteurs.

Et, quant à la torsion, ou à la rotation d'une section devant la précédente autour de la tangente, rapportée à l'unité de leur distance ds, elle est, d'après ce que nous avons dit des deux parties dont elle se compose

$$\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau_0}+\frac{d\varepsilon}{ds},$$

et non pas seulement $\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau_0}$; τ_0 et τ étant les rayons de cambrure avant et après la déformation, ou $\frac{ds}{\tau_0}$, $\frac{ds}{\tau}$ étant les angles primitif et ultérieur des deux plans osculateurs en deux points voisins distants de ds.

[2] Par exemple, si l'on fléchit une tige en arc de cercle ABC de manière à la trans-

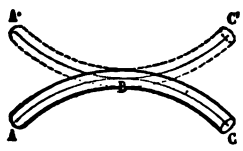
où l'on fera entrer les rayons de première et de seconde courbure, devra donc contenir aussi le déplacement angulaire dont nous parlons.

On ne pourra se passer de sa considération pour obtenir la forme finale de la fibre moyenne que dans les cas où il sera possible de se passer aussi de la considération des courbures, et de déterminer cumulativement ce qui vient à la fois de ces deux sortes d'éléments, à savoir les rotations, les unes relativement aux autres, des sections, ou plutôt de leurs éléments centraux puisqu'elles ne restent généralement pas planes.

C'est heureusement ce qui peut se faire dans le cas le plus usuel, celui des *très-petits déplacements*, où l'état nouveau de la tige est peu différent de l'état ancien, si ces déplacements n'influent pas sensiblement sur les grandeurs des bras de levier des forces qui font fléchir. Nous sommes parvenu, en 1843, à la suite de longs calculs où s'est trouvée comprise l'intégration de trois équations différentielles simultanées du troisième ordre non linéaires [1], à trois formules très-simples fournissant finalement, par des quadratures, les petits déplacements des points de la fibre moyenne d'une tige de forme quel-

---

former en un second arc A'BC' de même rayon et ayant, avec le même point milieu B et la même tangente en ce point, sa courbure dirigée en sens opposé, et si, en maintenant la tige dans son état nouveau, on la ramène en ABC par une demi-révolution autour de la tangente, elle sera restée *fléchie*, car ses fibres primitives les plus longues seront devenues les plus courtes et réciproquement, et cependant sa fibre moyenne sera revenue à sa situation première. Et le même effet de flexion aurait pu être obtenu sans changer cette situation ; il suffisait pour cela de faire tourner simultanément les deux sections extrêmes A,C d'une demi-circonférence autour de leurs centres, en contenant les sections intermédiaires entre des arrêts qui les empêchent de s'écarter latéralement sans les empêcher de tourner. Cette flexion tient à ce qu'il y a eu *déplacement angulaire* relatif des rayons et des sections, et il s'élève dans ce cas à deux angles droits.



On obtiendra de même une torsion, aussi considérable qu'on voudra, sans aucun changement de la seconde courbure ou des inclinaisons mutuelles des plans osculateurs, en fixant une des deux sections extrêmes d'une tige à double courbure ainsi contenue latéralement, et en faisant tourner, autour de son centre, l'autre section extrême, qui aura ainsi changé d'orientation ou d'azimut, comme toutes les sections intermédiaires, par rapport aux plans osculateurs ou aux rayons de première courbure.

(1) Mém. du 30 octobre 1843, *Comptes rendus*, t. XVII, p. 952.

conque [1]; elles ne contiennent plus ces angles et ces rayons que nous avions fait entrer dans notre analyse pour y arriver. Elles comprennent et redonnent celles de Navier relatives aux pièces courbes planes quand on néglige les extensions et les glissements dont il ne tenait pas compte [2]; et nous les avons appliquées à divers exemples de flexion et torsion d'un anneau par des forces perpendiculaires à son plan, et d'un ressort en hélice par des forces parallèles à son axe [3].

Nous avons dit, alors, qu'elles pouvaient être vérifiées et établies directement, en remarquant que leurs divers termes représentent de *petites rotations* des éléments de la fibre moyenne autour des axes coordonnés en vertu des forces extérieures. Cet établissement direct a été effectué par M. Bresse, qui a considéré et composé ensemble les effets des rotations relatives, non de ces éléments linéaires, mais des sections auxquelles ils étaient primitivement normaux [4], comme il avait fait pour la flexion plane dans son ouvrage sur les pièces courbes. Ses formules reviennent aux nôtres de 1843, car on les obtient immédiatement de celles-ci si l'on fait une intégration par parties et si l'on compose ensemble en une flexion unique, autour d'un axe à déterminer, les deux flexions que nous préférons toujours prendre séparément autour de deux axes *connus*, savoir les axes principaux d'inertie des sections. On doit à M. Bresse d'autres formules basées sur le même principe pour évaluer directement les rotations totales éprouvées par une quelconque des sections [5], ce qui permet ordinairement d'exprimer les conditions d'encastrement, de raccordement, etc., et de trouver la situation finale des points de la tige hors de sa fibre moyenne, d'une manière plus simple que par la considération, toujours sûre, des deux courbures et du déplacement angulaire des rayons de la première sur les sections.

Mais lorsque les déplacements des points de la tige sont

---

(1) Mém. du 6 nov. 1843, et note du 1er juillet 1844. *Comptes rendus*, t. XVII, p. 1021, et XIX, p. 45.

(2) Même mémoire de 1843, p. 1022. (3) *Idem*, p. 1026 à 1031.

(4) Cours de Méc. appl. Résist. des matériaux. 1859, p. 86.

(5) *Idem*, p. 91. Les formules de M. Bresse sont à modifier en ce qui regarde la torsion quand les sections ne sont pas circulaires; et, vu la courbure que les sections prennent, les rotations obtenues sont seulement celles de leurs éléments centraux

grands, en sorte que sa forme change considérablement, comme dans les cas de simple courbure traités par Euler et déjà par Jacques Bernoulli (ce qui peut avoir lieu sans altération de l'élasticité si la tige est mince), les rotations de ses diverses tranches ou sections successives ne peuvent plus être composées ensemble par simple addition, et il faut renoncer à cette simplification et aux formules qui en résultent, qui cessent encore d'être applicables lorsque les déplacements, bien que petits, ont une grande influence sur les bras de levier, comme dans le cas des pièces chargées *debout* ou très-obliquement, et qui peuvent être en même temps sollicitées par un couple qui donne une double courbure. Le problème de la détermination des changements sensibles que peut subir ainsi la forme des tiges a été ramené aux quadratures par M. Binet, et ensuite plus simplement par M. Wantzel, mais seulement pour le cas de tiges primitivement droites à section isotrope, où nous avons dit que les trois équations différentielles se réduisent à celles de Poisson, et en supposant que les forces n'agissent qu'aux extrémités et que la section soit constante. L'intégration dépend alors des fonctions elliptiques (1). On peut aussi résoudre le problème, et d'une manière simple, quand la tige, ayant une section même non isotrope, mais constante, a pour forme une hélice primitivement et finalement (2); et il serait résoluble sans doute encore, en tirant parti d'une remarque de M. Kirchhoff, pour divers cas où la forme primitive serait une de celles dans lesquelles une tige droite à section constante et isotrope est changée par

---

(1) La note de M. Binet se trouve aux *Comptes rendus*, 17 juin 1844, t. XVIII, p. 1145. Il exprimait les inclinaisons de la tangente par des fonctions elliptiques, et les coordonnées par des quadratures plus compliquées. Mais Wantzel, le 24 du même mois (*idem*, p. 1197), en prenant pour axe d'une des coordonnées la résultante des forces, simplifie et ramène tout aux fonctions elliptiques, même quand il y a, avec la résultante, un couple perpendiculaire, qu'il a rétabli sur une observation de M. Binet. (Voir aussi la note de M. Bertrand à la nouvelle édition de la *Mécanique analytique*). Il serait curieux d'étudier les intégrales, réduites au besoin en série, et d'en tirer un classement des courbes élastiques à double courbure provenant d'une tige primitivement droite et isotrope, comme a fait Euler pour les courbes planes.

(2) *Comptes rendus*, 6 novembre 1843, t. XVII, p. 1029, et surtout 15 juillet 1844, t. XIX, p. 186.

des forces qui agissent à ses extrémités [1]. On ramène encore aux quadratures le cas d'une tige primitivement droite à section isotrope, mais variable graduellement, sollicitée seulement par des couples qui coupent sa fibre moyenne primitive sous un angle constant, ce qui embrasse le cas plus particulier d'une tige droite *à section constante sollicitée par des couples à ses extrémités seulement*, et pour lequel Wantzel a trouvé que la forme finale est une hélice; ce qui a également lieu si la section et le couple variables se trouvent dans un rapport tel que le moment de torsion soit constant. Ce résultat généralise celui d'Euler relatif aux tiges droites, qu'il a reconnues prendre constamment la forme d'un arc de cercle sous l'action d'un couple quand la courbe dans laquelle il les change est plane.

Pour les cas de déformation considérable que nous venons d'énumérer, la forme définitive de la fibre moyenne peut être trouvée sans considérer l'orientation ou l'azimut des sections sur les plans osculateurs quand la tige n'est encastrée qu'en un seul endroit; mais il faut la considérer si la tige est assujettie en un second point où la section doive observer, comme à celui d'encastrement, une certaine polarité, ainsi qu'il arriverait si une tige à section carrée devait, quelque part, passer par un trou carré de même dimension que cette section. Et il faut déterminer cette rotation des sections de toute manière pour connaître ce que deviennent les points hors de la fibre moyenne, ou avoir l'état final complet de la tige et pouvoir calculer *sa résistance*.

---

[1] M. Kirchhoff remarque, en effet, qu'alors on peut faire subir à la tige une première déformation qui la rectifie, et partir de là pour arriver à la forme finale. (Ueber das Gleichgewicht....., *Sur l'équilibre et le mouvement d'une tige infiniment mince*, au Journal de Crelle, t. LVI, p. 308; et v. *App. compl.* p. 846).

Le même illustre professeur, à la suite d'une analyse sur laquelle nous reviendrons au n° XLI, qui offre plusieurs points d'analogie avec celle du problème de la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe (voir l'*Appendice complémentaire* ci-après, p. 848) a remarqué que le problème statique de l'équilibre d'une tige mince se résolvait dans les mêmes cas que le problème dynamique, en remplaçant l'élément dt du temps par l'élément ds de la fibre moyenne de la tige, et deux des moments d'inertie principaux du corps par les moments d'inertie principaux des sections de la tige. Comme le problème dynamique ne se résout que quand le solide est de révolution, le problème statique ne se résoudrait par cette analogie que lorsque la section a ses deux moments d'inertie égaux, c'est-à-dire dans le cas traité en 1844 par Binet et Wantzel.

XXII. **Mécanique moléculaire. Newton. Boscovich. Clairaut. Laplace. Poisson et Navier** (POUR LA PLAQUE ÉLASTIQUE D'ABORD). — Mais à toutes ces recherches fondées sur des hypothèses dont rien n'avait justifié encore l'approximation, et dont plusieurs même sont entachées d'erreurs heureusement sans influence ordinairement quant aux flexions, devait succéder un jour quelque chose de plus exact et de plus en rapport avec la manière dont la mécanique s'est constituée comme science *géométrique*, ou intimement liée à celle de l'étendue.

Longtemps elle ne s'est occupée que de poids ou d'efforts agissant d'une manière un peu vague sur les parties de divers appareils. Mais, plus tard, tout y fut mathématiquement déterminé : les efforts complexes furent géométriquement décomposés et remplacés par des forces partielles ou composantes; chaque force partielle eut une *ligne* unique pour direction; elle eut par conséquent un *point* d'application ou sur lequel elle agit; et la doctrine de l'action au seul contact venant à perdre faveur et à céder la place, sous l'empire des faits, à celle de l'action à distance que les anciens avaient déjà entrevue, chaque force eut nécessairement aussi un *point* dont elle émane ou dont elle tend à rapprocher ou éloigner l'autre. Les forces naturelles n'agissent en effet sur les corps que par d'autres corps. On ne juge même que l'un d'eux commence ou cesse d'éprouver telle ou telle action qu'en voyant d'autres corps le presser, le heurter, le quitter, en un mot changer de position par rapport à lui; en sorte que, dans l'ordre matériel, l'idée d'une action déterminée sur un point est pour nous inséparable de l'idée de situation relative, ou de distances à d'autres points [1].

---

[1] Ce n'est pas ici le lieu de développer la remarque que la *loi d'inertie*, ainsi exprimée : « la vitesse possédée par un corps ne change que quand une cause étrangère vient produire son changement, » ne fait qu'exprimer le principe de causalité, ou, ce principe étant admis, que cette identité : « la vitesse ne change que quand elle change; » à moins qu'on ne fasse consister ce que cet énoncé a d'essentiel dans la qualité d'*étrangère* exigée pour la cause. Or, cette cause étrangère survenue ne peut être, pour nos sens, ou hors des profondeurs de la métaphysique, *qu'un changement de situation d'autres corps* relativement à celui dont nous nous occupons. Les changements de vitesse, ou ce qu'on appelle aujourd'hui les *accélérations*, effets sensibles des *forces* que la science moderne a

Et Newton ayant appuyé de preuves le principes de l'égalité et de l'opposition directe d'une réaction à toute action, tous les phénomènes du monde physique furent désormais expliqués par *des attractions et répulsions mutuelles de points matériels s'exerçant dans les directions de leurs lignes de jonction deux à deux, avec des intensités et un sens dépendant des distances qui les séparent;* car il est bien manifeste que l'action n'a pas la même grandeur quand ils sont éloignés que quand ils sont proches, que les très-petits changements de la distance n'en produisent que de très-petits aussi dans cette grandeur ou intensité, enfin que les points très-voisins, tels que ceux qui semblent contigus, se repoussent quand on les approche davantage en les pressant l'un vers l'autre, et s'attirent ou s'entraînent mutuellement, lorsqu'ils font partie d'un même ensemble et qu'on fait effort pour les écarter. Les *liaisons* mêmes des diverses parties d'un corps devaient être finalement ramenées à de pareilles forces, qu'on était au reste obligé toujours de leur substituer quand il s'agissait d'exposer la mécanique des systèmes. Dès lors les abstractions purent être bannies, et l'on conçut mieux ce qu'il fallait entendre par la dureté, l'impénétrabilité, etc., et, aussi, par ces forces fictives appelées des résultantes de forces non concourantes ou appliquées à des points différents d'un même système de points.

Vainement cette grande loi des actions réciproques fonctions continues des distances est-elle contestée de temps en temps par des auteurs qui veulent repousser quelques-unes de ses conséquences. La rejeter nous semble supprimer la mécanique en tant que science mathématique, et tomber inévitablement dans des contradictions, car pour peu qu'on sorte du domaine de l'empirisme pur et qu'on présente quelque théorie, on l'invoque toujours, au moins tacitement, qu'on s'en aperçoive ou non (*voyez* Appendice V); et, ici comme toujours, le scepticisme embrassé systématiquement conduit à un dogmatisme plus arbitraire que celui qu'on a voulu éluder.

---

continué de faire intervenir dans ses calculs des effets, dépendent donc des distances mutuelles des points des corps; en sorte que la loi invoquée par nous reviendrait à celle d'inertie, que tout le monde invoque.

Newton, après l'avoir merveilleusement appliquée aux mouvements des corps célestes, que de grandes distances séparent, a indiqué son extension aux dernières particules situées à des distances mutuelles imperceptibles, comme pouvant rendre compte des phénomènes terrestres, tels que les combinaisons chimiques, la cohésion, la capillarité (1), enfin la réflexion et la réfraction de la lumière (2); et, dans deux passages (3), il parle du changement des attractions en répulsions, mais sans dire dans quelle circonstance ce changement peut avoir lieu.

En 1743, un physicien nommé Gourn Knight, cité par son compatriote Robison (4), faisant revivre cette grande idée, tenta d'expliquer la cohésion, le magnétisme, l'électricité, etc., par des forces d'attraction entre certains atomes en y joignant des forces de répulsion entre d'autres.

Mais, ainsi que le même Robison le reconnaît, ce fut le célèbre P. Boscovich qui, en 1755, donna sa vraie forme à cette dualité de causes, prise comme base des explications (5). Il y fut conduit par ses réflexions sur la *loi de continuité*, qui se trouvait mise en cause dans la dispute sur les forces vives et sur la communication du mouvement par le choc. Dès 1745, il disait (6) que la *force répulsive*, prouvée par l'élasticité et les vibrations, s'oppose à la contiguïté des particules des corps, etc., et son observation intelligente des faits l'amenait à professer qu'il n'y a pas, dans la nature, de corps rigide, ni de verge inflexible ou inextensible, ni d'appui absolument fixe, ni de force agissant instantanément, pas plus que de force simplement ré-

---

(1) Optique, Question XXXI et dernière.

(2) Principes, livre I, 14e section, propositions XCIV à XCVIII.

(3) Optique, même Question; p. 569 et 579-581 de la traduction de Coste, in-4°, deuxième édition, 1722.

(4) *A System of mechanical Philosophy*. Edinburgh, 1822, n° 262, t. I, p. 266.

(5) *De lege virium in naturâ existentium dissertatio*, habita in collegio romano a patribus Soc. Jesu, 4 septembris 1755. Et ensuite : *Philosophiæ naturalis theoria ad unicam legem virium in naturâ existentium reducta*, 1re édition, Vienne, 1758 et 2e, Venise, 1763.

(6) *De viribus vivis dissertatio*, au tome IIe des Commentaires *De Bononiensi scientiarum et artium instituto atque academiâ*, p. 289. Il l'exposa plus amplement en 1748 et en 1754 dans ses dissertations *De lumine* et *De continuitatis lege et ejus consectariis*.

sistante et non motrice, s'exerçant au contact; que les vitesses ne s'acquièrent qu'avec continuité et par degrés insensibles. D'où il déduisit le premier et soutint fortement que les points matériels envisagés deux à deux devaient tous être doués d'attraction pour certaine distance et de répulsion pour d'autres, ces distances passant intermédiairement par une ou plusieurs grandeurs pour lesquelles il y a équilibre ou action nulle, et que la répulsion croît indéfiniment pour les distances les plus petites, de manière à devenir insurmontable, et à s'opposer à tout contact entre points matériels, ce qui est le vrai sens à attribuer à l'*impénétrabilité*.

On peut combattre son opinion de l'unité d'espèce des atomes, ainsi que celle de la pluralité de leurs états ou distances d'équilibre, c'est-à-dire des intersections (et il en propose sept), par l'axe des abscisses ou des distances, de la courbe dont les intensités des actions sont les ordonnées, et qui a pour asymptotes les deux axes coordonnés des distances et des actions. On peut aussi ajourner, jusqu'à ce qu'on y soit logiquement contraint, son acquiescement à l'*inétendue* des dernières particules, ou à la non-divisibilité géométrique de la matière à l'infini, bien que cette doctrine ne répugne point à la raison et ne puisse être repoussée que par l'imagination temporairement, car elle n'anéantit aucunement le monde matériel. Ces trois points étant écartés ou réservés, le système des attractions et répulsions suivant les distances, mis en lumière par Boscovich, reste toujours comme étant le seul qui se concilie avec tous les faits et qui constitue rationnellement la mécanique comme science physico-mathématique. Il est le seul aussi qui laisse intacte la loi de continuité quant au temps et à l'espace, et par conséquent au mouvement, et qui, même dans ce qu'il a de plus hardi, ne la viole pas quant à la constitution de la matière, comme fait le système des corpuscules ou du vide passant brusquement au plein *étendu*, car un rebroussement ou un passage instantané par l'infini n'est pas regardé en mathématiques comme contraire à cette grande loi.

Clairaut fut le premier qui tenta d'appliquer, par le calcul, l'idée de Newton, c'est-à-dire les actions à de petites distances,

à un certain ordre de phénomènes, savoir, à ceux de l'ascension de l'eau dans les tubes capillaires. Il pose une formule, mais il se borne à énoncer [1], qu'il y a une telle loi inconnue d'attraction du verre sur l'eau qui donnerait des hauteurs en raison inverse des diamètres des tubes, conformément aux faits observés. Laplace la détermina en ce qu'elle a d'essentiel, car il prouva [2] que toute loi telle que l'action moléculaire devienne insensible quand la distance acquiert une grandeur perceptible satisfait à ce phénomène. Au moyen de cette simple supposition du décroissement extrêmement rapide de l'attraction du verre sur l'eau et aussi de l'eau sur elle-même quand les distances où elles s'exercent augmentent, la fonction des distances moléculaires qui représente cette action mutuelle ne se trouve engagée finalement que dans des intégrales définies, se réduisant à des constantes qui sont censées des données de l'expérience [3], en sorte qu'il n'est pas nécessaire de connaître plus amplement la forme de cette fonction.

C'est ce que Laplace a observé également en appliquant à la théorie de la réfraction de la lumière la considération des mêmes forces devenant insensibles à des distances sensibles.

La loi moléculaire régissant les phénomènes terrestres se trouvant ainsi constituée, fut appliquée pour la première fois à ceux de l'élasticité dans les recherches relatives aux *plaques* élastiques, sur lesquelles nous aurons à revenir (n°s LIX, LX). Poisson, en réduisant un solide de ce genre à un système de points matériels uniformément disséminés sur un seul plan [4], et auxquels il attribuait des masses proportionnelles à l'épaisseur de la plaque au droit de chacun, en sorte que leurs rapprochements les uns des autres, supposés développer entre eux des forces répulsives, n'étaient, dans son analyse, que ce qui

---

(1) Théorie de la figure de la terre.

(2) Méc. cél., suppl. au 10e livre. Et ensuite : Considérations sur la théorie des phén. capillaires, lues le 13 septembre 1819. t. XII des *Ann. de ch. et de ph.*

(3) Déjà Hauksbee, avant la publication de l'Optique de Newton, avait conclu, de ce que l'élévation de l'eau *est indépendante de l'épaisseur du tube*, que l'attraction ne doit être sensible qu'à des distances excessivement petites.

(4) Mémoire sur la surface élastique, inséré à ceux de l'Institut pour l'année 1812 (publiés en 1814). Et *Annales de chimie et de physique.*

vient du changement du plan en une surface courbe, parvint pourtant à une équation différentielle indéfinie du quatrième ordre, d'une forme exacte, mais dans les coefficients de laquelle l'épaisseur de la plaque n'entre qu'au carré tandis qu'elle devrait entrer au cube.

Navier, après ses beaux travaux sur les lames ou les tiges conçues comme composées de fibres qui s'allongent ou s'accourcissent, devait naturellement passer à des recherches sur les plaques, où il y avait à considérer des changements de deux dimensions à la fois.

Son analyse relative à ces sortes de solides [1] fut plus complète que celle de Poisson, et presque exacte (*voyez* n° LIX), car en supposant, ce qui est très-approximativement vrai, que les lignes matérielles menées primitivement dans une direction perpendiculaire aux deux faces de la plaque restent normales à ces faces devenues courbes, il tint compte de changements de distance moléculaire bien plus considérables que ceux qu'avait calculés cet illustre géomètre, savoir de ceux qui résultent de ce que les deux faces extérieures, et les plans intérieurs qui leur sont parallèles, s'étendent du côté devenu convexe et se contractent du côté devenu concave. Aussi l'épaisseur entre-t-elle au cube, comme elle doit le faire, dans les coefficients de son équation différentielle indéfinie, ainsi que dans ceux des équations définies au contour, qu'il donne pour la première fois (*voyez idem*), ce qui lui permet de présenter de remarquables solutions de plusieurs problèmes particuliers.

Ce mémoire sur les plans élastiques, du 14 août 1820, bien que peu connu et n'ayant été l'objet d'aucun rapport, signale cependant une remarquable époque, car, non-seulement, par la manière dont son auteur calcula le moment virtuel total des actions qu'exercent sur chaque molécule toutes celles qui l'environnent dans l'étendue de sa sphère d'activité, son auteur préluda à

---

[1] Recherches sur la flexion des plans élastiques; présentées le 14 août 1820 (et dont plusieurs membres de l'Académie reçurent des copies lithographiées). Il n'en a été publié qu'un *extrait au Bulletin de la Soc. phil.* pour 1823, page 92.

sa brillante découverte de l'année suivante dont nous allons parler, mais encore il fut l'occasion principale de celles de Cauchy sur la théorie des pressions dans l'intérieur des corps solides et des travaux ultérieurs de ce grand analyste sur le même sujet.

XXIII. **Fondation de la théorie générale de l'élasticité. Navier.** — Ce fut le 14 avril 1821 que Navier présenta son célèbre *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques* (1), qui a fondé la *Mécanique moléculaire* ou la théorie générale de l'Élasticité.

En considérant que les actions intérieures sont en équilibre, ou se détruisent sur chacune des molécules avant les déplacements relatifs que des forces extérieures font éprouver à celles-ci, Navier se bornait à calculer les augmentations et diminutions que ces actions subissent. Il leur attribuait, par une sorte d'extension du principe de Hooke et de Mariotte (n° IV), des intensités proportionnelles aux petits changements des distances mutuelles moléculaires, et aussi à une fonction de ces distances, d'une valeur sensible seulement pour des distances imperceptibles. Entre ces actions il posait les équations de l'équilibre sur une molécule, en exprimant son changement de distance à une quelconque de celles qui l'environnent, au moyen des trois coordonnées nouvelles de celle-ci, exprimées elles-mêmes par des développements de Taylor à trois variables, qui sont les trois projections rectangulaires de la distance primitive, et dont les puissances et produits du premier et du second ordre sont affectés par les dérivées des mêmes ordres des déplacements moléculaires par rapport aux coordonnées. Comme on peut, en formant les trois sommes de composantes rectangulaires des actions de toutes les molécules sur une seule, faire passer ces dérivées hors du signe de sommation ou d'addition Σ ou S, vu qu'elles sont sensiblement les mêmes, par hypothèse, pour toutes les molécules comprises dans une

(1) Tome VII des *Mémoires de l'Institut*.

portion imperceptible du corps, les trois équations d'équilibre indéfinies, ou à satisfaire pour tous les points du corps, sont assez faciles à établir [1]. Il ne reste plus qu'à déterminer les rapports mutuels des coefficients constants représentés par les diverses sommes Σ ou S dégagées ou débarrassées comme on vient de dire; c'est ce que fait Navier en les convertissant en intégrales triples $\iiint$, qu'il effectue par coordonnées polaires ou sphériques pour le seul cas de ces solides que Cauchy a nommés *isotropes* parce qu'ils offrent la même élasticité en quelque sens qu'on les envisage ou qu'on les *tourne* autour de chacun de leurs points. Les coefficients à déterminer au moyen de l'expérience se trouvent ainsi réduits de quinze à un seul par la nullité reconnue de neuf d'entre eux et l'égalité démontrée de trois autres au triple des trois derniers, égaux entre eux comme sont ceux-ci.

Mais il fallait, en outre, obtenir les équations d'équilibre *définies*, ou relatives aux limites, c'est-à-dire à la surface-enveloppe du corps élastique considéré.

Navier y arriva par une belle application, sous une forme nouvelle, de la méthode de la Mécanique analytique de Lagrange qui a, comme on sait, l'avantage de donner à la fois ces deux sortes d'équations, et qu'il avait déjà employée au même usage pour le problème de la plaque; méthode qui, à peu près abandonnée depuis en France, revit avec avantage dans les travaux publiés à l'étranger depuis trente ans. Pour cela, en posant [2] l'expression du *moment* ou travail *virtuel* de l'action de deux molécules, il en déduit ce qu'on appelle aujourd'hui le *potentiel* de cette action, c'est-à-dire le travail fini dont elle est capable, ou la quantité dont la *variation* ou différentielle par δ donne le travail virtuel élémentaire en question; puis, après avoir composé la somme des potentiels de toutes les actions, sur une même molécule, de celles qui se trouvent dans sa sphère

---

(1) Voyez *Appendice* V, § 65, p. 694.

(2) Voy. le commencement du § 85 à l'*Appendice complémentaire* ci-après, p. 796, où l'on a complété et généralisé l'analyse de Navier.

d'activité, et exprimé, par suite, la somme de ceux des actions intérieures pour tout le corps, il en égale la différentielle par δ à la somme, prise en signe contraire, des travaux virtuels des forces extérieures motrices, en y joignant ceux des forces d'inertie s'il y a mouvement, ce qui revient à chercher les conditions du minimum de la somme des potentiels de toutes ces forces. Les intégrations par parties, suivant la méthode connue, lui redonnent, par les termes restés sous le signe d'intégration triple, les trois équations d'équilibre indéfinies déjà obtenues d'une autre manière ; et les termes sortis de ce signe, ou restant affectés seulement d'intégrations doubles, facilement transformables en intégrations simples relatives aux éléments de la surface-enveloppe, lui fournissent les trois équations d'équilibre *définies* ou aux limites, à satisfaire pour les points de cette surface.

Celles-ci sont particulièrement dignes de remarque, car elles comprennent implicitement, dans leurs divers groupes de termes, les formules exprimant ce qu'on a depuis appelé les *pressions* ou tensions, forces élastiques. Aussi, bien que Navier n'ait point parlé de pressions dans les solides, nul n'est arrivé plus loin que lui quant aux conditions d'équilibre et aux équations du mouvement des solides élastiques isotropes ou d'égale contexture en tous sens, quand ils sont supposés se trouver avant les déplacements de leurs points dans l'état *naturel* [1] où aucune force extérieure n'y agissait.

XXIV. **Suite. Fresnel.** — De la même époque datent les mémorables travaux, sur la lumière, de ce grand physicien, et notamment l'explication qu'il a donnée des phénomènes de la double réfraction par le jeu des actions mutuelles des molécules du fluide éthéré, qu'il regarde, ainsi que Navier, comme proportionnelles aux changements très-petits qu'éprouvent, à partir de l'état d'équilibre, les distances mutuelles de ces molécules, *nécessairement séparées les unes des autres*, car, comme il le montre très-bien, si elles se touchaient ou si elles formaient

---

[1]) *Appendice* I, § 22, p. 560, et *App. complémentaire*, § 80, p. 771.

par leur ensemble une matière continue, elles ne pourraient pas propager, par une sorte de frottement de tranches parallèles, leurs vibrations, qui ne sont lumineuses que lorsqu'elles ont des directions transversales ou perpendiculaires au sens de propagation (comme l'ont prouvé ses expériences de non-interférence de deux rayons polarisés à angle droit). Ce qu'il y a d'étonnant, c'est que malgré plusieurs erreurs, et quoique Fresnel ne calcule que les réactions qui sont opposées en divers sens au déplacement d'un *seul* point du milieu éthéré de la part de ceux qui l'environnent, considération insuffisante, et malgré plusieurs autres défectuosités de sa théorie, il en déduit des conséquences qui sont exactes, ou du moins extrêmement approchées, et dont plusieurs étaient imprévues, et, depuis, ont été merveilleusement vérifiées par des expériences délicates. On peut l'attribuer à la grande force d'intuition et on pourrait dire de divination de l'illustre ingénieur-physicien; et aussi, sans doute, à ce qu'il y a entre les quantités qui varient d'une manière continue suivant les trois dimensions de l'espace, et qui sont susceptibles de se composer et de se décomposer géométriquement, telles que les petites réactions dont nous venons de parler, et telles aussi que les pressions, les dilatations, les moments d'inertie, les courbures, etc., certaines relations générales, dont Fresnel a donné un des premiers spécimens, et qui se retrouvent à peu près sous les mêmes formes dans des recherches sur des sujets très-différents, au moins lorsqu'on se borne aux approximations linéaires; d'où il suit que les résultats de raisonnements faits sur l'une d'elles peuvent convenir à d'autres qu'il eût fallu plutôt considérer.

Nous ne pensons pas pour cela qu'on doive attribuer à Fresnel, non plus qu'à Ampère, qui a présenté à ce sujet quelques considérations élevées, l'invention de la théorie de l'élasticité, qui, après Navier, doit être regardée comme appartenant à Cauchy.

XXV. **Suite. Théorie des pressions dans les solides. Dilatations en divers sens. Cauchy.** — Ce grand analyste, en effet, n'attendit même pas les publications du mémoire de Navier, d'avril 1821, et de celui de Fresnel,

dont la première communication à l'Académie est du 20 novembre de la même année, pour entrer dans cette carrière où il devait laisser de profondes traces de son passage. Le mémoire d'août 1820 sur les plans *élastiques* suffit pour éveiller son imagination inventive. Cauchy remarqua, dans une Note lue à l'Académie le 30 septembre 1822 [1], que Navier y avait considéré entre les points matériels deux espèces de forces, les unes développées par l'*extension* du plan moyen de la plaque, et dont il exprimait le moment ou travail virtuel comme avait fait Lagrange pour une simple membrane, sans l'affecter d'aucun coefficient constant dépendant de la nature ou de l'élasticité de la matière; les autres, développées par la *flexion* qui consiste dans les écartements des molécules du côté devenu convexe et les rapprochements du côté devenu concave, celles-ci calculées plus rationnellement de manière que leur expression se trouve finalement affectée d'un coefficient d'élasticité représentant la valeur inconnue, et déterminable par l'expérience, d'une intégrale définie comme on a dit. Les dernières forces étaient comme les premières, quant à leurs directions, perpendiculaires aux faces taillées normalement à la plaque, ce qui venait de l'hypothèse permise, mais simplement approximative, de la conservation de la normalité de ces faces. Or Cauchy observa « que ces deux espèces de forces pouvaient être réduites à une seule, qui devait s'appeler tension ou pression, étant de même nature que la pression d'un fluide en repos..., » à l'exception qu'*elle peut être oblique aux faces sur lesquelles elle s'exerce*, et qu'elle est, par conséquent, généralement inégale dans les divers sens ou sur les diverses faces se croisant en un même point de l'intérieur d'un corps.

Tel fut le point de départ de la théorie générale des pressions ou tensions dans des corps quelconques solides ou fluides, élastiques ou mous, en repos ou animés d'un mouvement intérieur. Leurs grandeurs sur diverses petites faces ayant leurs centres en un même point ont entre elles des relations régies

---

[1] Cette note, parafée par le secrétaire perpétuel à la date indiquée de 1822, a été imprimée au *Bulletin de la Société philomathique* de janvier 1823, page 9.

par ces deux théorèmes très-généraux dus à M. Cauchy : 1° La pression sur une face est résultante des pressions que supportent ses projections rectangulaires ou obliques sur trois plans quelconques passant par son centre. 2° Quand deux faces qui se coupent rectangulairement ou même obliquement ont le même centre et la même superficie, la pression sur l'une, décomposée dans un sens perpendiculaire à l'autre, est égale à la pression sur celle-ci décomposée perpendiculairement à celle-là [1]; théorèmes qu'il ne faut point confondre avec ceux de même forme, presque évidents, qui ont été aperçus et employés par Fresnel, car ceux-ci ne sont, comme on a dit, relatifs qu'aux forces qui tendent à ramener à sa position d'équilibre un point unique qu'on en a écarté.

Le second réduit à six les neuf composantes, en un point quelconque, suivant les directions de trois coordonnées rectangles, des pressions sur l'unité de trois faces perpendiculaires à ces coordonnées, car il en résulte que les six composantes tangentielles sur ces faces sont égales deux à deux. Le premier permet d'exprimer, en fonction de ces six composantes, celle de la pression sur une face oblique quelconque, décomposée dans une direction aussi quelconque (*V.* App. III, p. 548).

Une première conséquence est que si l'on imagine une infinité de petites faces planes de même superficie ayant leurs centres en un même point, on a des ellipsoïdes pour lieux des extrémités de droites tirées de ce point perpendiculairement aux faces, en leur donnant pour longueurs soit les pressions que celles-ci supportent, soit les racines carrées des inverses de leurs composantes normales aux faces [2]. MM. Lamé et

---

(1) Ils sont implicitement compris tous deux dans l'indication donnée, à la page 10 de la note citée du 30 septembre 1822, d'une relation entre la pression sur un plan quelconque et les pressions sur trois autres plans, et d'une première conséquence de cette relation, au bas de la même page.

Ils se trouvent démontrés tous deux à la page 48 des *Exercices de mathématiques*, deuxième année (1827), bien que le second seul y soit énoncé en langage ordinaire. Le premier n'a été énoncé que sous forme analytique, même par Poisson qui l'a démontré plus tard d'une autre manière sans citer Cauchy (Mém. du 14 avril 1828, au t. VIII de l'Institut).

(2) Mêmes mémoires de 1822 et 1827.

Clapeyron ont composé un troisième ellipsoïde en prenant pour rayons vecteurs les pressions elles-mêmes portées dans leurs propres directions. Les axes de ces trois ellipsoïdes ont les mêmes directions, et fournissent ce que Cauchy a appelé les trois pressions ou tensions *principales*, qui sont perpendiculaires aux faces sur lesquelles elles s'exercent, ce qui a encore de l'analogie avec un théorème de Fresnel (*V.* App. comp., p. 776).

Ces théorèmes sont des généralisations de celui de l'égalité et de la normalité des pressions en tous sens, s'observant dans les seuls fluides en repos, pourvu encore que ce soit hors des espaces capillaires ou suffisamment loin des parois qui les contiennent. Cauchy, en exprimant aussi l'équilibre d'un élément parallélipipède, a donné, sous le titre *Relations entre les pressions et les forces accélératrices*, trois équations qui de même généralisent celles de l'équilibre des fluides, et dont les premiers membres, au lieu de contenir seulement la dérivée de la pression par rapport à une des trois coordonnées rectangles, contiennent les sommes des trois dérivées, par rapport à ces coordonnées, des trois composantes, suivant une seule, des pressions sur l'unité de trois faces parallèles à celles de l'élément, et passant par son centre (*V.* App. III, p. 585).

En considérant ensuite, indépendamment de leurs causes, les proportions diverses des dilatations et condensations linéaires qui s'opèrent en tous sens autour d'un même point dans un corps que l'on déforme, Cauchy a trouvé qu'un élément primitivement sphérique prenait toujours la forme d'un ellipsoïde, et qu'on obtenait un autre ellipsoïde, remplacé quelquefois par deux hyperboloïdes conjugués, en portant sur les diverses droites tracées par un même point des longueurs égales aux racines carrées des inverses des dilatations dans leurs directions. D'où trois *dilatations principales*, suivant trois droites matérielles rectangulaires entre elles. Ces droites sont en chaque point les seules qui restent perpendiculaires aux plans matériels qu'elles coupaient déjà primitivement à angle droit ; toutes les autres *s'y inclinent* un peu, d'où il suit que généralement deux petites faces parallèles et proches *glissent* plus ou moins l'une devant l'autre par l'effet des déformations intérieures du corps que l'on considère (*V.* App. comp., p. 780.).

De la distribution symétrique soit des autres pressions, soit des autres dilatations autour de celles qu'il vient de déterminer ainsi, Cauchy conclut que dans les corps isotropes les pressions principales doivent avoir les trois mêmes directions que les dilatations linéaires principales. Il regardait, en 1822, celles-là comme proportionnelles à celles-ci supposées très-petites; mais, en 1828, il dut, après une nouvelle tentative, modifier cette hypothèse et composer chacune des pressions principales de deux parties, l'une égale à la dilatation linéaire de même sens multipliée par un coefficient constant, l'autre égale à la dilatation cubique (la somme des trois dilatations linéaires principales) multipliée par un deuxième coefficient, dépendant, comme le premier, de la nature du corps [1]; ce qui revient à supposer (comme fait maintenant M. Kirchhoff) que chaque pression principale est mesurée par la somme des trois petites dilatations principales multipliées par des coefficients qui, de neuf, doivent se réduire à deux inégaux, vu la symétrie nécessaire de composition des trois formules. A chacune des trois expressions, Cauchy ajoutait une constante représentant la pression, égale en tous sens, qui pouvait exister dans le corps isotrope antérieurement aux déformations qui en ont altéré l'isotropie. Il en déduisit analytiquement des expressions toutes semblables pour les trois composantes *normales* de pressions sur des faces quelconques non principales; et, pour les trois composantes tangentielles (qui alors ont des grandeurs finies), des expressions proportionnelles aux trois *glissements* correspondants, c'est-à-dire aux cosinus des angles légèrement aigus dans lesquels les petites déformations changent les trois angles droits des faces adjacentes d'un élément parallélipipède; cosinus qui reviennent aux quantités dont ces angles se sont rétrécis, ou à celles dont les côtés opposés des mêmes faces ont *glissé* les unes devant les autres pour l'unité des distances de ces côtés.

Cette première manière d'établir les formules des pressions, applicable, comme le pensait Cauchy, aux *masses continues* s'il en existe, n'est pas irréprochable. On ne voit pas en effet de

---

[1] *Exercices de mathématiques*, 3e année, p. 177, 178, formules (67) et (70).

raison de supposer *à priori* que les pressions principales ne dépendent que *linéairement* des dilatations principales, car toute fonction n'est pas développable suivant les puissances entières et ascendantes de ses variables en commençant par la puissance 1; et une fonction de variables supposées être assez petites pour qu'on puisse ne conserver que leurs puissances les plus basses, n'est pas, ainsi, nécessairement algébrique du premier degré (*V.* App. V, p. 663). Il était plus rationnel de partir du principe physique des actions exercées par les points matériels les uns sur les autres dans les directions de leurs lignes de jonction, et avec des intensités dépendant de leurs distances, ce qui se réduit, comme on a dit, à soumettre à la géométrie les forces qui agissent et réagissent, et à admettre les lois d'inertie et de réaction appliquées à des points matériels.

XXVI. **Formules générales pour les corps hétérotropes.** — C'est ce que fit Cauchy dans deux admirables Mémoires insérés aux *Exercices* immédiatement après celui dont nous venons de parler. Dans le premier, qui a été pour la plus grande partie présenté à l'Académie le 1er octobre 1827 (1), et dont l'objet est d'établir *les équations de l'équilibre d'un système de points matériels*, Cauchy opère comme a fait Navier à la première partie du sien (de 1821), mais avec cette différence essentielle qu'il fait entrer dans son analyse *les actions mutuelles totales des points*, fonctions de leurs distances nouvelles, au lieu de se borner comme Navier à ne considérer que *les accroissements* subis par ces actions, en abstrayant ce qui vient de leurs valeurs primitives. Comme il a soin de tenir compte de ce que les lignes de jonction des points matériels deux à deux ont changé non-seulement de grandeur, mais aussi de direction ou d'inclinaison sur les axes fixes des coordonnées, la fonction des distances nouvelles représentant l'action ultérieure des points n'apparaît dans ses calculs que divisée par ces distances; et c'est le quotient, et non pas la fonction elle-même,

(1) *Exercices*, 3e année (1828), p. 200.

qu'il développe suivant les puissances du très-petit accroissement de celle-ci [1].

Par là, Cauchy fait un calcul exact (à cela près des quantités d'ordre supérieur qu'on veut négliger), et embrasse le cas général où il y avait à l'interieur des corps, avant les déplacements opérés, des pressions absolument quelconques, égales ou inégales en divers sens. Son analyse embrasse aussi les corps *hétérotropes* ou de contexture inégale quelconque autour de chaque point, parce qu'il conserve, outre les six constantes qui sont les valeurs des composantes des pressions primitives, quinze coefficients distincts régissant l'élasticité, et se présentant sous la forme de sommes d'un très-grand nombre de produits de fonctions des distances d'un point matériel dans l'état primitif, par des puissances des cosinus des angles que ces distances aux points environnants formaient avec les axes coordonnés fixes. Il prouve ensuite que ces quinze coefficients se réduisent à six distincts dans le cas particulier et fréquent, considéré pour la première fois par lui, de trois plans rectangulaires de symétrie de contexture [2], et à un seul dans le cas plus particulier d'isotropie ou d'égale contexture en tous sens [3], cas où les équations se réduisent identiquement à celles de Navier quand on suppose nulle la pression antérieure aux déplacements; et il démontre ces réductions sans avoir besoin de convertir en intégrales autour d'un point les sommes de composantes d'actions, qu'il ne cesse jamais de représenter par un signe d'addition Σ ou S d'un nombre extrêmement grand, mais fini, de termes partiels.

---

(1) Cette remarque est essentielle. Si f est la caractéristique de la fonction, et si r et r_1 sont les distances primitive et ultérieure, Cauchy fait ainsi :

$$\frac{fr_1}{r_1} = \frac{fr}{r} + (r_1 - r)\frac{d\frac{fr}{r}}{dr} + \frac{(r_1 - r)^2}{2}\frac{d^2\frac{fr}{r}}{dr^2} + \ldots$$

ce qui donne autre chose que si l'on se bornait à faire $fr_1 = fr + (r_1 - r)\frac{dfr}{dr} + \ldots$, ce qui serait mettre r au lieu de r_1 au dénominateur du premier membre.

(2) *Exercices*, 3e année, p. 198.

(3) *Idem*, p. 201.

Dans son second mémoire, Cauchy calcule la pression ou tension de l'intérieur du même *système de points matériels* en y faisant entrer, comme dans les équations du premier mémoire, l'action nouvelle *totale* de deux quelconques des points sans abstraire leur action primitive, et en supposant encore quelconque la contexture du système dans les divers sens. Il obtient ainsi des formules très-générales, affectées des mêmes quinze coefficients (réductibles à six et à un dans les mêmes cas particuliers) que les équations du mémoire précédent, non compris les six composantes des pressions primitives, pressions qu'il ne suffit pas d'ajouter à celles que les déplacements développeraient si celles-ci étaient nulles, pour avoir les pressions ultérieures totales; en effet, ces pressions antérieures aux déplacements éprouvés entrent aussi dans les termes affectés des dérivées des déplacements des points, ce qui se conçoit sans peine si l'on considère que ceux-ci font tourner, dans l'intérieur du corps, la situation des plans menés parallèlement aux coordonnées, et changent par conséquent les grandeurs de la partie antérieure des composantes de pressions, qui étaient généralement inégales en divers sens [1].

Dans ce mémoire, Cauchy donne de la pression sur une petite face, pour la calculer, la définition mathématique suivante : « L'action totale exercée sur un petit cylindre matériel indéfini ayant cette face pour base, par toute la matière qui est de l'autre côté du plan prolongé de celle-ci. » Il en résulte la même chose dans le calcul en question, à cela près de quantités de l'ordre de celles qu'on néglige, que lorsqu'on donne de la pression cette autre définition plus simple, et que Cauchy a depuis trouvée meilleure : « La résultante de toutes les actions qui

---

[1] En mettant dans les formules de la p. 222 de ce mémoire, numérotées (25) à (30), à la place de la densité nouvelle ρ, la densité ancienne Δ divisée par la dilatation cubique, on obtient les six formules de pression sous la forme définitive qu'a dû en donner Cauchy, à la p. 138 de la 4e année (1829) des Exercices. Voyez ci-après Appendice III, § 23 (note) p. 564 et 571, et, surtout, Appendice complémentaire, § 84, p. 795, les formules (212), complétées par les formules (12) et (42) des pages 556 et 591.

s'exercent d'un côté à l'autre à travers la face [1]; » résultante facile à exprimer analytiquement, car on peut voir qu'elle est la même que « celle des actions qu'exercerait, sur chaque molécule m située d'un des deux côtés du plan de la face, un pareil nombre de masses concentrées au centre M de celle-ci, et égales, pour chaque molécule m, à la masse du cylindre oblique taillé dans la matière du côté opposé, ayant la même face pour base, et des arêtes égales et parallèles à la ligne de jonction Mm du centre M à la molécule m [2]. »

Ces formules des neuf composantes de pressions, réduites à six (conformément au deuxième théorème du n° XXV) sur des plans perpendiculaires aux coordonnées, et d'où l'on déduit facilement (par le premier théorème) la pression sur une face oblique quelconque, donnent le moyen de construire immédiatement les équations d'équilibre *définies*, ou relatives à la surface-enveloppe des corps élastiques. Elles dispensent ainsi de l'emploi de la méthode de Lagrange et de l'équation des travaux virtuels, traitée par le calcul des variations, que Navier a employée.

Elles donnent aussi, en substituant dans les relations entre les pressions et les forces accélératrices, tirées, avons-nous dit, (n° XXV), de l'équilibre de l'élément parallèlipipède, les *trois équations indéfinies*, toutes semblables à celles qui se trouvent construites directement au premier des deux mémoires cités de Cauchy, en mettant en équilibre les actions sur une molécule unique.

---

(1) Comptes rendus, 23 juin 1845, t. XX, p. 1765.

M. Duhamel a, le premier, proposé comme possible cette deuxième définition, mais sans s'y arrêter (1828, *Journal de l'École polytechnique*, 21e cahier, p. 213). Nous avons montré (Société philomathique, 30 décembre 1843, ou journal *l'Institut*, n° 534) qu'elle permettait seule de remplacer identiquement la résultante des actions moléculaires du dehors au dedans d'un élément polyédrique quelconque par la resultante des pressions sur ses faces. L'autre définition amène l'omission de certaines actions, et le double ou triple emploi d'un certain nombre d'autres. (*Voy.* aussi Appendice III, § 16, p. 544, note.) Cette définition évite aussi les difficultés des arêtes vives, rencontrées par Poisson à son mémoire du 12 octobre 1829 (*Journal de l'École polytechnique*, 20e cahier, nos 25, 49, 50, 53).

(2) Car le cylindre contient évidemment toutes les molécules, situées de son côté, qui agissent sur des molécules situées du côté opposé de la face à des distances égales et parallèles à M_m (Comptes rendus, 7 juillet 1845, t. XXI, p. 24. *Voyez* aussi Note du n° 152, § 8, p. 197, et, surtout, Appendice III, note du § 23, p. 565).

XXVII. **Suite. Poisson.** — Aussi, en traitant le même sujet, Poisson s'est-il dispensé de construire directement les équations de l'équilibre intérieur, et a-t-il commencé par l'établissement des formules de pression ses recherches, communiquées en partie à l'Académie le 1er octobre 1827 (1), ou le même jour que le premier mémoire de Cauchy, puis réunies dans son mémoire du 11 avril 1828 (2), modifié en plusieurs points par celui du 12 octobre de l'année suivante 1829 (3). Au grand mémoire de 1828, remarquable surtout par la partie philosophique et par de magnifiques applications, Poisson considère, comme faisait en même temps Cauchy (n° précédent), les actions *totales*, fonctions des distances moléculaires modifiées par les déplacements, et il calcule de suite la pression produite sur une face quelconque, oblique aux plans coordonnés, que Cauchy n'exprime qu'ultérieurement au moyen des pressions sur des faces parallèles à ceux-ci. Du reste, il est moins heureux que Cauchy, soit dans les raisonnements, soit dans les résultats obtenus; car, outre que les siens ne sont applicables qu'aux corps isotropes, on peut remarquer que dans les coefficients, qui sont des sommes triples prises par rapport aux grandeurs des distances moléculaires et par rapport à deux angles qui déterminent leurs directions, Poisson convertit en intégrations les deux sommations relatives aux angles; ce qui le détermine à supposer que la sphère d'activité, bien qu'imperceptible, comprend un nombre tellement immense de molécules que les actions qui s'exercent aux plus petites distances soient tout à fait négligeables devant les actions bien plus faibles, mais plus nombreuses, s'exerçant aux distances moins petites; hypothèse toute gratuite et même improbable, que Cauchy n'est point obligé de faire, car il laisse ses quinze coefficients sous forme de sommes de produits, com-

---

(1) Un extrait en a paru au *Ann. de ch. et de ph.* aussi en 1827, puis en janvier 1828 au Bulletin Férussac, t. IX, p. 27.

(2) Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques (qui a paru *in extenso* l'année suivante, au t. VIII de ceux de l'Institut).

(3) Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques et des fluides (*Journal de l'École polytechnique*, 20e cahier).

posés comme on a dit tout à l'heure. On peut remarquer aussi, comme le reconnaît Poisson au mémoire de l'année suivante (1829), où il reprend tous ses calculs (en évitant les deux conversions de sommes en intégrales dont nous venons de parler), que ses formules du mémoire de 1828 et du commencement de celui de 1829 représentent les *neuf* composantes, toutes inégales, des pressions qui s'exercent, non pas sur trois faces d'une superficie = 1 perpendiculaires aux coordonnées fixes, mais sur trois faces qui avaient cette superficie et ces directions *avant les déplacements des points*; formules qui prêtent ainsi à des erreurs [1], et auxquelles il est obligé de faire subir une transformation compliquée pour en tirer les *six* formules vraiment utiles de composantes [2], auxquelles Cauchy arrive très-directement et pour des corps de contexture quelconque, isotrope ou non.

Poisson consacre cependant aussi, au même Mémoire de 1829, un chapitre aux corps non-isotropes, qu'il réduit à ceux qui sont régulièrement cristallisés. Mais il se borne à poser, pour les six composantes, des expressions ayant une forme linéaire en fonction des neuf dérivées du premier ordre des déplacements dans les sens des trois coordonnées, par rapport à ces coordonnées; forme justifiée implicitement, pour ses lecteurs, par les considérations moléculaires des autres chapitres. Puis il montre la réduction à trente-six de leurs cinquante-quatre coefficients, sans apercevoir leur réductibilité à vingt-un inégaux au plus comme l'a montré Green [3], et même à quinze comme l'avait déjà prouvé Cauchy (n° précédent), et comme Poisson l'a reconnu plus tard en lisant à l'Académie, le 28 octobre 1839, son Mémoire *sur l'équilibre et le mouvement des corps cristallisés*, où il considère cependant les molécules non

---

(1) Comptes rendus, 28 juillet 1862, t. LV, p. 205.

(2) Mém. au 20e cahier du *J. de l'Éc. pol.*, de la page 47, où sont reproduites les form. de 1828 avec un signe différent (parce qu'au contraire de 1828 il attribue le signe + aux répulsions et le signe — aux attractions), à la page 52 où sont les formules définitives, conformes à celles de Cauchy du cas d'isotropie.

(3) Voy. 5e Appendice ci-après, § 70, p. 712.

plus comme de simples points, mais comme des groupes de points ou atomes pouvant tourner sur eux-mêmes [1].

Au même Mémoire du 12 octobre 1829, Poisson s'occupe des fluides et arrive, par un raisonnement différent, quant à la seule forme, de celui de Navier, aux équations trouvées en 1822 par celui-ci pour leur mouvement [2] en tenant compte, non pas, comme il le dit, de leur *viscosité* ou de l'*adhérence* de leurs parties (car les gaz n'en offrent aucune et ont cependant un frottement), mais de l'engrènement réciproque de leurs molécules ou du frottement mutuel de leurs couches; équations données aussi par Cauchy en 1828 comme pouvant représenter le mouvement intérieur des corps mous ou plastiques dénués d'élasticité [3], et pouvant encore s'obtenir par un autre moyen très-simple [4]. Mais ces équations ne sont applicables que pour les mouvements extrêmement lents et réguliers que prennent les fluides dans des cas exceptionnels, par exemple lors de leur écoulement par des tubes ou des vaisseaux capillaires. (*V.* App. V, p. 734.)

Poisson y prélude aussi aux recherches originales et dignes d'attention publiées en 1831, sous le titre : « Nouvelle théorie de l'action capillaire, » et qui doivent être étudiées, au moins dans leurs généralités, pour se faire une idée des questions que soulèvent les considérations de mécanique moléculaire, applicables aux solides comme aux liquides.

XXVIII. **Suite. Poisson et Cauchy (pour les sommes non remplaçables par des intégrales.)** — On voit en effet à cet ouvrage, entre autres choses remarquables, que Poisson insiste (comme dans ses écrits de 1828 et 1829) sur la nécessité de laisser sous forme de sommes d'un nombre fini quoique considérable de termes, les coefficients des formules, et, si l'on y remplace par des intégrations les sommations relatives aux angles (comme il faisait en 1828), de se bien

---

(1) Mém. de l'Institut, t. XVIII.

(2) Mémoire sur le mouvement des fluides en tenant compte de leur viscosité, etc. Institut, t. VI.

(3) Exercices, 3e année.

(4) Comptes rendus, 27 novembre 1843, t. XVII, p. 1240.

garder de faire de même pour les sommations relatives aux distances; car si ces coefficients étaient convertis en intégrales définies depuis une valeur zéro de la distance, une intégration par parties donnerait des pressions intérieures *nulles* après les déplacements quand elles le sont avant [1], et l'on déduirait encore, des coefficients ainsi convertis, d'autres conséquences tout à fait contraires aux faits, savoir que les pressions ne varieraient que comme les carrés des densités, et qu'elles seraient toujours normales aux faces, ou qu'elles n'auraient pas de composantes tangentielles. Ces considérations, bien que d'une apparence purement analytique, sont d'une haute portée pour la philosophie de la science. Elles prouvent, comme Fresnel l'avait déjà remarqué avec une grande sagacité pour l'éther (n° XXIV) que les corps, même fluides, avec les propriétés que tous les faits dénotent, ne sauraient être formés d'une matière continue; conclusion qui, étendue à la constitution des dernières particules, fait disparaître même les atomes étendus et figurés, mais insécables et invariables, de Leucippe et de Démocrite, conservés jusqu'à nos jours, pour faire place à ceux du système dont nous avons parlé au n° XXII; système préconisé par divers physiciens anglais et allemands qui n'y voient nullement un idéalisme négateur de la matière, et adopté, parmi nous, pour d'autres raisons encore, par Ampère, ainsi que par Cauchy qui en a

---

(1) En effet, r étant la plus petite valeur des distances r entre les molécules, et Γ la plus grande de celles pour lesquelles leur action fr a une grandeur sensible, l'intégration par rapport aux angles donne pour la pression primitive K et pour le coefficient d'élasticité k affectant les dérivées des déplacements

$$K = \frac{2\pi}{3}\int_r^\Gamma r^3 fr.dr, \quad k \text{ (ou } \varepsilon \text{ de Navier)} = \frac{2\pi}{15}\int_r^\Gamma r^5 \frac{d\frac{fr}{r}}{dr}dr.$$

Or la deuxième expression, intégrée par parties, donne :

$$k = \frac{2\pi}{15}(\Gamma^4 f\Gamma - r^4 fr) - K.$$

Le premier terme entre parenthèses est nul puisque fr devient tout à fait insensible avant que r ne soit grand, et le deuxième est nul aussi pour la limite inférieure $r = 0$ à moins qu'il n'y ait des répulsions infinies du quatrième ordre au contact, et que ce ne soient ces répulsions-là qui seules déterminent la valeur de k lorsque la pression primitive K est nulle; ce qui exclurait toute élasticité.

fait le sujet d'une de ses leçons de physique supérieure, à Turin en 1832 (1).

Cauchy avait montré en effet, aussi en 1828, mais sans y appuyer autant que Poisson (2), que l'on tombe dans les conséquences signalées, si contraires aux faits (proportionnalité des pressions aux carrés des densités, et nullité des composantes tangentielles) si, sans même supposer la continuité de la matière, on admet seulement comme Poisson « qu'on puisse abstraire l'action, sur une molécule, de celles des molécules environnantes qui en sont le plus proches, » vis-à-vis de l'action des autres, supposées en nombre immense malgré la petitesse de la sphère d'activité; opinion émise pour la première fois par Poisson dans une lettre d'octobre 1827 (3), et où l'on s'étonne de le voir persister en 1829 (4) et 1830 quand il n'en a plus besoin, puisque alors il n'intègre pas plus par rapport aux angles que par rapport aux distances.

Au reste, les calculs qui ont pour base la loi moléculaire des actions fonctions des distances ne supposent pas admis nécessairement, comme quelques auteurs anglais l'ont pensé, le système de Boscovich ou des atomes inétendus. Ces calculs n'exigent même pas que les dimensions des atomes, si on leur en attribue, soient supposées très-petites par rapport aux distances mutuelles de leurs centres de gravité; car ces sommes relatives aux distances d'un point à tous les points environnants (5), qui forment les coefficients constants des formules,

---

(1) Un écrit de treize pages, sur ce sujet, a été inséré à la date du 20 janvier 1844 au Bulletin de la Société philomathique de Paris. Un court extrait en a paru aussi au n° 528 du journal *l'Institut*, du 7 février, p. 48.

(2) Exercices, 3e année, p. 203, 204 de son premier mémoire cité, et p. 225, 230, 231 du second.

(3) *Annales de Chimie et de Physique*.

(4) Mémoire du 12 octobre 1829, au 20e cahier du *Journal de l'École polytechnique*, art. 3 ou p. 7.

(5) C'est-à-dire ces sommes $S\frac{\rho m}{2}F(r)\cos^n(r,x)\cos^{n'}(r,y)\cos^{n''}(r,z)$, où ρ est la densité du corps, r sont les distances d'un point à tous les atomes ou éléments d'atomes dont les masses sont m et qui se trouvent compris dans sa très-petite sphère d'activité sensible; n, n', n'' sont des exposants entiers dont la somme est 4 pour les principaux des coefficients ainsi exprimés; enfin $F(r)$ est

peuvent tout aussi bien être composées d'un nombre infini de termes, même pour chaque atome, que d'un nombre total fini. Il suffit, pour pouvoir établir les équations, que les atomes ne se touchent pas, ou ne soient point fondus en une masse ininterrompue.

Ce n'est même pas précisément dans la conversion de chaque somme Σ ou S en une intégrale que gît le danger des conséquences fausses; c'est, comme l'a très-bien remarqué M. Clausius [1], dans la supposition que la limite inférieure de l'intégration pour les distances soit zéro. Dès qu'on prend une limite inférieure finie, si petite qu'elle soit, qui sauvegarde la non-contiguïté des dernières parties, rien n'empêche d'intégrer si cela est commode pour obtenir des résultats d'une certaine forme; car si une intégrale ne peut guère être substituée à une somme particulière relative aux diverses molécules qui en entourent une seule, elle peut très-bien l'être à une *moyenne* d'un très-grand nombre de pareilles sommes, vu la compensation qui s'opère alors entre les inégalités ou irrégularités individuelles; et cette moyenne est, après tout, seule à considérer dans les applications, comme dit le même savant. De là l'accord des équations trouvées par Cauchy et par Poisson avec celles auxquelles Navier était arrivé sans discuter ce qui résulterait des transformations analytiques du coefficient qu'il trouve, et qui se présente sous forme d'intégrale définie. De là aussi la possibilité, malgré quelques objections de Poisson, de continuer de se servir, dans ces sortes de recherches, comme font encore les géomètres anglais et allemands, des méthodes de la mécanique analytique de Lagrange, qui, d'ailleurs, permettent très-bien de laisser subsister sous forme de simple somme Σ ou S, les coefficients ressortant des résultantes d'actions sur chaque point matériel, tout en faisant entrer ensuite, dans l'analyse, des intégrales triples prises pour toute l'étendue du système; ce qui n'a

---

une fonction qui se déduit de celle $f(r)$ représentant l'action mutuelle à la distance et dans la direction r pour l'unité de masse des points matériels qui l'exercent l'un sur l'autre.

[1] Ueber die Veranderungen, etc., aux *Annales de Poggendorff*, vol. LXXVI, p. 56-58.

pas plus d'inconvénients que l'usage, fait aussi par Laplace, des intégrales dans la théorie capillaire, et que tout autre emploi du calcul différentiel et intégral pour les corps solides ou fluides qu'on sait très-bien être discontinus ou composés d'un nombre fini, quoique très-grand, de molécules isolées (1).

XXXIX. **Suite. Polémique entre Poisson et Navier. Remarques de M. Clausius.** — Ici doit trouver place la mention de cette vive polémique soutenue en 1828 et 1829. Poisson, dans son premier mémoire, d'avril 1828, en donnant un historique du problème des corps élastiques, n'avait fait nulle mention de Navier qui, le premier, l'a mis en équation; mais, faisant cependant à son travail une allusion évidente, il avançait que des recherches où les résultantes d'actions entre molécules étaient exprimées par des intégrales, et même toute analyse où l'on opérait des intégrations, comme celles que comporte l'usage du calcul des variations appliqué suivant les règles de la mécanique analytique de Lagrange, n'était bonne que pour les masses continues s'il en existe, et était tout à fait impropre à donner les conditions d'équilibre des corps élastiques tels qu'ils sont dans la nature, c'est-à-dire formés de molécules disjointes (2). Dans ses répliques aux réponses de Navier qui trouvait étrange une pareille exclusion, il reprochait encore à celui-ci d'avoir abstrait les actions primitives entre les molécules pour ne faire entrer dans son calcul que leurs changements de grandeur. Et Arago, rédacteur du recueil qui servait d'arène à cette discussion, la fermait par une Note (3) où il demandait à Navier comment il pouvait concevoir un corps dont tous les points matériels seraient sans action les uns sur les autres dans l'état naturel, etc.

Tous ces reproches étaient ou sans fondement ou exagérés.

---

(1) Voyez 5e Appendice, § 74, p. 743, et Appendice complémentaire, §§ 84, 85.

(2) Note sur les vibrations des corps sonores, aux *Annales de Chimie et de Physique*, 1er octobre 1827, — ou Bulletin Ferussac, 1828, t. IX, p. 27. — Et Mémoire du 14 avril 1828 au t. VIII de ceux de l'Institut, art. 14, p. 400.

Voyez, pour le reste de la discussion, les *Annales de Chimie et de Physique*, t. XXXVII, XXXVIII, XXXIX, juillet, août et octobre 1828, et janvier 1829.

(3) Mêmes *Annales*, t. XL, 1829.

Au dernier, Navier répondit très-bien, dans une Note récapitulative insérée au *Bulletin des sciences* de M. de Ferussac [1], qu'il avait regardé comme nulles, non pas les actions antérieures aux déplacements, mais leurs résultantes, ce qui est en effet possible quand on suppose qu'il n'y avait pas primitivement de pressions [2]. Il est bien vrai (comme nous avons dit tout à l'heure) qu'on ne doit pas prendre les intégrales figurant comme coefficients depuis des valeurs nulles des distances, comme si la matière était continue, mais cela n'empêche pas d'être exactes les équations de Navier, où ces intégrales définies restent ineffectuées et donnent des expressions qui n'auraient plus rien d'impossible en prenant une autre limite inférieure que zéro, comme nous avons vu (n° précédent) que l'a très-bien remarqué M. Clausius; et cela empêche encore moins, comme nous avons dit aussi, d'appliquer aux systèmes moléculaires le calcul intégral et le calcul des variations [3].

A cette discussion se trouvent mêlées des considérations des deux illustres savants sur la question des plaques élastiques, qui n'aurait pas dû les diviser, car Poisson y reconnaît que la méthode de son mémoire du 1er août 1814, où il supposait la plaque sans épaisseur, ne mettait pas en jeu les véritables forces; et celle dont il fait usage en 1828, comme application des formules générales nouvelles, le conduit précisément aux mêmes équations que Navier avait obtenues en 1820, sauf l'une des équations *aux limites* ou aux bords de la plaque. (Voyez nos XXII et LIX.)

On y trouve aussi de lumineuses observations sur la forme possible de la fonction des distances entre deux molécules, capable d'exprimer leur action mutuelle. Si on la représente par un seul terme affecté d'une exponentielle, comme avait fait Poisson à son mémoire de 1828, on satisfera bien à la condition de la diminution rapide de l'action pour peu que la distance

---

(1) *Bulletin universel des Sciences et de l'Industrie*, 1re section, mars 1829.

(2) Voyez ci-après, Appendice complémentaire, § 80, p. 771.

(3) Voyez *idem*, §§ 83, 84, 85, p. 783 à 800.

augmente [1], mais elle restera toujours de même signe quelle que soit la distance, et l'équilibre *naturel* ou sans forces extérieures sera impossible; car, comme le rappelle Navier, cet équilibre exige que les actions mutuelles soient répulsives pour certaines distances, et attractives pour d'autres. Aussi Poisson reconnaît [2] qu'il aurait dû prendre pour l'action moléculaire *une différence* de deux fonctions de cette forme [3].

XXX. **Suite. MM. Lamé et Clapeyron.** — Pendant la même année 1828 fut envoyé à l'Académie, sur le même sujet, un mémoire remarquable de lucidité et de sagacité, où ces deux ingénieurs français, alors en mission en Russie, arrivèrent aux mêmes équations indéfinies que Navier, en exprimant, comme lui, mais sans avoir eu connaissance de ses recherches, l'équilibre, sur une seule molécule, des actions développées par les petits changements de distance des molécules environnantes, et supposées proportionnelles à ces changements; en abstrayant, comme Navier, les actions antérieures, supposées se faire équilibre naturellement ou sans forces extérieures dans l'état qui a précédé les déplacements des points. Et les mêmes considérations les conduisirent directement aux formules des *pressions* pour les corps isotropes.

La manière dont ils en déduisirent un grand nombre de théorèmes sur les pressions prouverait qu'ils n'avaient pas non plus pris connaissance des mémoires présentés en 1822 et 1827 par Cauchy, qui était arrivé à une grande partie de ces théorèmes pour des corps d'une contexture absolument quelconque en repos ou en mouvement.

Nous reviendrons sur ce mémoire aux n°s XXIII et XXV.

---

(1) La forme que Poisson donnait comme exemple était $a.b^{-\left(\frac{r}{n\alpha}\right)^m}$, a et b étant deux constantes, r la distance, α le plus petit intervalle moléculaire, n un nombre très-grand, et m un très-grand exposant positif, afin que, conformément à son idée (n° XXVII) l'action restât presque constante et égale à a tant que r ne comprend pas un grand nombre de fois α, et décrût rapidement quand r devient plus grand que $n\alpha$.

(2) Note de M. Arago (*Ann. de Chimie et de Physique*, janvier 1829, p. 103); et Deuxième mémoire de M. Poisson, 12 octobre 1829, p. 6 et 15.

(3) Voyez ci-après, 3e Appendice, § 16 (note), p. 543; et 5e Appendice, p. 739.

XXXI. **Suite. M. Duhamel (Prise en considération des températures).** — Peu de temps après furent présentés et publiés au *Journal de l'École polytechnique* plusieurs mémoires remarquables de mécanique moléculaire, approuvés par l'Académie, où M. Duhamel, aujourd'hui membre de ce corps savant, tenait compte des changements de température développés par les changements de volume des diverses parties des corps élastiques (1). M. Wertheim en a tiré des conséquences relatives aux différences qu'on trouve constamment entre les valeurs des coefficients d'élasticité déduits du mesurage statique, et ceux que l'on conclut de l'observation du nombre des vibrations dans l'état dynamique.

Au reste, les effets mécaniques de la variation de température des barres soumises à un effort de traction peuvent être évalués approximativement d'une manière élémentaire dans beaucoup de cas, comme a fait M. Poncelet au n° 308 de l'*Introduction à la mécanique industrielle.*

XXXII. **Premières applications de cette nouvelle branche de la mécanique, par Poisson et Cauchy.** — La découverte ainsi faite d'une nouvelle branche de la science de l'équilibre et du mouvement eut une influence marquée sur la manière dont cette science en général fut bientôt enseignée. Le beau préambule du mémoire de Poisson de 1828 contribua sans doute pour beaucoup, avec les travaux de Navier, et avec quelques passages d'un livre de Coriolis (2), et, aussi, des premières le-

---

(1) Mémoire sur les équations de la propagation de la chaleur dans les corps solides dont la conductibilité n'est pas la même dans tous les sens; 7 avril 1828 (*Journ. de l'École polyt.*, 21e cahier). — Second mémoire sur les phénomènes thermo-mécaniques, lu le 23 février 1835 (*idem*, 25e cahier). — Sur le calcul des actions moléculaires développées par les changements de température (*Savants étrangers*, t. V).

(2) *Du Calcul des effets des machines*, 1re édition, 1829, ch. III. — A la 2e édition (1844, posthume) de ce livre, on a ajouté, entre autres choses, la matière d'un « Mémoire sur la manière d'établir les principes de la mécanique pour des systèmes de corps en les considérant comme des assemblages de molé-

çons de M. Poncelet aux ouvriers de Metz, à faire substituer désormais les réalités physiques, c'est-à-dire la compressibilité, l'élasticité, l'action à distance et sa transmission graduelle par les tiges et les liens, etc., aux abstractions de dureté absolue dans les solides, d'inextensibilité dans les liens, d'action instantanée au seul contact, etc., en sorte que, bien que les savants cités ici n'aient pas toujours écrit à ce point de vue, on met aujourd'hui généralement en pratique une pensée qu'avait eue Laplace dès 1825 (1), d'introduire dans les démonstrations de la mécanique, pour leur donner plus de clarté et pour se rapprocher de la nature, la considération des actions réciproques à de petites distances, qui régissent les phénomènes terrestres.

Mais la mécanique moléculaire ou la théorie de l'élasticité des solides eut aussi pour application, presque immédiatement, la solution de divers problèmes utiles. Pour nous borner ici à ceux d'équilibre (devant parler plus loin de ceux de mouvement), Poisson reconnut dès 1827, comme conséquence évidente des formules de composantes normales de pressions, que lorsqu'un prisme élastique est dilaté dans le sens de sa longueur par une force de traction parallèle à ses arêtes, distribuée uniformément sur ses bases, et que ses faces latérales sont libres, il y a, dans les sens transversaux, *une contraction* dont la proportion est le quart de celle de la dilatation pour les corps d'égale élasticité en tous sens (2), résultat auquel arrivèrent M. Cauchy (3) et MM. Lamé et Clapeyron l'année suivante (4), et qui a été aussitôt confirmé par une expérience de M. Cagniard de Latour, autant que le permettait le degré d'exactitude du mode d'observation employé.

---

cules, » inséré en 1835 au *Journal de l'École polytechnique* (24e cahier), et où Coriolis veut bien citer (page 94, note) un mémoire du 14 avril 1834, trouvé alors hardi par lui et par M. Poncelet, présenté par nous à l'Académie sur cette même manière de démontrer les théorèmes généraux du mouvement et de l'équilibre des systèmes.

(1) *Mécanique céleste*, fin du chapitre 1er du livre XII.

(2) *Annales de Chimie et de Physique*, 1827.

(3) *Exercices de mathématiques*, 3e année.

(4) *Savants étrangers*, t. IV, p. 508 (n° 40).

Poisson déterminait aussi les rapports de ces deux effets à celui de contraction générale produit par une pression de même intensité, appliquée sur toute la surface d'un corps isotrope de forme quelconque; et il résolvait divers problèmes élémentaires sur les sphères creuses en même temps que MM. Lamé et Clapeyron, qui en résolvaient d'analogues sur les cylindres creux (n° LVIII ci-après).

Passant aux problèmes de la torsion et de la flexion des cylindres, qu'il suppose à base circulaire, et de dimensions finies en tous sens, Poisson, faute de pouvoir donner, des équations différentielles de leur équilibre, des intégrales qui ne sont point encore trouvées pour tous les modes de sollicitation, même aux seules extrémités, tente de résoudre le problème d'une manière approchée quand les dimensions transversales sont très-petites. Pour cela il fait une supposition difficile à justifier, et qui conduit à des résultats souvent justes, mais quelquefois faux, à savoir que les pressions intérieures, ainsi que les déplacements des points, sont exprimables en séries convergentes procédant suivant les puissances entières des petites coordonnées transversales [1]. Ces séries, à coefficients indéterminés, étant mises dans les équations différentielles définies et indéfinies à la place des quantités inconnues, donnent, par la comparaison des termes affectés d'une même puissance, et eu égard à la nullité supposée des pressions sur les faces latérales, une suite d'autres équations plus simples, qu'il combine de manière à en tirer les coefficients, en effaçant finalement les termes d'un degré supérieur tantôt au premier, tantôt au second degré. Il arrive ainsi aux formules connues de la flexion et de la torsion des cylindres à base circulaire, formules dont la démonstration ordinaire est fondée, en effet, sur des suppositions qui reviennent à celles de Poisson mais où l'on se borne à des termes du premier degré. Nous parlerons au n° LIX de la solution que le même illustre savant a donnée, au moyen d'une hypothèse analogue, du problème de l'équilibre et du mouvement des plaques.

---

(1) Mémoire de 1828, n°s 34, p. 447, et 41, p. 461.

Vers la fin de la même année 1828, sans connaître les travaux de Poisson autrement que par deux courts extraits n'indiquant pas ses procédés, Cauchy appliquait également le développement supposé possible en séries entières, à la détermination de la flexion des lames minces, d'une largeur indéterminée ou indéfinie (en supprimant la considération de la dimension ou de la coordonnée dans son sens); et, ensuite, des tiges à section rectangulaire finie, d'une épaisseur constante ou variable, dont la fibre moyenne est primitivement droite ou courbe, et dont la matière est isotrope ou hétérotrope; et il arrivait ainsi aux formules fournies par les hypothèses, un peu plus restreintes, de la théorie ordinaire (1). (Voyez n° XLI.)

XXXIII. — **Applications, par MM. Lamé et Clapeyron.** — Ils ne s'occupèrent pas de la flexion, pour laquelle Poisson et Cauchy n'ont trouvé que des résultats simplement approchés et discutables. Mais dans leur grand mémoire, où rien, dans les applications, n'est donné à l'hypothèse, ils arrivèrent, sous le titre de *Cas généraux*, à de belles solutions de problèmes où toutes les ressources actuelles de l'analyse aux différences partielles sont mises en œuvre. L'une est relative à un solide de dimensions infinies en longueur, largeur et épaisseur, mais terminé d'un côté par un plan indéfini sur lequel agissent des pressions distribuées d'une manière absolument quelconque, continue ou discontinue; l'autre à un solide compris entre deux plans parallèles indéfinis, comprenant entre eux une épaisseur finie, l'autre enfin à un cylindre droit, de longueur infinie, sollicité sur sa surface latérale par des forces quelconques. Bien que M. Lamé ne les ait pas reproduites dans ses leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité, de 1852, en disant avec modestie (2) que ce n'étaient que des essais entrepris dans le but de chercher une solution générale, et ne parais-

(1) *Exercices*, 3e année (1828), p. 243 à 328 et 356 à 368; et 4e année (1829), p. 26. Nous croyons avoir résumé ce qui s'y trouve de plus essentiel (sauf l'application aux vibrations) au n° 13 de notre Mémoire de 1854 sur la *flexion des prismes* (Journal Liouville, 1856).

(2) Fin de la 12e leçon, § 68.

sant pas placés sur la route qui doit y conduire, elles sont remarquables et il n'est pas impossible qu'un jour elles fournissent d'utiles applications [1].

XXXIV. **Solution ultérieure, par M. Lamé, du problème de la sphère pleine ou creuse sollicitée d'une manière quelconque. Difficultés pour le prisme.** — Quant aux solides de dimensions finies en tous sens, c'est seulement pour une sphère pleine ou creuse qu'a été résolu le problème de l'état d'équilibre déterminé par des pressions appliquées et distribuées d'une manière quelconque sur la surface. C'est à M. Lamé qu'on doit cette belle solution, publiée en 1853, ou un an après ses leçons sur l'élasticité [2]. (Voyez n° LVIII pour le cas particulier de pressions constantes, traité à la 16e leçon et déjà en 1828.)

On peut, aux mêmes leçons, où l'illustre analyste s'est efforcé de réduire la théorie de l'élasticité à des termes simples, prendre une idée de la longue recherche qu'il a faite d'une solution semblable pour un solide prismatique, et voir quel point difficile [3] empêche et empêchera d'y arriver longtemps encore, et peut-être même toujours, si l'on en peut juger par l'insuccès du persévérant appel fait par l'Académie, sur sa proposition, aux géomètres des deux mondes, en mettant au concours, depuis 1846, ce grand problème de calcul intégral aux différences partielles, qu'elle en a définitivement retiré en 1858 en désespoir de cause.

---

(1) Il a bien voulu nous communiquer un mémoire manuscrit où se trouvent développées « en séries numériques et immédiatement calculables » ses expressions (27) du cas de deux plans parallèles, au moyen de la décomposition des fractions sous le quadruple signe $\int$, en fractions partielles dont chacune a pour dénominateur un des facteurs imaginaires, en nombre infini, des dénominateurs $\left(\text{de la forme } \frac{e^x - e^{-x}}{2} \pm x\right)$ de ces fractions. Il est fâcheux qu'il ait renoncé à les publier par la raison que ces sortes de décompositions sont comprises dans le calcul des résidus de M. Cauchy.

(2) Mémoire sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques, lu le 1er août 1853, et inséré au Journal de M. Liouville, t. XIX, 1854.

(3) Douzième leçon, § 66, p. 155 et suivantes.

XXXV. **Nécessité de se contenter de solutions qui supposent un mode particulier de distribution des forces sur les bases. Méthode inverse. MM. Lamé et Clapeyron.** — On ne doit pas se dissimuler, à ce sujet, que si même un succès aujourd'hui inespéré venait un jour vaincre cette difficulté si grande, c'est-à-dire si l'on parvenait à intégrer les équations d'équilibre pour des pressions quelconques agissant sur les bases et les faces d'un parallélipipède, cylindre ou prisme, une autre difficulté peut-être plus désespérante viendrait, indépendamment de l'immense complication des calculs, se dresser devant ceux qui chercheraient à tirer quelque parti de la solution trouvée. Ce serait de savoir *quelles sont*, dans chaque cas, *ces pressions* que le problème prend pour ses données. On n'agit en effet sur la surface d'un corps que par l'intermédiaire d'autres corps en contact avec lui; or on ne sait point, et l'on ne saura de longtemps comment se distribuent les pressions sur la surface de contact de deux corps élastiques, même lorsque le second de ces deux corps se réduit à un lacet enroulé autour du premier, et auquel le poids est suspendu. Le fait est que si l'on excepte les pressions exercées par un fluide en repos, on ne connaît jamais, des forces qui agissent sur la surface d'un corps, que leurs résultantes et leurs couples ou moments résultants; on ignore, hors de là, leur mode de distribution sur les divers éléments de cette surface.

D'où il suit qu'en général il importe peu de savoir déterminer l'équilibre d'élasticité d'un solide plutôt sous l'action des forces qui agissent réellement, que sous celle d'autres forces statiquement *équivalentes*, ou qui ont même résultante et même moment, mais un autre mode d'application et de distribution, bien qu'on ne puisse pas dire absolument que ce mode soit dénué de toute influence sur la grandeur des déplacements des points.

Sous tous ces rapports il faut se contenter, pour l'équilibre d'élasticité et pour les conditions de résistance des pièces prismatiques, supposées sollicitées d'abord aux extrémités seulement, de solutions relatives à un mode déterminé de distribution des forces extérieures sur leurs deux bases.

MM. Lamé et Clapeyron ont donné, les premiers, deux exemples simples de ce genre de solution. Il consiste à prendre pour donnée la loi des déplacements de tous les points, et à déterminer la loi correspondante de distribution des forces à la surface, ce qui permet ensuite de déterminer les grandeurs de ceux-là connaissant les intensités des résultantes et des moments résultants de celles-ci, supposées distribuées suivant le mode trouvé.

La loi de déplacement qu'ils se donnèrent à cet effet pour le prisme à base quelconque consiste en ce que les dilatations linéaires (positives ou négatives) soient partout les mêmes dans le sens longitudinal, et partout les mêmes aussi, mais d'une autre grandeur, dans les sens transversaux. Les équations leur montrèrent immédiatement que cette loi est possible quand on néglige les effets très-petits de la pesanteur; et que les forces qui la donnent sont *une traction ou une pression uniforme aux divers points des deux bases*, et une pression normale constante (comme la pression atmosphérique) sur les faces latérales. D'où se déduisent immédiatement les résultats trouvés par Poisson (n° XXXII) d'une manière moins simple.

Celle qu'ils se donnent pour le cylindre droit, de manière qu'il soit *tordu* en même temps qu'étendu ou comprimé, est qu'il y ait, outre des dilatations uniformes en trois sens, des rotations relatives des sections, égales d'un bout à l'autre pour mêmes intervalles entre ces sections supposées rester planes et perpendiculaires à l'axe autour duquel elles tournent. Les équations indéfinies prouvent encore que ces sortes de déplacement sont possibles sans forces agissant sur la masse, et les équations définies montrent qu'outre les tractions et pressions normales du cas précédent (et qui peuvent être toutes nulles) il faut, sur les éléments égaux de chacune des deux bases circulaires *des forces dirigées dans leurs plans, perpendiculaires aux rayons vecteurs, et proportionnelles à ces rayons* ou aux distances des éléments à l'axe de torsion [1].

---

[1] N° 51 ou page 527 du Mémoire cité.

XXXVI. **Méthode mixte, plus étendue dans ses applications. Torsion. Flexion inégale avec glissements.** — A la méthode inverse qu'ils ont employée pour cela et qui consiste, au moyen d'une simple différentiation, à déduire les forces des déplacements qu'on se donne, il faut, pour des cas plus composés, comme ceux de flexion, ou comme ceux de torsion de prismes à base non circulaire, substituer une méthode *semi-inverse* ou *mixte*, consistant à se donner à la fois une partie des déplacements et une partie des forces, et à chercher les autres forces et les autres déplacements, méthode qui ne dispense pas d'intégrer, mais qui permet de réduire la part de l'intégration à ce que les procédés connus de l'analyse aux différences partielles permettent d'aborder.

Cette méthode mixte a d'abord été appliquée par nous au problème de la torsion de prismes à bases non circulaires, de formes indéfiniment variées (1).

Jusqu'au mémoire publié en 1829 par M. Cauchy *sur la torsion et les vibrations tournantes des verges rectangulaires* (2), on avait cru (n° XIX) que les résistances opposées par les diverses fibres d'un prisme à cette sorte de déformation étaient, comme pour le cylindre à base circulaire, proportionnelles aux inclinaisons que ces fibres prennent sur l'axe de torsion en devenant des hélices, et par conséquent à leurs distances à cet axe. Mais, au lieu de la formule $G(I+I')\theta$ du moment de réaction de torsion qui en résulte, comme nous avons dit (même n°), I et I' étant les moments d'inertie principaux de la section autour de droites tracées sur son plan, Cauchy trouva, pour le prisme rectangle, $G\frac{4II'}{I+I'}\theta$ (3), expression qui ne coïncide avec la pré-

(1) *Mémoire sur la torsion des prismes* lu le 13 juin 1833 et inséré au t. XIV (1855) des *Savants étrangers*. Et rapport de M. Lamé sur ce mémoire, du 26 décembre 1853 (aux *Comptes rendus*, t. XXXVII, p. 984). Plusieurs des résultats avaient été publiés en 1847 aux numéros des 22 février, 22 mars et 10 mai des *Comptes rendus*, t. XXIV, p. 262, 485, 847, et au *Bulletin de la Société phil.* 26 février 1853.

(2) *Exercices*, 4e année.

(3) Ou plutôt $\frac{4\theta}{\frac{1}{GI}+\frac{1}{G'I'}}$, car Cauchy embrassa le cas où l'élasticité de glisse-

cédente que quand $I = I'$ ou quand la base est carrée, mais qui est infiniment moindre lorsque le prisme tordu est plat ou se réduit à une lame mince ; car, alors, si I' est le moment autour de la grande médiane, on peut le négliger au dénominateur comme du second ordre devant le moment I autour de la petite médiane, et il reste $G.4I'.\theta$. Nous reproduisons l'analyse de Cauchy à une note du § 39 de notre 4me Appendice (p. 621), en observant qu'elle est fondée, comme celle qu'il a employée ainsi que Poisson pour la flexion, sur la supposition gratuite que les pressions intérieures sont exprimables en séries convergentes suivant les puissances entières des deux coordonnées transversales, et sur des suppressions, non justifiées, de termes dont on ne connaît pas le rapport de grandeur avec ceux que l'on conserve ; et nous avons dû même, à cette note, signaler la suppression d'un terme négatif auquel on peut assigner une valeur égale au tiers de ce qui est conservé, en sorte qu'en en tenant compte le moment de torsion se trouve réduit aux deux tiers, ce qui donnerait manifestement trop peu, tandis qu'on a trop avec la formule non réduite de cette manière (1).

Aussi Cauchy a renoncé, en 1854, à son analyse (2), pour adopter la nôtre. Si nous avons discuté celle-là, c'est à cause de l'insistance mise par un physicien à l'invoquer pour ne pas adopter celle-ci (Appendice IV, § 38, p. 619).

Son mémoire de 1829 a néanmoins fait faire un grand pas à la théorie de la torsion, car, outre que la formule à laquelle il arrive est exacte pour les prismes plats (I' négligeable devant I), l'analyse qu'il y développe fait apercevoir un rapport nécessaire entre la torsion θ et la dérivée seconde du déplacement longitudinal des points de chaque section par rapport aux deux coordonnées transversales (3) ; dérivée dont l'existence annonce

---

ment à des coefficients différents G, G' dans les sens parallèles aux deux cotés du rectangle de base.

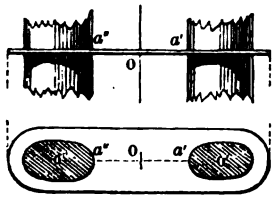
(1) Voyez aussi, même Appendice, la note du § 45, p. 641.

(2) *Comptes rendus*, 20 février 1854, t. XXXVIII, p. 326.

(3) Cette relation est $\frac{d^2u}{dydz} = \frac{I - I'}{I + I'}\theta$, u étant le petit déplacement en question ; elle n'est exacte que pour une section elliptique.

que les divers points des sections d'un prisme rectangle tordu se déplacent inégalement dans un sens parallèle aux arêtes, ou que ces sections ne restent pas planes, mais se *gauchissent* pour prendre une forme analogue à celle d'un paraboloïde hyperbolique, ou d'une double aile de moulin à vent [1], d'autant plus prononcée que les deux côtés des sections sont plus inégaux.

La nécessité de cette courbure de la section primitivement plane s'aperçoit facilement si l'on prend, pour le corps tordu autour d'un axe central, l'ensemble de deux prismes ou cylindres parallèles et égaux, rendus solidaires par deux liens rigides de manière que leurs sections o', o'' se regardent constamment par les mêmes points a', a'', astreints à rester sur une même droite passant par l'axe O autour desquels on les tord simultanément. Les axes particuliers des deux cylindres se changeront en deux hélices, auxquelles les sections o', o'' resteront sensiblement normales; en sorte que si chacune de ces deux sections partielles est supposée rester plane, leur ensemble, ou la section totale, ne pourra faire un seul plan. Or quelque chose de semblable doit avoir lieu, on le conçoit, pour les deux extrémités d'une section rectangle très-allongée; le plan de cette section se changera donc en une sorte de surface gauche si l'on tord le prisme auquel elle appartient.



Une section carrée elle-même ne saurait rester plane; elle doit nécessairement s'infléchir de manière à couper normalement, à ses quatre angles, les quatre arêtes saillantes du prisme, devenues des hélices. Remarquons en effet généralement que lorsqu'un prisme ou cylindre tordu ou fléchi, etc., est sollicité seulement vers ses extrémités, ses faces latérales n'éprouvent, intermédiairement, que la pression de l'atmosphère; et comme celle-ci, qui n'agit que normalement, ne tend nullement à faire

(1) Cette interprétation géométrique a été donnée pour la première fois à un Mémoire du 20 novembre 1843 (*Comptes rendus*, t. XXIII, p. 1188). Il n'y a pas lieu de s'arrêter à ce qui y est dit du prisme à base losange, l'erreur reconnue y étant plus grande que pour le prisme rectangle.

glisser les éléments de ces faces extérieures devant les petites faces parallèles intérieures (si la contexture est d'égale élasticité en tous sens), les petites lignes matérielles intérieures qui leur étaient normales *leur sont encore normales* après la déformation. Les sections primitivement planes doivent donc affecter la forme de surfaces courbes, normales aux surfaces latérales déformées, et par conséquent aux arêtes vives saillantes ou rentrantes devenues des hélices, suivant lesquelles se coupent deux parties adjacentes de ces faces devenues courbes.

Et toutes les autres hélices, dans lesquelles se sont transformées les arêtes non vives, doivent se projeter, sur les éléments superficiels correspondants de la section, tangentiellement à son contour, puisque le contour et chaque arête ont une normale commune, qui est dans le plan de cet élément.

Il en résulte de suite que c'est seulement quand son contour est circulaire que la section reste plane et perpendiculaire à l'axe de torsion, car toute hélice projetée sur un plan perpendiculaire à son axe, donne un cercle dont le centre est sur cet axe. (*V.* note du n° 156, § 4, p. 244.)

C'est aussi, par conséquent, uniquement sur une section circulaire que les inclinaisons des fibres, ou les glissements et par conséquent les résistances partielles développées, sont proportionnelles aux distances des fibres à l'axe; en sorte que c'est seulement pour les cylindres à base de cercle que $G(I + I')\theta$ donne le moment de torsion. Pour tout autre cylindre ou prisme cette formule donne un moment trop fort, parce que les fibres, en s'inclinant sur le plan primitif des sections, entraînent avec elles les éléments superficiels qui leur servent de base, de manière que les inclinaisons mutuelles des fibres et des éléments sont généralement moins considérables que si ceux-ci étaient restés dans leur plan primitif commun.

Les fibres et les éléments superficiels restent même tout à fait perpendiculaires les unes aux autres, comme on vient de voir, aux quatre angles des sections rectangulaires, en sorte que le danger de désagrégation et de rupture est nul en ces endroits, au lieu d'y être à son maximum comme le voulait l'ancienne théorie, qui conserve aux sections leur forme plane

primitive, et même celle de Cauchy qui, au lieu de leur vraie forme, revient à leur attribuer constamment celle d'un plan gauche ou paraboloïde hyperbolique [1].

Pour trouver la forme réelle de la surface courbe affectée par les sections, et, par suite, les glissements et la vraie valeur du moment, la méthode nouvelle dont ce grand analyste a approuvé la substitution à la sienne, a consisté, comme nous avons dit, à *se donner en partie les déplacements*, en ce qu'on les prend tels que le prisme éprouve une torsion uniforme, ou que les diverses sections transversales tournent les unes devant les autres d'angles proportionnels à leurs distances mutuelles, en se déformant toutes de la même manière, laissée d'abord inconnue, et qui est à déterminer par la condition que les faces latérales n'éprouvent aucune action dans le sens longitudinal; ce qui est, comme on voit, *poser aussi pour donnée une partie des forces*.

En introduisant dans les équations d'équilibre les données ainsi choisies ou établies, la première des trois équations indéfinies et la première des trois équations définies d'équilibre sont réduites à ne plus contenir que le déplacement *longitudinal*, qui même n'y entre que différentié par rapport aux deux coordonnées transversales si l'on ajoute aux données la supposition (ultérieurement justifiée) que la dilatation des fibres dans le sens de leur longueur est nulle ou constante [2].

---

(1) Voyez § 24 de la note du n° 156, p. 289.

(2) Car si u, v, w sont les projections du déplacement d'un point sur la coordonnée longitudinale x et sur les coordonnées transversales y, z, et si θ est la torsion par unité de longueur du prisme, la donnée sur les déplacements s'exprime par $\frac{dv}{dx} = -\theta z$, $\frac{dw}{dx} = \theta y$; expressions qui, substituées dans la première équation indéfinie, en y ajoutant la supposition de dilatation $\frac{du}{dx} = \text{constante}$, la réduit à la forme $G\frac{d^2u}{dy^2} + 2H\frac{d^2u}{dydz} + G'\frac{d^2u}{dz^2} = 0$, où G, G', H sont des coefficients dépendant de la contexture supposée symétrique par rapport aux sections; et la donnée sur les forces réduit la première équation définie à

$$\left[G'\left(\frac{du}{dz}+\theta y\right)+H\left(\frac{du}{dy}-\theta z\right)\right]-\left[G\left(\frac{du}{dy}-\theta z\right)+H\left(\frac{du}{dz}+\theta y\right)\right]\frac{dz}{dy}=0,$$

Non-seulement on reconnaît que de pareilles données sont compatibles entre elles, mais encore on obtient ce déplacement longitudinal au moyen d'une intégration, qui se trouve ramenée ainsi aux méthodes connues du calcul aux dérivées partielles; et comme on déduit de ce déplacement, par différentiation, les glissements sur les bases, et par suite les composantes de pression à appliquer sur leurs divers éléments pour obtenir l'équilibre, tout ce qu'on ne s'est pas donné en fait de déplacements comme en fait de forces se trouve déterminé.

En égalant, au moment supposé connu des forces extérieures autour de l'axe de torsion, le moment des pressions extrêmes dont a ainsi trouvé l'expression analytique, on tire la valeur cherchée de la torsion θ, par unité de longueur, du cylindre ou prisme.

Cette méthode, appliquée à un cylindre elliptique, fournit précisément l'expression très-simple $G\frac{4II'}{I+I'}\theta$ que Cauchy avait trouvée pour le prisme rectangle. Mais en employant la même méthode pour ce dernier solide, on obtient des expressions en séries convergentes de sinus circulaires et de sinus hyperboliques dont les divers termes sont faciles à calculer en s'aidant des tables dressées par M. Guderman pour ces dernières transcendantes. Le moment de torsion auquel on arrive ainsi pour le prisme rectangle s'accorde avec celui que donne la formule Cauchy quand ce prisme est très-plat; mais il n'en est que les 0,843, ou il a pour valeur $0{,}843\ G(I+I')\theta$ quand la section est un carré. Si l'on a donc deux barres, l'une ronde, l'autre carrée, de même matière et dont les deux sections ont le

---

où $\frac{dz}{dy}$ est tiré de l'équation du contour d'une section; car comme $\frac{du}{dy} - \theta x$, $\frac{du}{dz} + \theta y$ expriment les glissements longitudinaux sur des faces perpendiculaires aux y et aux z, les quantités entre crochets représentent les composantes, suivant les x, des pressions sur l'unité de ces faces. Ces équations peuvent être réduites, par un changement de coordonnées, à la même forme simple qu'elles prennent quand on a $\mathfrak{H} = 0$, comme nous l'avons remarqué en 1853 (Appendice complémentaire, p. 771).

même moment d'inertie autour de leur centre, la seconde exige, au bout du même levier, une force moindre que l'autre dans le rapport de 0,843 à 1 pour prendre la même torsion θ; résultat qu'avaient manifesté, à peu de chose près, les expériences de Duleau et de Savart, et que Navier ne savait comment expliquer, si ce n'est en l'attribuant à une différence présumée de qualité dans les fers.

De même que dans l'établissement des conditions de résistance à la *rupture éloignée* par flexion pure, on doit prendre pour le *point dangereux* ou le plus exposé celui où se trouve la grandeur la plus considérable de la dilatation linéaire à laquelle il s'agit d'imposer une limite, de même, dans la résistance à la rupture ou à l'énervation par torsion, on doit prendre pour ce point celui où le glissement sur une section est le plus grand, c'est-à-dire où l'inclinaison d'une fibre sur l'élément correspondant de la section est le plus considérable. Ce point est toujours sur le contour de la section; mais, tandis que dans la théorie commune, et même dans celle de 1829 de Cauchy, ce point serait l'un de ceux qui se trouvent le plus éloignés de l'axe de torsion, et par conséquent serait l'un des angles de la section rectangle ou carrée, la théorie nouvelle le place au contraire à l'endroit du contour le plus proche de l'axe, c'est-à-dire aux milieux des plus grands côtés si la section est rectangle, ou aux extrémités du petit axe si la section est elliptique, etc., ce qui s'explique en considérant que c'est en cet endroit que la normale à l'élément de la section s'incline sur l'axe de torsion dans le sens le plus directement opposé à celui où s'incline la fibre, en sorte que ces deux inclinaisons sur l'axe *s'ajoutent* pour composer le glissement, qui est l'inclinaison *mutuelle* de cette normale et de la fibre; au lieu que pour les points les plus éloignés de l'axe, les deux inclinaisons partielles, plus fortes chacune, mais de même sens, se soustraient l'une de l'autre, et donnent pour résultat le glissement minimum; et même zéro ou une compensation exacte et un glissemeut nul aux angles saillants comme on a dit.

Le même fait de la situation du plus grand glissement aux points du contour les plus rapprochés de l'axe se reproduit

pour plusieurs sections d'une autre forme : par exemple, la section en étoile à quatre pointes et la section en triangle équilatéral ; mais il ne saurait être général, car nous avons vu qu'aux *angles rentrants*, quand il y en a, le glissement est nul comme aux angles saillants, et il serait faible aux endroits offrant un creux arrondi, mais étroit. Même, dans les sections en double spatule, comme celles des rails de chemin de fer, les points dangereux se trouvent dans des situations intermédiaires entre les points du contour qui sont le plus rapprochés et ceux qui sont le plus éloignés du centre ou de l'axe de torsion.

La même analyse fournit en effet toutes les circonstances de la torsion de prismes ou cylindres ayant une infinité d'autres bases que l'ellipse et le rectangle, et l'on pourrait même, par son moyen, avec un travail suffisant, les déterminer par approximation pour une base de forme donnée quelconque. Qu'on prenne, en effet, pour le petit *déplacement longitudinal* u, qui détermine la forme nouvelle de la surface primitivement plane des sections, une somme quelconque d'un nombre infini ou fini de termes, soit algébriques entiers, soit transcendants en y, z (coordonnées transversales appelées u, v à la note du n° 156), avec la seule condition de satisfaire à l'équation indéfinie du second ordre, ce qui est toujours facile en déterminant une partie des coefficients dont les termes sont affectés, en fonction des autres qu'on laisse indéterminés ; et qu'on substitue cette expression de u dans l'équation générale *définie* qui exprime la nullité des pressions sur les faces latérales, on a une équation différentielle du premier ordre qui n'est autre chose, en y et z, que *celle des contours* répondant à l'expression monôme ou polynôme choisie pour le déplacement longitudinal ; et cette équation, qui *s'intègre toujours d'elle-même* [1], donne, pour le contour, une équation, ou plutôt une

---

[1] En effet (note précédente), en se bornant au cas $H = 0$, $G = G'$, le premier membre de $\left(\frac{du}{dz} + \theta y\right) dy - \left(\frac{du}{dy} - \theta z\right) dz = 0$ est une différentielle exacte si u est une des fonctions de y, z, d'une infinité de formes, algébriques ou transcendantes, qui satisfont à $\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$. (Voyez note du n° 156, § 10, p. 255.)

infinité d'équations non différentielles, différant entre elles par la grandeur de la constante qui occupe seule le second membre, et dont les valeurs diverses suffisent pour faire varier considérablement la forme représentée. On a donc une infinité de classes d'un nombre infini de contours de sections planes dont on peut connaître le changement en surfaces courbes, produit par la torsion du prisme ou cylindre auquel elles servent de base, ce qui fournit immédiatement le moment de torsion et les conditions de résistance à la torsion qui leur sont relatifs.

Au nombre de ces sections est le triangle équilatéral, qui donne la formule de torsion la plus simple après le contour circulaire. Au nombre est aussi une courbe du huitième degré en forme de croix de Malte ou d'étoile à quatre pointes arrondies, donnant pour moment de torsion les 0,537 seulement de ce qu'on aurait en prenant l'expression $G(I+I')\theta$ de l'ancienne théorie, ce qui prouve que les axes ou arbres tournants de machine dits *emplumés* ou à côtes saillantes, qui résistent assez bien à la flexion, sont fort peu propres à résister à la torsion (V. note du n° 156, § 37, p. 335-343). Au nombre est même une section composée de deux orbes séparés, presque circulaires, bases de deux cylindres parallèles supposés tordus simultanément ou solidairement autour d'un axe intermédiaire (*idem*, § 36, p. 332); on voit, par le résultat, qu'ils ne résistent que pour un moment égal à la somme de ceux qui se développeraient si on les tordait séparément autour d'axes intérieurs; et un raisonnement simple et général (*idem*, § 15, p. 265) vérifie que le moment de réaction de torsion d'un prisme ou cylindre a la même grandeur, quel que soit l'axe intérieur ou extérieur, parallèle à ses arêtes, autour duquel on lui fait éprouver une torsion déterminée très-petite.

La même analyse, appliquée dans un cas fort simple, donne les 0,84 de $G(I+I')\theta$ pour le moment de torsion d'un prisme ayant pour base une courbe du quatrième degré, en forme de carré curviligne à angles un peu arrondis. Comme le coefficient numérique diffère extrêmement peu de 0,843462 trouvé pour le carré parfait à côtés rectilignes, mais qui a été fourni par une analyse transcendante non susceptible d'être exposée dans les cours de mécanique pratique, on voit que l'on peut dé-

montrer dans ces sortes de cours, en se bornant à des approximations, les résultats principaux de la théorie nouvelle de la torsion.

XXXVII. **Torsion présentée élémentairement.** — On peut en effet établir élémentairement, et même de plusieurs manières (entre lesquelles l'expérience de l'enseignement pourra seule fixer le choix pour chaque cours) les théorèmes exprimant les équations de cette théorie [1]. Ainsi, en concevant le prisme comme partagé en fibres ou éléments parallélipipèdes rectangles dont les quatre arêtes latérales sont parallèles aux siennes ou à l'axe de torsion, on évalue, comme on verra à la note du n° 156 (§ 5, p. 245), les *glissements longitudinaux*, ou les petites diminutions éprouvées par les angles primitivement droits de ces arêtes avec les côtés des bases des éléments, en additionnant les diminutions que ces angles éprouveraient si les arêtes des éléments se déplaçaient seules en vertu de la torsion qui les change en hélices, avec les diminutions qui auraient lieu si c'étaient seulement les petites bases élémentaires rectangles qui prissent une inclinaison, ou leurs quatre côtés qui changeassent légèrement de direction en vertu du gauchissement des sections planes dont ces bases font partie. Et comme les actions ou composantes de pression longitudinales sur les quatre faces latérales des éléments solides sont proportionnelles à ces glissements, dont les grandeurs ont sur les faces opposées deux à deux une partie commune qui disparaît, on conclura, au § 6 (p. 248-250), en posant simplement l'équilibre de quatre forces de même direction, la propriété générale ou *indéfinie* dont doivent jouir toutes les surfaces légèrement courbes dans lesquelles se changent les sections planes des prismes tordus; propriété dont on donne au § 7 (p. 251)

---

[1] Nous ne parlons pas de l'essai, fait par Tredgold, de ramener la torsion d'un prisme à une sorte de flexion autour d'une diagonale joignant un point d'une de ses bases avec un point opposé de l'autre base (section VI de l'*Essai sur la résistance du fer coulé*, traduite de la 2e édition, 1826, ou n° 233 de la nouvelle édition anglaise). Cette sorte de considération ou de comparaison ne conduit à aucun résultat qu'on puisse regarder même comme approché.

une démonstration plus directe, mais encore fondée sur le principe ou lemme général d'addition pure et simple des effets très-petits dus aux deux causes de glissement.

Mais on peut se passer de ce lemme, ou des suppressions, et démontrer très-simplement ou directement, d'une autre manière qu'aux §§ cités de la note du n° 156, ces deux propriétés de la surface des sections, en faisant usage seulement des considérations rigoureuses et si connues de projections de lignes droites et de lignes brisées [1].

---

[1] Qu'on prenne en effet pour unité de longueur la petite distance des deux sections planes transversales voisines dont faisaient partie les bases rectangulaires B, B' d'un des petits éléments parallélipipèdes considérés. Une rotation, d'un petit angle θ, de la deuxième section, inclinera les quatre arêtes de cet élément, de sorte que la projection de l'une d'elles, a, sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation ou de torsion, sera le produit de θ par la distance de l'arête à cet axe; et les projections de la même arête $a = 1$ sur les deux côtés adjacents primitifs c, c' de la petite base B seront, abstraction faite du signe, les produits de θ par les distances respectives, au même axe de torsion, de ces côtés c, c' prolongés; tandis que la projection de cette même arête sur une parallèle à l'axe est $= 1$, à cela près d'une quantité de second ordre à négliger.

Or, supposons que le coté c de la petite base B de l'élément se soit courbé légèrement à cause du gauchissement possible de la section dont elle fait partie, et appelons i la projection, sur sa tangente menée au pied de l'arête a, de l'unité de longueur portée sur l'axe de rotation, nous aurons, pour la projection de l'arête a sur cette même tangente, la somme des projections de ses trois projections rectangulaires ci-dessus; cette somme sera simplement i plus ou moins le produit de θ par la distance du côté c à l'axe, car la troisième projection de l'arête a, celle qui a été faite sur le deuxième côté adjacent c', donnera zéro pour quote-part. En appelant i_1 une projection semblable, faite sur la tangente menée à la deuxième extrémité du même côté c devenu courbe, la projection, sur cette deuxième tangente, de l'arête a' aussi $= 1$, adjacente à cette deuxième extrémité du petit coté c, sera i_1 plus ou moins produit de θ par la distance du côté c à l'axe; en sorte qu'à cause de cette dernière partie qui est commune, la différence des projections respectives, sur les deux tangentes, des deux arêtes a et a' adjacentes aux deux extrémités du côté c, se réduira à $i_1 - i$. Or les actions tangentielles qui s'exercent, parallèlement aux arêtes, sur les deux faces latérales perpendiculaires au côté c, ont pour intensité le produit d'un coefficient d'élasticité tangentielle G multiplié par les projections dont on vient de parler, qui mesurent les glissements estimés dans le sens longitudinal ou des arêtes. Comme ces forces longitudinales doivent être tenues en équilibre par celles qui s'exercent, dans une direction parallèle, sur les deux autres faces latérales du même élément parallélipipède dont on abstrait la pesanteur et dont on suppose que les bases ne sont point pressées normalement, on en conclut

$$G(i_1 - i) + G'(j_1 - j) = 0$$

XXXVIII. **Suite de la méthode mixte. Flexion généralement inégale et avec glissements.** — Le problème de la flexion est du même genre que celui de la torsion, mais sa solution exacte et complète, par la même méthode mixte, est plus compliquée, et nous ne l'avons obtenue

---

si G' est un second coefficient d'élasticité de la matière dont on suppose la contexture symétrique dans les sens de division des éléments, et si j, j_1 représentent la même chose pour le deuxième côté c' de la base, aussi devenu courbe, que i, i_1 pour le premier c. Comme ces quatre petites quantités sont aussi les pentes ou inclinaisons des quatre tangentes sur le plan primitif de la section perpendiculaire à l'axe de torsion, on voit que si la contexture est la même dans tous les sens transversaux, ou si $G = G'$, les surfaces légèrement courbes affectées par les sections primitivement planes sont de celles dont la pente croît dans un sens, à partir d'un point quelconque, autant qu'elle décroît dans un sens perpendiculaire, *ou dont les rayons de courbure, mesurés dans deux plans normaux à angle droit, sont partout égaux et opposés.*

Aux points du contour des sections, vu la conservation de la normalité des petites lignes matérielles primitivement normales à la surface latérale (qui n'éprouve que la pression normale de l'atmosphère), il faut que les arêtes du prisme ou cylindre, comme toutes les autres lignes tracées sur cette surface latérale après sa déformation, se projettent tangentiellement au contour sur le plan mené au même point tangentiellement à la surface courbe de la section. D'où l'on déduit, si y et z sont les deux coordonnées rectangulaires transversales, supposées prises parallèlement aux directions primitives des éléments solides dans lesquels on a conçu divisée la tranche mince comprise entre deux sections, l'origine étant prise sur l'axe de torsion, que le rapport $\frac{dz}{dy}$ des projections, sur ces coordonnées, d'un élément linéaire du contour, doit être égal au rapport $\frac{j+\theta y}{i-\theta z}$ des deux valeurs qu'on vient de trouver pour les projections d'une arête $a=1$ sur deux petites droites rectangulaires c, c' qui sont, après les déformations, sur le plan tangent à la section. Si les élasticités sont différentes dans deux sens y, z regardés comme principaux quant à la contexture, il faut multiplier respectivement par les coefficients G et G' le numérateur et le dénominateur de cette fraction, qui représenteront après cette multiplication les composantes longitudinales de pression sur l'unité de petites faces perpendiculaires aux z et aux y; composantes dont les expressions seraient plus compliquées, et produiraient l'équation définie de la note précédente (p. cxxxvij) si la contexture n'était symétrique que par rapport aux sections.

Nous espérons que cette démonstration, de plusieurs manières élémentaires, des deux principes ou des deux équations fondamentales de la théorie nouvelle de la torsion, qui a été approuvée par l'Institut de France, et confirmée par des géomètres de l'Allemagne comme seule vraie, pourra faciliter son introduction dans l'enseignement des savants professeurs, qui sauront lui imprimer leur cachet d'habituelle lucidité, et qui, en opérant comme aux §§ 10 et suivants de la note ci-après du n° 156, pourront en déduire, sans calcul différentiel, les diverses conséquences pratiques.

qu'après de longues recherches [1]. Les sections ne restent planes et normales que quand la flexion est égale d'un bout à l'autre ou s'opère en arc de cercle. Dans tout autre cas les sections s'inclinent sur la fibre centrale, et se gauchissent ou se changent en même temps en surfaces courbes. La propriété de ces surfaces, relative aux points du contour, est la même que dans la torsion, car elles coupent encore normalement, en tous ces points, les faces latérales déformées du prisme; mais, aux points intérieurs, la somme algébrique des deux courbures principales de la surface (ou ce que nous avons appelé $i_1 - i + j_1 - j$ à la note du n° précédent), au lieu d'être nulle partout comme dans la torsion, doit avoir une grandeur proportionnelle à l'une des deux coordonnées transversales, celle qui se mesure parallèlement au plan de flexion. La *donnée sur les déplacements* n'est autre chose que ce qui caractérise ou définit *une flexion*, à savoir qu'à travers chaque section les dilatations des diverses fibres varient uniformément dans un certain sens transversal, ou sont proportionnelles à la même coordonnée dont on vient de parler. La *donnée sur les forces* consiste en ce que les faces latérales n'éprouvent aucune action longitudinale ni transversale ni normale. Et il faut, pour rendre le problème déterminé, en joindre une autre; elle consiste à supposer qu'à l'intérieur les fibres ou éléments longitudinaux n'exercent mutuellement aucune action *transversale*, ou perpendiculaire à leur longueur, tout en pouvant agir les uns sur les autres dans le sens de celle-ci; supposition ou donnée complémentaire dont l'analyse prouve la compatibilité avec les autres ainsi qu'avec les conditions générales de l'équilibre d'élasticité, et qui se trouve ainsi justifiée ultérieurement.

En exprimant analytiquement les données choisies comme on vient de dire, on déduit d'abord que le moment de flexion, s'il varie, ne peut le faire que d'une manière uniforme d'un bout à l'autre du prisme ainsi sollicité sur les seules bases extrêmes, en sorte que ce moment s'exprime linéairement en fonction de l'abscisse comptée longitudinalement. Une première et facile

---

[1] Mémoire sur la flexion des prismes, sur les glissements, etc., lu le 20 novembre 1854. Journal Liouville, 1856.

intégration des équations qui en résultent donne les expressions des déplacements des points dans trois sens, mais avec des fonctions arbitraires. On parvient à réduire ces fonctions à une seule; et la détermination de cette fonction des deux coordonnées transversales dépend de l'intégration d'une équation du second ordre aux dérivées partielles, sous la condition exprimée par une équation au contour. Ces deux équations indéfinie et définie sont celles qui caractérisent, comme nous venons de le spécifier, les surfaces légèrement courbes dans lesquelles se changent les plans des sections, car la fonction inconnue représente la petite ordonnée de cette surface. L'intégration donne une série transcendante quand le contour des sections est un rectangle, mais simplement *une fonction entière du troisième degré* pour une multitude infinie de contours courbes, au nombre desquels se trouvent l'ellipse et le cercle.

De cette analyse, parfaitement rigoureuse tant que les déformations restent extrêmement petites, et dont les conclusions générales peuvent s'étendre à tout prisme ou cylindre de matière homogène quelles que soient la forme du contour des sections et la variabilité de l'élasticité en divers sens autour de chaque point, l'on déduit que si la surface latérale n'éprouve d'un bout à l'autre qu'une action ou nulle ou normale et constante comme celle de l'atmosphère, et si ses bases sont sollicitées : 1° normalement par des forces qui varient, sur leurs divers éléments superficiels, comme une même coordonnée transversale, mais dans deux proportions qui peuvent être différentes sur ces deux bases, bien qu'elles y aient des résultantes égales et opposées; 2° tangentiellement, par d'autres forces, dont les intensités et les directions, les mêmes sur les éléments homologues de ces mêmes bases, dépendent, et de la différence des deux proportions dont on vient de parler, et de la forme du contour; le prisme ainsi sollicité fléchira en arc de cercle quand les deux proportions en question seront les mêmes, ou les forces normales égales aux points homologues des deux bases, et quand les forces tangentielles seront nulles; et, dans tout autre cas, il fléchira suivant les courbes que fournit la théorie ordinaire (nos X à XV ci-dessus), dont les formules sont, ainsi, exactement vraies en ce qui concerne les tractions et les dila-

tations longitudinales des diverses fibres, ainsi que les moments de flexion [1], sous la condition du mode particulier ici supposé d'application et de distribution des forces sur les bases extrêmes, forces dont les composantes tangentielles ajoutées ensemble pour un certain sens (qui diffère quelquefois de celui de flexion, n° XVI) donnent pour somme l'*effort tranchant* ou transversal, égal d'un bout à l'autre, et dont le produit par le bras de levier forme le moment de flexion en un point quelconque.

Mais la théorie nouvelle, en offrant une vérification de la théorie ancienne dans ce que celle-ci donne, et sous une condition qu'elle spécifie, révèle des faits que la théorie ancienne ne donne pas, savoir le changement léger de la forme du contour des sections, et, de plus, leur inclinaison sur les fibres, ainsi que leur incurvation, et par conséquent l'existence de *glissements* transversaux de ces sections les unes devant les autres, ou longitudinaux des fibres les unes contre les autres, circonstances qui augmentent les flèches de flexion, et peuvent influer sur les grandeurs des réactions de certains appuis (note du n° XVII), et qui, surtout, modifient quelquefois d'une manière sensible l'établissement des conditions de résistance [2].

Ces résultats fournis par l'analyse, mise en œuvre légitimement au moyen de suppositions que la suite justifie, peuvent être vérifiés à posteriori, soit par un calcul, comme on verra

---

[1] C'est-à-dire que si, z étant une coordonnée transversale, ρ_0 et ρ_1 deux constantes linéaires, E le module d'élasticité d'extension, les éléments $d\omega$ des deux bases ω sont sollicités normalement par des forces $\frac{E}{\rho_0} z d\omega$, $\frac{E}{\rho_1} z d\omega$, et tangentiellement par des forces dont la somme de composantes dans le sens z est $P = \frac{EI}{a}\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1}\right)$ (I étant le moment d'inertie de la section et a la longueur du prisme), le moment de flexion sera, à une distance x d'une des extrémités, $P(a-x)$, et la dilatation de la fibre dont l'ordonnée est z sera $\frac{P(a-x)}{EI} z = \frac{a-x}{a}\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1}\right) z$

[2] Note du n° 154, p. 216-236; et, aussi, §§ 44, p. 383, et 58, p. 453, de la note du n° 156.

à l'Appendice III (§§ 36, 37, p. 612, 613), soit d'une manière géométrique et élémentaire comme on verra à la note du n° 80 (§§ 3, 4, 5, p. 34 à 39) en ce qui concerne la flexion proprement dite, et, à celles des n°s 152 (§§ 2, 3, 4, p. 189 à 190) et 156 (§§ 45, 46, p. 389 à 413) en ce qui regarde les glissements qui l'accompagnent, enfin sous une forme didactique et à peu près synthétique à l'Appendice II (§ 13, p. 537). La démonstration élémentaire [1], pour la flexion, est fondée sur ce lemme, que quand des fibres traversant une même section éprouvent, suivant leur longueur, des dilatations ne variant que *linéairement* avec les coordonnées mesurées sur cette section, il est toujours possible de modifier leurs petites bases de manière que ces fibres, *sans cesser d'être contiguës*, subissent les mêmes contractions transversales, suites de leurs dilatations longitudinales (n° XXXII), que si elles formaient autant de petits prismes isolés, en sorte qu'elle ne se pressent ni ne s'attirent nullement l'une l'autre par leurs faces latérales dans un sens perpendiculaire à leur longueur. Un lemme semblable a besoin déjà d'être invoqué, même pour démontrer la loi plus simple et généralement admise, de l'allongement d'un prisme, sans flexion, quand il n'est que tiré d'une manière uniforme sur ses deux bases (note du n° 21, § 3, p. 16).

Et l'on obtient approximativement les grandeurs des glissements, quand une pièce mince est sollicitée de champ à fléchir, lorsque sa largeur est beaucoup plus petite que son épaisseur dans le sens de sollicitation, en posant l'équilibre d'un petit élément longitudinal. On en déduit la forme de la *doucine* du troisième degré que les sections doivent affecter, en tenant compte des contractions transversales qui accompagnent les dilatations. On prouve d'une autre manière, aussi fort élémentaire, que les fibres d'une pareille pièce doivent adhérer ensemble et exercer les unes sur les autres, longitudinalement, des actions considérables, sans lesquelles la pièce solide ne résisterait pas plus à la flexion que plusieurs planches minces

---

[1] Fin du Mémoire *sur la flexion*, de 1854, imprimé au Journal Liouville 1856, art. 31. Voir aussi note ci-après du n° 80, p. 35, et Appendice II, p. 534; et aussi, Appendice complémentaire § 79, 1°, p. 767.

superposées, de même largeur et d'égale épaisseur totale, comme on a dit au n° XVIII, p. cxxv. Or on en déduit la variation approchée des glissements, et la nécessité de la courbure des sections en doucine (note du n° 156, § 45, p. 389).

XXXIX. **Sur les solutions indirectes en général. Remarque d'Ampère.** — Les solutions dont on vient de parler, et même les équations particulières dont on doit les tirer, s'obtiennent, comme l'on voit, d'une manière plus ou moins indirecte, en prenant plusieurs données dont on reconnaît ensuite l'accord mutuel, ou la compatibilité entre elles ainsi qu'avec les lois de l'élasticité, c'est-à-dire en faisant plusieurs suppositions dont la légitimité est ultérieurement vérifiée. Et même, le plus souvent, au lieu de déduire, de l'équation supposée donnée du contour des sections, celle des surfaces courbes dans lesquelles leurs plans se changent, on est obligé de poser celle-ci, en les astreignant à satisfaire à leur équation différentielle dite indéfinie, et d'en déduire les contours correspondants.

Cette marche ne doit pas plus étonner qu'empêcher de regarder les résultats comme exacts. En mathématiques, les solutions tout à fait directes, par dégagement des inconnues, sont extrêmement rares. On ne résout le plus souvent les problèmes que par essai et vérification. Cela se voit dès l'arithmétique par les opérations de l'extraction des racines, et même de la division numérique, et par toutes les solutions dites de fausse position, qui conduisent au résultat soit d'un seul coup soit par une suite d'approximations. Le calcul intégral n'est guère qu'une collection de résultats inverses; on peut remarquer spécialement que l'intégration des équations aux dérivées partielles, dans les problèmes analogues à ceux de la chaleur, ne s'obtiennent qu'en choisissant et vérifiant quelque solution particulière dont on part pour composer par addition la solution générale et complète en une série dont on détermine ensuite les coefficients, en montrant finalement que cette solution obtenue est unique par cela seul qu'elle satisfait à toutes les conditions du problème, vu qu'il est complétement déterminé.

C'est précisément ce que nous faisons pour nos solutions de questions d'extension, torsion et flexion des pièces élastiques.

C'est ainsi qu'en physique même la découverte des lois des phénomènes s'opère par la méthode d'*explication*, comme disait Ampère, ou de *synthèse inverse*, bien plus que par la déduction directe ou par l'induction pure que préconisait Bacon sans l'avoir jamais appliquée [1].

XL. **Problème le plus général de ce genre, traité par M. Clebsch.** — Ce professeur éminent, qui de Carlsruhe vient de passer à l'Université de Giessen, a eu l'idée d'embrasser dans une même analyse toutes les solutions ci-dessus [2], en partant seulement de nos données sur les actions extérieures latérales, et de ce que nous y ajoutions constamment, sauf vérification, pour l'intérieur; et il a bien voulu donner notre nom au problème général : « Déterminer quels sont les systèmes des forces qu'il faut appliquer aux bases extrêmes d'un prisme pour que, ses faces latérales étant fibres, les sections intérieures *longitudinales* (ou les faces des fibres) ne supportent rien dans le sens transversal, ou perpendiculaire aux arêtes, et quels sont les déplacements ou les diverses petites déformations qui résultent de cette application. » Il trouve que les déplacements transversaux qui y satisfont sont exprimés par des fonctions entières du troisième degré des coordonnées, et que les déplacements longitudinaux se composent d'une pareille fonction, plus une autre qui dépend de la solution d'une équation du second ordre aux dérivées partielles à deux variables. Et il remarque que cette dernière fonction peut être décomposée en quatre autres, qui, isolément, seraient relatives aux cas : 1° d'extension, 2° de torsion, 3° et 4° de flexions simples autour des deux axes principaux d'inertie des sections. Ces quatre sortes de déformations sont les seules que puissent prendre les prismes ou cylindres,

---

(1) Ampère. *Essai sur la philosophie des sciences*; 1834 et 1843.

(2) *Theorie der Elasticität Fester Körper*. 1862.

(3) C'est-à-dire que si x est la coordonnée longitudinale, on ait, partout, dans l'intérieur du prisme, comme sur ses faces latérales, les composantes de pression p_{yy}, p_{zz}, p_{yz} nulles, mais non pas les composantes longitudinales p_{xx}, p_{yx}.

sollicités sur leurs bases de manière que, sur les faces longitudinales intérieures, il n'y ait d'actions que parallèlement aux arêtes; et il faut, pour que cela ait lieu ainsi, que les forces soient appliquées et distribuées, sur les bases, des diverses manières que nous avons déterminées dans nos deux mémoires.

Mais M. Clebsch observe ensuite, comme nous, que lorsque, au lieu de ces forces, on en applique d'autres *qui agiraient de la même manière sur un corps rigide*, c'est-à-dire qui aient la même résultante et le même couple résultant que celles-là, mais qui soient autrement appliquées et réparties vers les extrémités des prismes, s'il en résulte quelques actions transversales sur des faces longitudinales intérieures dans de petites étendues à partir de ces mêmes extrémités de prismes d'une certaine longueur, cela n'empêche pas les formules de donner toujours leur extension, leur torsion et leurs flexions avec toute l'approximation désirable.

De nombreuses expériences, ainsi que nous l'avons déjà dit au n° XXXV, prouvent en effet cette presque indifférence du mode d'application et de distribution des forces vers les extrémités; et cela, non-seulement pour les deux cas, cités à ce numéro, d'extension simple d'une tige et de torsion d'un cylindre circulaire, qui se résolvent exactement par la méthode purement *inverse*, mais aussi pour ceux de flexion, dont les formules, fournies par la méthode *mixte*, l'étaient déjà par les hypothèses de la théorie ancienne; théorie qui supposait tacitement (il faut le remarquer) ce que la nouvelle exige et énonce, à savoir l'action, sur les bases, de forces distribuées suivant le mode assigné pour toutes les sections intermédiaires, et qui n'est jamais réalisé sur les sections extrêmes. La même presque indifférence du mode de distribution doit avoir lieu pour l'emploi des formules *nouvelles* qu'a fait découvrir la même méthode mixte ou semi-inverse, simple instrument servant à appliquer les mêmes principes à des cas plus complexes.

Les solutions exactes que donnent ces deux méthodes, qui n'en font réellement qu'une, fournissent pour l'extension, la torsion, les flexions d'un prisme, une sorte d'état-type ou limite, susceptible d'être comparé à celui qui est déterminé en

physique mathématique dans beaucoup de phénomènes d'un autre genre. Il est, pour les diverses sections, à une distance sensible de chaque extrémité, ce qu'est l'état *permanent* d'un écoulement d'eau, ou l'état de *règlement* auquel arrive le mouvement d'une machine quelques instants après celui où elle a commencé à se mouvoir, vu que l'action des causes constantes efface promptement l'effet des causes initiales. C'est un état qui se continue de lui-même une fois qu'il est atteint, et vers lequel converge promptement jusque-là l'état réel du prisme étendu, tordu ou fléchi, quel que soit le mode d'application des forces données vers les extrémités, à mesure que l'on considère des sections de moins en moins voisines de celles-ci; car, ici, le règlement s'opère par l'*espace* et non par le *temps*.

On le vérifie encore en remarquant que des forces qui se font équilibre sur une petite partie d'un prisme (en caoutchouc, par exemple), telles que celles qui viennent des mâchoires d'une tenaille, ne produisent guère d'impression au delà de cette petite partie où elles agissent (note du n° 80, p. 41); d'où il suit, puisque deux systèmes de forces statiquement équivalents ne diffèrent l'un de l'autre que par des forces qui se font ainsi équilibre, qu'ils doivent, appliqués vers une même extrémité d'un prisme, produire sensiblement le même effet sur toute sa longueur hors une portion extrêmement courte vers cette extrémité.

On peut donc, quel que soit le mode d'application et de distribution, vers les extrémités, de forces ayant une résultante et un moment résultant déterminés, se servir très-approximativement des formules dont la rigoureuse exactitude exigerait un certain mode particulier de distribution et d'application.

Et il est heureux qu'il en soit ainsi, car, comme nous avons dit au n° XXXV, le mode réel lui-même, ou le mode censé donné, est toujours à peu près inconnu; et si le problème des déformations dues à des pressions connues aux divers points de la surface était résolu pour les prismes, comme M. Lamé l'a résolu pour la sphère, il resterait inappliqué *faute d'en connaître les données* dans chaque cas. On ne connaît en effet jamais que les résultantes et les moments résultants des forces qui agissent sur un solide par l'intermédiaire d'autres solides. Et la solution

de ce grand problème de calcul intégral aux dérivées partielles, si jamais on la trouve, n'aura probablement pas d'autre usage que de démontrer d'une autre manière, en en faisant mieux voir l'approximation, les formules ci-dessus, connues ou nouvellement trouvées, d'extension, de torsion et de flexion, qui, dans les applications, serviront toujours exclusivement.

XLI. **Tiges infiniment minces. M. Kirchhoff.** — Ces formules sont d'ailleurs exactes quel que soit le mode d'application des forces aux extrémités des prismes, *lorsque ceux-ci ont des dimensions transversales infiniment petites* par rapport à leur longueur. M. Kirchhoff l'a démontré au moyen de considérations délicates appartenant, à proprement parler, plutôt à la cinématique qu'à la mécanique, car elles lui servent à exprimer analytiquement (voy. Appendice complémentaire §§ 95 et 96, p. 830 à 844) les déformations qu'un pareil solide est susceptible d'éprouver indépendamment des forces capables de les produire, en mettant pour seule condition que certaines quantités ne deviennent pas infinies vis-à-vis d'autres, ce qui revient à ce qu'il n'y ait rien de brusque dans les variations des diverses quantités d'un bout à l'autre de la tige dont on s'occupe.

Ces déformations ne peuvent être, comme le prouve son analyse, que des combinaisons de celles des espèces qui ont été considérées ci-dessus, c'est-à-dire, pour chaque tranche ou tronçon infiniment court, une extension ou contraction longitudinale commune à tous les éléments du second ordre, des extensions ou contractions transversales, aussi communes à tous, enfin des flexions en deux sens, et une torsion. Or on déduit de là, en y joignant toujours notre supposition, ultérieurement vérifiée, de pressions intérieures transversales nulles sur les sections longitudinales quand les forces ne sont appliquées qu'aux extrémités, la vérification de toutes nos formules (hors celles des glissements sans torsion, car ils sont infiniment petits du second ordre et négligeables dans un pareil solide). Nous avons déjà parlé (à une note du n° XXI) de l'extension possible de l'analyse de l'éminent géomètre-physicien de

Heidelberg, à des tiges naturellement un peu courbes, et un peu tordues ou *torses*, et, aussi, de grosseur variable lentement et graduellement.

XLII. **Emploi du potentiel des forces moléculaires, ou de leur travail entre l'état naturel et un état de torsion déterminé. Navier. Green. Gauss. Thomson. M. Clapeyron.** — C'est, comme nous avons dit au n° XXIII, en se servant de la méthode de la mécanique analytique de Lagrange, légèrement perfectionnée au moyen du calcul préalable du potentiel ou du travail virtuel *fini* de toutes les forces en jeu, pratiqué par Navier dès 1821, que les savants de l'Angleterre et de l'Allemagne ont traité les questions de l'élasticité. Green, d'abord, en 1837-1839, dans ses deux célèbres mémoires sur la lumière, a réduit par cette considération et en usant d'un raisonnement original (tiré de l'impossibilité du mouvement perpétuel), les coefficients des formules à *vingt-un* comme nous avons dit, ce qui ne préjudicie nullement à leur réduction à un nombre encore moindre par d'autres considérations qui sont toujours inévitablement invoquées; et il a posé et ingénieusement mis en œuvre les formules exprimant jusqu'aux quantités très-petites du second ordre, ces six quantités que nous appelons *dilatations* et *glissements* qui se présentent dans tous les calculs, et que le savant M. Macquorn-Rankine appelle *strains* (*foulures*, déformations), tandis qu'il nomme *stresses* les six composantes de pression suivant les mêmes axes rectangulaires. On doit, sur le même sujet, à MM. Mac-Cullagh, Haughton, W. Thomson, Stokes, Maxwell, Kirchhoff, Clausius, Charles Neumann, Clebsch, et, antérieurement, à l'illustre Gauss, des vues nouvelles et d'utiles considérations que nous avons citées et dû discuter à l'Appendice V et à l'Appendice complémentaire. M. Rankine, surtout, a fait sur les lignes qu'il appelle *axes d'élasticité*, par rapport auxquelles certaines forces élastiques se distribuent symétriquement, un travail digne de remarque, où il classe les coefficients des formules (au point de vue où l'on en compte 21 distincts) et où il généralise, pour des axes coordonnés obliques, la considération des glissements, qu'il appelle

alors *quasi-distorsions* (1), et celle des composantes de pressions, ce qui lui permet d'expliquer diverses formes cristallines.

Le potentiel n'est autre chose, en ce qui regarde les forces moléculaires, que le travail qu'elles sont capables de fournir par détente jusqu'à annulation de leurs diverses résultantes ou des pressions à travers les faces des éléments, c'est-à-dire jusqu'à retour à l'état *naturel* ou sans pression ni tension (2). Comme sa valeur est égale à celle du *travail de déformation* du corps élastique dont on s'occupe, depuis son état naturel jusquà celui où on l'envisage, elle est la moitié de cette quantité dont la considération et le calcul, par M. Clapeyron, lui ont servi à résoudre quelques questions de pratique, principalement en ce qui regarde la résistance des ressorts (voy. n° LII) (3).

(Pour l'historique du problème des surfaces, vases ou plaques élastiques, voy. n°s LVIII, LIX, LX.)

---

(1) Il les mesure, en considérant un petit parallélogramme dont les côtés sont des lignes matérielles parallèles à deux des axes coordonnés obliques, par le petit cheminement ou glissement d'un des cotés devant le coté opposé, divisé, non par leur distance, mais par la longueur d'un des autres cotés, ce qui donne toujours des expressions telles que $\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}$, y et z étant les coordonnées obliques, v, w les composantes ou projections obliques du déplacement d'un point dans leurs sens. (*On Axes of Elasticity and crystalline Forms*. Trans. of the Royal Society 1855.)

(2) Sa considération donne, par exemple, le vrai sens à ce que nous avons dit au n° XVIII, que la résistance à un glissement équivaut ou peut être attribuée aux résistances à une extension et à une compression simultanées dans des sens *diagonaux* ou obliques. (*V*. aussi § 6 de la note du n° 152, p. 193, et Appendice compl., p. 768.) On trouve bien en effet, au moyen de l'expression (199 $\Phi^1=\frac{1}{2}a_{xxxx}\delta^2{}_x+\ldots$, p. 788, du potentiel ou du travail par unité de volume pour des déformations $\delta_x, \ldots, g_{xy}$, et de la formule symbolique (225) $a_{x'y'x'y'}=[(a_xc_{xx'}+a_yc_{yx'})(a_xc_{xy'}+a_yc_{yy'})]^2$ de la page 802, de transformation des coefficients pour de nouveaux axes cordonnés x', y' (l'axe z restant le même), que le travail moléculaire de déformation Φ^1 par unité de volume, dû à des dilatations $\delta_x=\frac{1}{2}g$, $\delta_y=\frac{1}{2}g$ dans les deux directions rectangulaires anciennes x, y, est égal à celui qui est dû au glissement $g_{x'y'}=g$ pour les deux nouvelles x', y', supposées faire un angle demi-droit avec celles-là.

(3) Le théorème de M. Clapeyron consiste, à proprement parler, en ce que le

XLIII. **Nombre des coefficients des formules de l'élasticité.** — Nous ne reproduirons pas ici l'historique, fort détaillé à notre Appendice V, de l'opinion qui s'est formée de la *dualité* des coefficients dans les formules des corps isotropes, et de l'indépendance des trente-six coefficients de celles des corps hétérotropes, ou au moins de vingt-un d'entre eux, sans qu'on ait jamais réfuté l'analyse par laquelle Cauchy a prouvé que ces coefficients ne sont qu'au nombre de quinze indépendants dans le cas le plus général de contexture, et se réduisent à un seul pour la contexture isotrope. Nous ne rappellerons pas que la loi des actions moléculaires, sur laquelle Cauchy et Poisson n'ont jamais cessé de se baser, et dont la mise en œuvre, même sans calcul, conduit infailliblement à cette réduction, est inévitablement invoquée dans toute la mécanique, spécialement lorsqu'on pose des formules *linéaires* pour les composantes des pressions, car, sans cette invocation au moins tacite, il serait illogique d'exciper de la petitesse des variables qui y entrent pour donner à leurs fonctions cette forme plutôt qu'une foule d'autres. Nous renvoyons donc surtout au résumé,

---

travail en question est exprimé, avec nos notations, par

$$\frac{1}{2}(p_{xx}\delta_x + p_{yy}\delta_y + p_{zz}\delta_z + p_{yz}g_{yz} + p_{zx}g_{zx} + p_{xy}g_{xy}).$$

Nous mettons 1/2 parce que ce travail est produit par des forces dont les intensités commencent par zéro et croissent uniformément.

Il est facile de voir que si la distribution des élasticités est *ellipsoïdale*, comme au § 89, p. 811, de l'Appendice complémentaire, et ainsi qu'on doit généralement le supposer dans les corps amorphes ou à cristallisation confuse, et si l'on particularise l'expression (199) p. 788 de Φ^1 en conséquence de (229) p. 805, en faisant $a=(2+i)a^2$, $b=(2+i)b^2$, $c=(2+i)c^2$; $d=bc$, $e=ca$, $f=ab$ $d'=bc$, $e'=ica$, $f'=iab$, qui satisfont à ce mode de distribution (page 811), on a pour le potentiel Φ^1, en mettant à la place des dilatations et glissements leurs valeurs tirées des formules de composantes de pression y relatives

$$\Phi^1=\frac{1+i}{2(2+3i)}\left(\frac{p_{xx}}{a}+\frac{p_{yy}}{b}+\frac{p_{zz}}{c}\right)^2+\frac{p^2_{yz}-p_{yy}p_{zz}}{2bc}+\frac{p^2_{zx}-p_{zz}p_{xx}}{2ca}+\frac{p^2_{xy}-p_{xx}p_{yy}}{2ab},$$

expression qui est identique avec celle de M. Clapeyron quand $a^2=b^2=c^2=\mu$, $i=\frac{\lambda}{\mu}$ (7e leçon de M. Lamé, 1852, § 32, p. 82), et qui montre que l'expression du travail moléculaire est aussi simple quand il y a distribution ellipsoïdale que quand il y a distribution sphérique ou isotropie.

§ 75 de l'Appendice cité, p. 746-762; et si, dans nos formules, nous conservons des coefficients en plus grand nombre (au moyen d'accents), ce n'est pas que nous doutions de la réductibilité soutenue par nous, c'est afin de montrer que nos résultats ne sont point subordonnés à l'opinion controversée, et, aussi, parce que les calculs présentés en conservant 21 coefficients contribuent peut-être à avancer quelque branche de l'analyse, un jour applicable à d'autres sujets analogues à la théorie de l'élasticité.

XLIV. **Manières successivement proposées d'établir les conditions de la résistance à la rupture éloignée. Préférence à donner à la limitation des dilatations positives. Mariotte. M. Poncelet. Cas où il y a simultanément flexion et torsion, etc.** — Le problème pratique le plus important sur les solides employés comme matériaux est celui de l'établissement des conditions de leur résistance à la rupture prochaine ou éloignée, et même à une altération nuisible de la forme. C'est même, comme le remarque M. Lamé [1], la nécessité d'établir complétement ces conditions qui a, si ce n'est donné naissance à la théorie de l'élasticité, au moins déterminé les recherches pour sa constitution la plus complète.

Galilée, Leibnitz, etc., ont imposé, pour cette stabilité de la cohésion des pièces solides, la condition que nulle part, à travers leurs faces intérieures, les *tensions* éprouvées n'excèdent une certaine intensité qui varie, par unité superficielle, avec la matière.

Presque tous leurs successeurs jusqu'à nos jours, y compris Coulomb, ont adopté cette manière de voir, en limitant aussi *les pressions* dans la vue de prévenir l'*écrasement* des fibres comme leur rupture par séparation longitudinale.

Cela peut suffire dans les circonstances ordinaires où les solides, de forme allongée, ne sont que fléchis en même temps que tirés ou pressés dans le sens de la longueur, leurs faces latérales étant libres, en sorte que chaque fibre se comporte

---

(1) 1re leçon, § 3.

comme un prisme isolé. Et c'est de cette manière que Navier pose, dans tout son article IV, les équations de non-rupture par flexion, qu'il établit même directement sans les déduire, comme il l'aurait pu, des équations de l'article III où il traite de la flexion.

C'est aussi, par analogie, à l'article VI, en limitant l'intensité des efforts tangentiels sur les éléments des sections transversales, qu'il établit comme Coulomb la condition de résistance à la rupture par pure torsion.

Mais, dès 1782, Mariotte posait un autre principe, car il remarquait que « les parties étendues ne rompent que parce que leur *extension* vient à dépasser une certaine *proportion* [1], » et ce principe est évidemment plus vrai, car les molécules ne se séparent tout à fait que parce qu'on les a écartées à un certain degré de manière à diminuer l'intensité des attractions qui les tenaient unies. Navier invoque ce même principe de limitation des dilatations ou extensions en divers endroits, par exemple au n° 112 ci-après, où il dit que la rupture a lieu quand les fibres étendues ne peuvent plus l'être davantage sans séparation, ce qu'il répète au n° 152 en tentant de traiter un cas nouveau; et il l'applique, même, dans la note (*a*) du n° 167 (p. 507) comme seul capable de conduire à comparer théoriquement entre elles les deux limites (R et T) des intensités des résistances spécifiques à la flexion et à la torsion.

Ces deux principes, ou ces deux manières de poser l'*équation de cohésion* [2], donnent (ainsi qu'il a été montré dès 1837-38 par des exemples à notre cours lithographié) des résultats fort différents dans plusieurs cas; et ce ne sont pas seulement les cas où il y a simultanément flexion et glissement ou torsion, on peut en donner aussi des exemples où il n'y a que des tractions; car si l'on imagine deux cubes égaux et de même matière, dont l'un est tiré sur ses six faces normalement et également, et le second seulement sur deux faces opposées, par des forces de même intensité que celles qui sont appliquées à toutes les faces

---

(1) *Traité du mouvement des eaux*, 5e partie, 6e et 13e alinéa du second discours.

(2) Nous avons préféré cette dénomination à celle d'*équation d'écarrissage* employée dans des Cours de l'École de Metz. Celle qui ne donne que les flexions, etc. y est appelée *équation d'élasticité*.

du premier, un calcul facile, fondé sur la théorie des corps élastiques isotropes, montre que la dilatation maximum sera deux fois moindre dans le premier cube que dans le second, en sorte que celui-ci éprouvera un danger de rupture double de celui-là, bien que la tension intérieure la plus grande soit la même pour tous deux.

Aussi M. Poncelet, dans son cours de mécanique industrielle professé en 1839, où il a bien voulu nous citer, a conseillé de préférer décidément la seconde manière, celle qui impose *une limite aux dilatations éprouvées*. On lui doit, à cette occasion, comme nous avons déjà dit au n° XVII, d'avoir ramené théoriquement la résistance aux compressions longitudinales à la résistance aux extensions transversales qui les accompagnent quand les faces latérales sont libres [1]; et cette explication est d'accord avec les faits, car, outre ceux que nous avons cités à ce numéro, et celui de la séparation d'une sorte de *coin* de pièces de fonte du côté devenu concave, l'expérience des effets d'une puissante machine à courber les bois en les contenant de manière à empêcher, comme on a dit lors de son exposition en 1854, les fibres comprimées de se *boursoufler* latéralement, vient bien à l'appui de la remarque de l'illustre académicien « que le rapprochement moléculaire ne peut être une cause de désagrégation. » (*V.* p. 6.)

D'où il suit qu'il suffit de limiter, en tous sens, les dilatations positives dans un sens ou transversal ou oblique, comme on fait pour les dilatations longitudinales, mais à un autre taux si la matière n'est pas isotrope, et en ayant égard à ce que les pressions sur deux bases rapprochées empêchent les dilatations transversales de s'opérer librement.

Si la pièce dont on veut assurer la cohésion permanente est d'égale contexture dans toutes les directions, il suffit d'imposer une limite déterminée à *la plus grande des dilatations* qu'elle éprouve; et, pour obtenir la grandeur et le sens de celle-ci en chaque point, le moyen analytique le plus général est de construire, pour ce point, *l'ellipsoïde des dilatations*. On peut se dispenser de cette construction dans les problèmes usuels de

---

[1] Notes du n° 3, § 8, p. 11-12, et du n° 156, sous-note du § 43, p. 381.

flexion avec glissement ou torsion, où les fibres d'un prisme n'éprouvent que des extensions et contractions longitudinales et transversales, avec ces inclinaisons sur leurs bases qui constituent les glissements, car la plus grande dilatation autour d'un point est fournie alors par une formule assez simple que nous avons trouvée en 1838, et dont M. Poncelet a rendu la démonstration plus élémentaire en la donnant en 1839-1840 dans le cours cité [1].

C'est la dilatation que cette formule donne au *point dangereux*, qui est celui pour lequel sa valeur est la plus grande, ou c'est, autrement dit, le *maximum maximorum* des dilatations, qu'il convient d'égaler à la limite qu'on ne peut dépasser sans danger, pour avoir l'équation de cohésion permanente.

Et, une fois établie, cette formule ou équation peut généralement être débarrassée et des dilatations et des glissements, en leur substituant leurs valeurs en fonction des forces qui les produisent. Par là s'éliminent les coefficients d'élasticité (E et G), car on donne généralement à la dilatation-limite une désignation venant de la méthode primitive qui consistait à limiter les forces; et cette désignation consiste à les exprimer par un quotient $\frac{R_0}{E}$ ou $2\frac{T_0}{G}$, en sorte que, bien que dressées avec le principe qui a prévalu, celui de limitation des dilatations, les équations de cohésion ne contiennent généralement que les coefficients R_0, T_0 dits de cohesion et d'*adhésion* permanente, c'est-à-dire les limites des forces, ce qui est sans inconvénient et rend les applications plus faciles.

XLV. **Cas où la limite des dilatations n'est pas la même en tous sens.** — Mais quand le corps est d'inégale contexture autour de chaque point, ce n'est pas la plus grande des dilatations qu'il convient d'égaler à une limite déterminée, car la limite des dilatations non dangereuses varie avec la direction, dans un corps même homogène, s'il est *hété-*

---

[1] Même sous-note du § 53 de la note du n° 156, p. 375.

rotrope; elle doit, par exemple, évidemment pour le bois, avoir une tout autre grandeur dans le sens de la longueur des fibres que dans un sens perpendiculaire.

Il faut donc imposer généralement la condition que, dans aucune direction, la dilatation n'excède *une limite relative à cette direction.* C'est du *rapport* de la dilatation à cette limite corrélative qu'il convient de rechercher le maximum, afin *d'astreindre ce maximum à ne pas dépasser l'unité.*

Comme on ne peut guère déterminer par expérience ces limites que pour quelques directions principales, on leur supposera, pour les directions intermédiaires, une loi de variation continue; celle qui se prête le mieux au calcul est que les racines carrées des inverses des limites soient représentées par les rayons vecteurs d'un même ellipsoïde. La condition de stabilité sera que cet ellipsoïde reste compris tout entier dans l'intérieur de celui qu'on a vu être formé par les racines carrées des inverses des dilatations, prises aussi pour rayons (1). L'expression de cette condition conduit à une équation du troisième degré dont une des trois racines (la plus grande) est le rapport maximum de la dilatation à sa limite de même direction pour le point que l'on considère (2).

---

(1) Ces deux ellipsoïdes peuvent être remplacés par deux autres plus faciles à concevoir (page 782, équations 196 et 197) dont les rayons vecteurs ont simplement pour grandeurs l'unité plus la dilatation, et l'unité plus sa limite, dans les diverses directions de ces rayons.

(2) C'est cette équation du troisième degré (105 *bis*) qui se trouve à la 2e note du § 82 de l'Appendice complémentaire, p. 781. On l'obtient en appelant δ_r la limite pour une direction r faisant, avec les directions principales x, y, z, des angles dont les cosinus sont c_x, c_y, c_z, et $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ les valeurs de δ_r pour les directions x, y, z, en sorte que

$$\delta_r = \delta_x c^2_x + \delta_y c^2_y + \delta_z c^2_z.$$

Or la dilatation de même direction est (formule 9 de la page 553),

$$\partial_r = \partial_x c^2_x + \partial_y c^2_y + \partial_z c^2_z + g_{yz} c_y c_z + g_{zx} c_z c_x + g_{xy} c_x c_y.$$

La condition de cohésion sera que $\delta_r =$ ou $> \partial_r$ partout et en tout sens, ou que la valeur maximum de $\frac{\partial_r}{\delta_r}$, pour laquelle on a $d\frac{\partial_r}{\delta_r} = 0$, soit au plus égale à l'unité. Si, dans cette équation, écrite

$$\delta_r\, d\partial_r - \partial_r\, d\delta_r = 0;$$

nous mettons pour δ_r et ∂_r leurs valeurs, en différentiant par rapport aux trois

Cette équation est réductible au second degré quand les rapports des dilatations à leurs limites sont les mêmes dans les directions de deux coordonnées transversales, et encore lorsque ces rapports sont assez peu différents pour pouvoir être approximativement remplacés par une certaine moyenne, ce qui est le cas le plus ordinaire de la pratique [1]. La formule ou la condition analytique à laquelle conduit alors sa résolution est aussi simple que celle du cas d'isotropie; et comme elle relie d'une manière continue les divers cas extrêmes, tout comme faisait la relation entre les limites en divers sens, qu'il a fallu supposer pour établir l'équation du troisième degré, on peut l'employer avec autant de confiance que ce qu'on tirerait de celle-ci [2]. Aussi en avons-nous fait, aux notes du n° 154 et du n° 156, de nombreuses applications à des cas, qui n'ont encore

---

cosinus, et si nous éliminons une des trois différentielles au moyen de $c_x\,dc_x + c_y\,dc_y + c_z\,dc_z = 0$, en égalant à zéro ce qui affecte les deux autres, nous obtenons la triple équation :

$$\frac{(2\partial_x c_x + g_{xy} c_y + g_{zx} c_z)\,\delta_r - 2\delta_x \partial_r c_x}{c_x} =$$
$$= \frac{(g_{xy} c_x + 2\partial_y c_y + g_{yz} c_z)\,\delta_r - 2\delta_y \partial_r c_y}{c_y} =$$
$$= \frac{(g_{zx} c_x + g_{yz} c_y + 2\partial_z c_z)\,\delta_r - 2\delta_z \partial_r c_z}{c_z}.$$

Comme la somme des numérateurs de ces trois fractions, multipliés respectivement par c_x, c_y, c_z, n'est autre chose que $2\partial_r \delta_r - 2\delta_r \partial_r = 0$, et comme la somme des dénominateurs multipliés de même est $= 1$, chacun des trois numérateurs est nul. Il en résulte trois équations entre lesquelles on peut éliminer finalement les rapports des cosinus comme on a fait pages 724, 777, 784, entre les équations (158), (180), (194); il reste l'équation du troisième degré citée (195 *bis*) en $\frac{\partial_r}{\delta_r}$ dont la plus grande racine est le maximum de ce rapport en un point donné.

[1] Car en remplaçant dans l'équation citée (195 *bis*) du 3e degré, $\frac{\partial_y}{\delta_y}$, $\frac{\partial_z}{\delta_z}$ par une moyenne, qu'on peut appeler $\eta_1 \frac{\partial_x}{\delta_x}$, en supposant $g_{yz} = 0$ comme dans tous les cas de flexion et de torsion d'un prisme dont les arêtes sont parallèles aux x, on peut diviser tous les termes de cette équation par $\frac{\partial_r}{\delta_r} - \eta_1 \frac{\partial}{\delta_x}$.

[2] Cette équation du second degré est celle du § 43 de la note du n° 156, p. 379 ou 382.

été traités nulle part, de corps à la fois fléchis et tordus, comme les arbres de machines sollicités à la fois par deux engrenages et deux courroies, ou en même temps étendus, comprimés et tordus, ou même étendus et *cisaillés* ou éprouvant des glissements intérieurs autres que ceux qui sont dus à la torsion, comme les rivets, les boulons, etc. La pratique de ces sortes de calculs nous a fait reconnaître que la recherche des points dangereux, ou du maximum absolu du rapport dont le maximum relatif à un seul point est donné par la formule dont nous parlons, doit se faire numériquement, avec emploi final d'une méthode particulière d'approximations successives [1], et non pas par la règle analytique tirée du calcul différentiel, car celle-ci, dans les cas rares où la complication des calculs ne la rend pas impraticable, se trouve en défaut, ou bien conduit à des points hors du contour ou de l'enveloppe, qui ne sauraient convenir. Nous donnons assez d'exemples pour montrer comment cette recherche peut se faire.

Cette formule, fondée sur la limitation des dilatations dans tous les sens, devait fournir et fournit en effet, comme un de ses cas particuliers, la limite des *compressions* longitudinales, déduite, comme a fait M. Poncelet, de celle des dilatations transversales. Au reste elle se prête facilement à ce qu'on y introduise, sans en altérer la forme, comme on a dit aux n^os X et XLIV, les constantes tirées directement des expériences et observations relatives à chaque genre de rupture, et qui représentent des forces, limites des efforts normaux ou tangentiels que la même matière peut supporter d'une manière permanente dans des circonstances déterminées.

XLVI. **Exceptions apparentes.** — Nous ne prétendons pas, au reste, qu'une théorie subordonnant uniquement le danger de rupture d'un solide à la grandeur qu'atteint une dilatation linéaire n'importe dans quelle de ses parties, et indépendamment des autres circonstances où il se trouve en même temps, soit le dernier mot de la science et de l'art. Une expérience remarquable, citée au § 16 de la note du n° 113 (p. 119), a mon-

[1] §§ 34, 35 de la note du n° 156, p. 318, 327.

tré qu'une dilatation énorme, produite dans un sens tangentiel à la surface intérieure du cylindre creux en fonte d'une forte presse hydraulique, mais accompagnée d'une contraction considérable dans un sens perpendiculaire, n'amenait aucune gerçure ni autre désagrégation. Cela peut tenir uniquement, il est vrai, à ce que le cylindre en fonte était contenu et serré dans un fort cylindre en fer, en sorte que les circonstances de l'épreuve s'opposaient à toute disjonction et qu'il n'en pouvait résulter qu'un emboutissage ou forgeage à froid. Néanmoins nous ne saurions assurer d'une manière absolument certaine que ce qu'il convient de limiter ne soit pas une fonction, encore inconnue, des trois dilatations linéaires *principales* (n° XXV), au lieu d'être uniquement la plus grande des trois [1]. Nous dirons seulement que, quoi qu'il en puisse être, cela ne changera rien aux conditions ci-dessus indiquées de non-rupture, toutes les fois qu'un prisme ou cylindre, dont les faces latérales sont libres comme à l'ordinaire, n'éprouvera que des extensions ou compressions longitudinales avec des flexions, puisque les deux contractions transversales, pour chaque fibre, sont fonctions de son extension à laquelle on impose une limite, et que lorsqu'il y aura en même temps des glissements et des torsions, une formule comme celle du § 43 de la note du n° 156 (p. 379 au bas), qui satisfait aux divers cas extrêmes conformément aux expériences, en les reliant entre eux d'une manière continue, est dans toutes les conditions requises pour satisfaire aux cas intermédiaires avec l'approximation qu'on peut désirer.

Il peut aussi y avoir rupture de certaines fibres, ou désagrégation de quelques petites parties d'une pièce solide, sans que la stabilité soit compromise ou que la résistance du reste de la masse soit diminuée. Depuis longtemps Emerson [2] a avancé qu'en faisant subir à une section transversale de forme carrée certaines troncatures revenant à abattre en chanfrein deux arêtes vives de la pièce prismatique à laquelle elle appartient, au lieu

---

(1) En tous cas, cette fonction ne peut évidemment pas être leur somme, ou la dilatation *cubique*, car un glissement, ou une torsion, n'en produit pas, et peut cependant amener la rupture.

(2) *Emerson's Mechanics* (souvent cité par Tredgold).

d'affaiblir cette pièce supposée sollicitée à rompre par flexion dans un plan contenant une diagonale des sections, on augmente sa résistance jusqu'à la proportion d'un neuvième. On verra aux §§ 8 de la note du n° 113 (p. 94) et 9 de celle du n° 120 (p. 135), que cette assertion n'a rien de paradoxal, et qu'elle s'étend même à une section circulaire ou à une section en croix, etc., si l'on veut parler de la résistance telle que la donne la formule; c'est une raison, si ce n'est pour retrancher effectivement les fibres qui théoriquement ne sont point utiles et qui pratiquement le sont fort peu, au moins pour calculer la résistance comme si elles n'existaient pas.

XLVII. **Matière hétérogène. Matière qui n'est homogène que cylindriquement ou sphériquement, etc.** — La matière peut être non-seulement hétérotrope, mais encore hétérogène, ou d'une contexture variable d'un point à l'autre. On peut alors poser facilement des formules de flexion, comme M. Bresse, en faisant varier, dans l'étendue de chaque section de la pièce, le coefficient E, qui, alors, comme nous verrons (§ 7 de la note du n° 21, p. 20), ne représente que sous une certaine condition le module d'élasticité des diverses fibres. On peut, pour les bois, faire varier ce coefficient suivant une loi parabolique (plutôt que suivant la loi linéaire qu'il suppose), à partir du centre des couches ligneuses; mais, pour les fers, c'est seulement auprès du contour des sections que le changement de nature est sensible, et il convient que les formules, soit d'élasticité, soit de cohésion permanente, se composent de deux termes dont l'un est affecté du moment d'inertie de la section, l'autre de celui du périmètre (§§ 7 de la note du n° 80 et 15 de celle du n° 113, pages 43 et 116); on a donc deux constantes à déterminer par plusieurs expériences, en compensant leurs écarts par les méthodes graphiques ou analytiques connues (p. 43 et 117-118).

Une matière non isotrope, mais *homogène*, ne l'est pas toujours *rectilignement* ou *parallèlement* comme les corps cristallisés ou comme les plaques de tôle dont l'élasticité est constante mais de trois grandeurs différentes dans les trois sens rectangulaires de sa longueur, de sa largeur et de son épaisseur. En effet,

qu'on enroule en tuyau cylindrique cette plaque homogène non isotrope supposée mince, elle ne cessera pas d'être homogène, mais l'égalité d'élasticité aux divers points aura lieu suivant les rayons qui convergent sur l'axe du tuyau, et aussi suivant les tangentes à leurs cercles, et non plus suivant des directions parallèles entre elles. Ce tuyau jouit d'une homogénéité qu'on peut appeler *semi-polaire* ou *cylindrique*. On conçoit qu'il y a de même une homogénéité *polaire* ou *sphérique*, etc.

Les formules d'élasticité relatives à ces genres d'homogénéité se déduisent de celles du cas de l'homogénéité ordinaire ou parallèle en changeant de système de coordonnées, et l'on peut en déduire diverses conséquences [1].

XLVIII. **Rupture immédiate ou prochaine. — M. Hodgkinson, etc.** — Les équations de cohésion permanente dont on vient de parler n'expriment que les conditions de résistance à la rupture *éloignée*, ou de stabilité indéfinie de la contexture, vu la petitesse des déformations; et ces équations ont pu être établies (n° X) à l'aide des équations d'*élasticité* qui ne s'observent que dans les limites de la proportionnalité des petits effets aux intensités de leurs causes.

Mais lorsqu'on est dans le cas de dresser des projets d'échafaudages, de barraquements, de ponts de service et autres constructions purement temporaires et surveillées d'une manière assez continue pour qu'on soit averti à temps de leur chute, il peut être utile de savoir calculer les justes résistances, *à une rupture immédiate ou prochaine*, des matériaux dont on se propose de les composer économiquement.

On ne pourrait faire ce calcul exactement que si l'on connaissait la loi plus ou moins compliquée des extensions et compressions en fonction des efforts jusqu'à l'instant des disjonctions, et par conséquent la situation, à cet instant, de la ligne dite neutre ou des fibres invariables. Mais on démontre quelques formules générales qui sont indépendantes de cette loi (comme

---

[1] Mémoire sur les divers genres d'homogénéité mécanique (*Comptes rendus* 21 mai 1860, t. L, p. 930).

par exemple celle qui donne la proportionnalité des charges aux largeurs, aux carrés des épaisseurs et aux inverses des longueurs des pièces) et qui permettent d'appliquer aux pièces de toute dimension et d'une certaine forme les résultats d'expériences relatifs à des pièces de même forme et de certaines dimensions. On doit aussi au savant M. Eaton Hodgkinson la tentative d'un calcul plus général, fondé sur la substitution, à la loi inconnue, d'une loi qui s'en rapproche probablement. On peut voir aux §§ 2 et 3 de la note du n° 151, p. 175, et 60, 61 de la note du n° 156, p. 461, des calculs de rupture immédiate par flexion et par torsion que nous avons faits en modifiant et généralisant sa supposition, et les conséquences pratiques qui peuvent en être tirées.

XLIX. **Pièces posées et sollicitées de diverses manières. Réactions inconnues. Systèmes de charpente. Serrage et calage. Navier. M. Michon. M. Clapeyron, etc.** — Ce qui a été dit depuis le n° XII est relatif à *une seule pièce* sollicitée par des forces supposées toutes connues, et, même, à *une seule des parties* dans lesquelles on doit souvent diviser une pièce (comme nous avons dit au n° XI, note p. cviij).

Pour passer aux *systèmes*, ou aux ensembles dont sont formées les constructions, et calculer les résistances de leurs diverses parties, il faut, avons-nous dit aussi, déterminer préalablement les forces inconnues ou qui ne sont pas données *à priori*, à savoir les réactions des points fixes et les actions mutuelles des diverses pièces ou portions de pièces aux endroits où elles se joignent soit avec articulation libre, soit avec sujétion de conserver certaines directions relativement les unes aux autres, et calculer aussi les inclinaisons nouvelles et surtout les bras de levier définitifs dont dépendent les grandeurs des composantes et des moments des forces dans l'état d'équilibre final du système déformé.

Ces réactions ou actions mutuelles peuvent se déterminer dans un certain nombre de cas en se servant seulement du principe de l'équilibre autour d'un point, et des équations de composantes et de moments que la statique élémentaire établit entre

les seules forces *extérieures* ou non réciproques qui sollicitent un corps ou un système de corps, les forces intérieures ou réciproques se trouvant éliminées par les additions d'équations partielles posées pour les établir. C'est ce qui a lieu quand chaque pièce est supportée seulement par deux points autour desquels elle peut tourner, et quand les diverses pièces ne s'articulent pas au nombre de plus de trois au même point si leurs directions sont dans un même plan, ou de quatre si elles sont dans des plans différents. Cela se peut encore dans quelques cas où les pièces se joignent au même point en plus grand nombre, quand par exemple elles forment deux groupes symétriques, et, encore, lorsque deux d'entre elles sont directement opposées, car alors on peut établir une relation entre les forces qui agissent suivant les autres pièces en posant, pour l'équilibre, la nullité de la somme des projections de celles-ci suivant une normale à la direction commune de celles-là; et, ensuite, une nouvelle relation où les premières forces sont comprises, en faisant les projections sur leur direction même [1]; et un pareil artifice pourrait être généralisé pour des cas où certaines pièces concourantes seraient dirigées dans un plan et d'autres dans un plan perpendiculaire, etc. Ces sortes de calcul ne demandent que quelque attention afin d'éviter les fausses décompositions.

On peut encore ramener la détermination des actions inconnues aux principes de la statique des forces non réciproques quand certaines pièces, en métal ou en bois, doivent être serrées, tendues ou calées, après leur pose, au point qu'il faudra pour que plusieurs réactions s'annulent, par exemple les poussées horizontales d'une ferme de comble, ou bien pour que certains points n'éprouvent aucun déplacement ou restent en ligne droite, ce qu'on peut chercher à obtenir, par exemple, des appuis multiples d'un albalétrier, etc. Alors les grandeurs et les directions d'une partie des réactions se trouvant connues, les équations de la statique élémentaire peuvent fournir assez de relations pour déterminer les autres. C'est par cet artifice, ou

---

[1] C'est le cas de certaines poutres en *treillis simple*, composées de triangles juxtaposés.

en conséquence de cette remarque sur les conditions dans lesquelles se mettent en place certaines constructions, que M. Michon, capitaine du génie en 1848 et chargé alors d'un cours à l'École d'application de Metz, a donné, pour les résistances des diverses fermes de charpente à grande portée et à tirants métalliques horizontaux et inclinés dont on recouvre les larges hangars ou les gares, des calculs complets, faits avec soin et talent, qui ont été reproduits à peu de chose près dans les ouvrages récents de M. Morin et de M. Bresse.

Mais, comme l'observe très-bien l'un de ces auteurs, il est difficile de réaliser et surtout de maintenir pour les tirants, etc. le degré de serrage qui rend exacts les résultats de ce procédé de calcul, en sorte qu'il en laisse désirer un autre où les tensions pourraient avoir diverses valeurs, au nombre desquelles il faudrait considérer celles qui s'établissent d'elles-mêmes sous l'action de charges données [1].

Et il y a aussi, comme nous avons vu (n° XI), même pour une seule pièce, ou pour des assemblages fort simples, des cas nombreux où les théorèmes élémentaires de la statique ne suffisent pas à la détermination de la répartition des efforts. Enfin les déformations changent les bras de levier et les inclinaisons, sur les tangentes aux fibres moyennes, des forces même patentes ou connues *à priori*, et ce sont les inclinaisons et les bras de levier définitifs qui doivent entrer dans les composantes et dans les moments dont il faut tenir compte pour assurer la stabilité, en sorte que l'établissement des équations de résistance demande, à double titre, la détermination préalable ou simultanée des déformations des pièces ou des déplacements de leurs points.

---

[1] M. Poncelet, dans son rapport du 5 août 1839, qui se trouve aux *Comptes rendus*, t. IX, p. 200, et aussi en tête des utiles *Études théoriques et expérimentales sur l'établissement des charpentes à grande portée* (in-4°, 1840), de feu le général Ardant, remarque que l'on pourrait, *même par flexion*, en employant des moyens de force, annuler, au moment de la pose, la poussée horizontale de beaucoup d'autres fermes retroussées; mais il observe aussi que les calculs incomplets ou simplifiés par un certain nombre de suppositions plus ou moins arbitraires offrent des chances considérables d'incertitude.

On a dit (même n° XI) ce que Navier a fait pour surmonter cette difficulté dans des cas simples, mais importants, et pour montrer qu'il doit être possible, dans tous les autres, de faire de même ou de compléter toujours un nombre d'équations égal à celui des inconnues, mais qu'ensuite, pour divers systèmes, il a fait usage d'expédients non justifiés, afin de suppléer à une méthode générale qu'il n'a peut-être pas bien aperçue, préoccupé comme il l'était de donner, par des intégrations d'équations implicites, les expressions les plus rigoureuses des flexions de chacune des pièces en particulier, etc. Nous croyons avoir formulé cette méthode [1], qui consiste à poser toutes les conditions d'appui et de raccordement après avoir exprimé analytiquement, pour chaque pièce ou portion de pièce, les déplacements, dans les trois sens des coordonnées, des points de la fibre moyenne, en fonction des intensités, des directions et des bras de levier tant connus qu'inconnus des forces qui les produisent; et, comme celles de réaction sont souvent en nombre infini (par exemple dans les parois des encastrements ou sur les surfaces de contact mutuel), de faire entrer seulement dans les équations les *trois sommes de composantes* et les *trois sommes de moments* de toutes celles qui agissent en un même endroit. Les conditions définies à poser seront la nullité des déplacements aux points fixes, leur égalité pour deux pièces ou deux parties de pièces aux points qui leur sont communs, et la conservation des directions de l'axe des pièces aux encastrements et de leurs inclinaisons mutuelles aux endroits où elles s'assemblent d'une manière stable, sauf les petits angles de glissement transversal et de jeu dans les encastrements s'ils sont assez influents pour qu'il faille en tenir compte : ce sera aussi, pour les cas de torsion et de double courbure (n° XXI), la conservation des azimuts de sections assujetties à ne point tourner autour de la fibre moyenne qui leur est perpendiculaire, etc. Tout étant exprimé, on aura autant d'équations algébriques qué d'inconnues, et il restera à les résoudre pour en tirer la connaissance des forces

---

[1] Cours lithographié, 1837-1838, n°s 29 *bis*, 46, 47, 48; et *Comptes rendus de l'Académie*, Mémoire du 30 octobre 1843, n° 18, au t. XVII, p. 953-954.

cachées, ce qui sera long quelquefois, mais possible, vu que les équations sont toutes du premier degré (comme il a été dit en 1843), au moins en se tenant à une première approximation, qui sert au besoin de point de départ pour une seconde quand on se trouve, pour quelques pièces, dans les cas (n° XV) où les moments et les composantes sont changés d'une manière sensible par les déplacements.

Cette méthode a été appliquée en 1838 et en 1843 à quelques exemples, comme à celui d'une pièce horizontale chargée d'un poids et portée sur trois pièces verticales, et les cas singuliers de ressorts fermés et d'anneaux fléchis à simple et à double courbure, qu'il faut, comme nous avons dit, diviser en plusieurs parties qui se raccordent. On a aussi commencé à l'appliquer à des ponts à contre-fiches dans un travail qui est à compléter, mais qui a manifesté divers particularités [1].

Depuis, M. Clapeyron [2] a simplifié considérablement la solution donnée par Navier du problème de la poutre horizontale reposant sur plusieurs appuis, et il a pu l'étendre à un nombre indéfini de ceux-ci en découvrant une relation générale et simple entre les grandeurs des *moments fléchissants* (ou des moments totaux des forces s'exerçant à travers une section) au-dessus de trois appuis consécutifs.

Enfin M. Bresse a fait, en 1854 [3], une application complète de cette méthode à une travée de pont, dite du système Vergniais, composée d'un arc circulaire en fonte à grande portée, ayant une flèche du sixième de la corde, surmonté latéralement de deux demi-arcs de même rayon ayant leurs centres sous les naissances du premier et leurs sommets au même niveau que celui-ci sur les reins duquel ils s'appuient. Il est à désirer que d'autres ingénieurs ne se laissent pas plus rebuter que lui par les calculs de ce genre, et qu'ils les appliquent à un

---

(1) Il a été présenté en commun avec M. Paul Michelot, le 4 décembre 1843. *Comptes rendus*, t. XVII, p. 1275.

(2) Dans un *Mémoire sur le calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés*, lithographié le 7 octobre 1857.

(3) Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes, ch. III, § VI, 67 à 71.

certain nombre de constructions existantes bien stables, mais réputées hardies au dire de constructeurs expérimentés qui peuvent en avoir vu tomber d'autres plus légères; car tant qu'on n'aura pas fait un pareil travail, on ne possédera, sur les valeurs des coefficients de cohésion permanente (R_0, R'_0), qu'il faut faire entrer dans les équations, que des données tout à fait vagues et fournissant des valeurs différant peut-être considérablement de celles qu'il faudrait leur donner pour obtenir à la fois solidité et économie. L'imitation des bonnes constructions, sans ces calculs, sera toujours aveugle et non raisonnée.

Et quant aux constructions où les diverses pièces résistent surtout par tension et pression longitudinale, ce sera seulement en y appliquant ce calcul complet, fondé sur la prise en considération, qui n'a presque point encore été faite, des petits déplacements causés par leurs allongements et accourcissements, dans des hypothèses extrêmes de serrage et de calage, que l'on pourra être complétement assuré que les répartitions des charges entre les diverses pièces du système resteront aussi entre des limites déterminées, et que l'on pourra proportionner leurs résistances aux efforts, de manière à satisfaire le mieux possible à l'économie de matière comme à la stabilité.

L. **Vibrations. Résistance vive ou résilience des pièces. Cas où l'on peut négliger leur inertie. Young. M. Poncelet. M. Clapeyron. Module de Tredgold. Proportionnalité au simple volume.** — Mais les solides employés dans les constructions ne sont pas dans un état constant d'équilibre de leurs parties. Les pièces des machines exercent les unes sur les autres des actions variables qui changent continuellement leur état de compression ou de dilatation. Celles des ponts et autres constructions fixes reçoivent, du choc ou du passage rapide des charges, des mouvements vibratoires qui ajoutent à leurs déformations statiques et augmentent les écartements moléculaires capables de détruire leur cohésion.

Longtemps les questions de ce genre ont été de pures énigmes, comme celles de répartition des efforts dont nous avons

parlé aux nos XI et XLIX. On savait, par la considération des quantités de mouvement, déterminer jusqu'à un certain point les effets du choc de deux corps pour modifier les vitesses de leurs centres de gravité, et mettre en équilibre plusieurs chocs ou plusieurs forces dites *instantanées*, en tant que capables d'imprimer séparément à un même corps différentes vitesses. Mais le problème si souvent posé de la *comparaison du choc avec la pression* ne pouvait donner lieu, quand il s'agissait surtout d'effets de rupture, qu'à des raisonnements et à des conjectures, dont on ne serait jamais sorti, même en s'aidant d'expériences, si l'on avait persisté à envisager les corps abstractivement comme dans la statique élémentaire. C'est dans l'application de la dynamique, et, aussi, de la théorie de l'élasticité, à la détermination de ce qui se passe à l'intérieur des corps, que ce fameux problème peut trouver sa solution, variable suivant les cas divers.

L'effet du choc d'un corps très-résistant, tel qu'une masse sphérique de métal, contre une verge ou contre un système de verges élastiques, est facile à évaluer quand on néglige la masse de ce système ou de cette pièce, et par conséquent l'inertie qui retarde le déplacement de ses diverses parties. Alors le système peut être regardé comme prenant constamment et instantanément la forme que lui imprimeraient des actions purement statiques, d'intensités croissantes. Il réagit avec des intensités égales contre la masse qui l'a heurté, et on peut, si la déformation n'a qu'une faible amplitude, regarder les actions et réactions comme proportionnelles aux déplacements successifs du point qui a reçu l'impulsion, déplacements qui seront par exemple les allongements ou accourcissements s'il s'agit d'une pièce heurtée longitudinalement, et les flèches de flexion si elle est heurtée transversalement. Le mouvement s'arrête quand le travail négatif total de ces réactions devient égal à la puissance vive (demi-force vive) initiale de la masse heurtante plus le travail dû à son poids pendant qu'elle agit sur la pièce ou le système. Il en résulte immédiatement que si l'impulsion a été horizontale, de sorte que le travail du poids soit nul, le déplacement dynamique maximum du point heurté est égal au produit de la vitesse d'impulsion et de la racine carrée du quotient, par la pesanteur $g = 9^{m},809$, du déplacement purement *statique*

qui serait produit par une force égale au poids de la masse heurtante; théorème depuis longtemps connu (au moins pour le cas d'un simple fil élastique fixé à un bout et portant à l'autre une masse oscillant dans sa direction). Et si l'impulsion a lieu verticalement, le déplacement maximum est égal à *plus ou moins* le déplacement statique (selon que l'impulsion a lieu du haut en bas ou de bas en haut) plus la racine carrée de la somme des carrés de celui-ci et du déplacement dynamique qui serait produit par le choc horizontal; résultat trouvé par M. Poncelet en considérant seulement le choc longitudinal d'une barre verticale (1), mais qui s'étend à une barre horizontale et même à un système quelconque, et d'où l'on peut déduire comme cas particulier, lorsque la vitesse d'impulsion est nulle, ou qu'un poids est simplement *posé*, par exemple sur une pièce horizontale soutenue aux deux bouts, ce théorème de Young (2), que la flèche de *mise en charge* est double de la flèche d'équilibre (3).

On n'a pas besoin d'ajouter qu'une fois la flèche, ou l'allongement, ou plus généralement le petit déplacement, arrivé à son maximum, le système exécute et fait faire au corps heurtant

---

(1) Introduction à la Mécanique industrielle, 1839, n° 348, p. 399 et 401.

(2) *A course of Lectures on natural Philosophy and mechanical Arts*, 1807.

(3) Soient généralement Q et V le poids et la vitesse du corps qui vient heurter le système dans une direction que nous supposerons faire un angle α avec la verticale, f le déplacement statique qui serait dû à une force Q agissant sur le système dans cette direction, enfin z le déplacement effectif à un instant quelconque, et F sa plus grande valeur, qui a lieu quand la vitesse ou la force vive est annulée. La réaction, proportionnelle au déplacement z supposé rester très-petit, est $Q\frac{z}{f}$ puisqu'elle doit, pour l'équilibre statique, être égale à Q quand $z=f$. On a donc $\frac{Q}{g}\frac{V^2}{2}+Q\cos\alpha.F=\int_0^F\frac{Qz}{f}dz=\frac{QF^2}{2f}$, d'où

$$F=f\cos\alpha+\sqrt{(f\cos\alpha)^2+V^2\frac{f}{g}},$$

ce qui donne bien : 1° quand $\cos\alpha=0$ (choc horizontal), $F=V\sqrt{\frac{f}{g}}$, déplacement purement dynamique, que nous pouvons appeler F_1; 2° quand $\cos\alpha=\pm 1$ (choc vertical), $F=\pm f+\sqrt{f^2+F_1^2}$, expression de M. Poncelet; 3° quand $V=0$, $\cos\alpha=1$ (simple mise en charge), $F=2f$, résultat trouvé par Young.

qui y est joint, des oscillations isochrônes, dont l'équation se détermine comme pour celles du pendule simple [1].

Pour assurer la stabilité de la cohésion, il faut calculer ce que M. Poncelet a appelé la *résistance vive*, et Young la *résilience* de la pièce ou du système, à savoir la puissance vive que doit posséder le corps heurtant, ou « le produit de son poids par la hauteur due à sa vitesse » pour être capable de produire la rupture, ou, plutôt, de faire éprouver à la partie la plus étendue du système l'allongement $i' = \frac{R_0}{E}$ regardé comme ne pouvant être dépassé sans danger [2]; ou, ce qui revient au même, il faut calculer le travail dynamique total des réactions élastiques opposées jusque-là par la pièce ou le système heurté [3].

On pourrait déduire l'expression de cette puissance vive ou de ce travail résistant, de celle que nous venons de donner du déplacement maximum du point qui reçoit le choc. Mais on peut, plus simplement, avec Young, M. Poncelet et M. Clapeyron, la calculer d'une manière directe et prouver avec facilité que la *résilience est proportionnelle au volume* d'une pièce heurtée, et par conséquent indépendante du rapport mutuel de ses trois dimensions; théorème donné par Young pour le choc transversal [4] et que Tredgold a facilement étendu au choc longitudinal, en montrant aussi que cette même quantité est proportionnelle à $R_0 i'$, ou à ce quotient $\frac{R_0^2}{E}$ qu'il a appelé *module de résilience;* en sorte que la résistance au choc est comme le carré de la cohésion permanente R_0 de la matière, et comme sa *flexibilité* $\frac{1}{E}$ qui est l'inverse de la *roideur* ou du module d'élasticité E.

---

(1) Avec les mêmes notations on a en effet $\frac{Q}{g}\frac{d^2z}{dt^2} = Q\cos\alpha - \frac{Qz}{f}$ dont l'intégrale est $z = f\cos\alpha + \sqrt{f^2\cos^2\alpha + \frac{f}{g}v^2}.\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{f}}\right)$.

(2) *Lectures on natural Philosophy*, vol. I, p. 143.

(3) M. Poncelet. Introduction à la Mécanique industrielle, n° 247, p. 291.

(4) *Lectures on natural Philosophy*, vol, II, sect. IX, n° 337.

On peut même prouver facilement, pour un système d'un nombre quelconque de pièces, cette proportionnalité de la résistance vive au quotient $\frac{R_0^2}{E}$ (1), et aussi sa proportionnalité au volume total, si les pièces composantes résistent toutes de la même manière, et si elles ont des dimensions relatives telles qu'elles ne courent pas plus de danger de rompre l'une que l'autre. On n'a pour cela qu'à considérer et calculer, avec M. Clapeyron (2), afin de l'égaler ensuite à la puissance vive du

---

(1) Car si f est le déplacement du point heurté, et si P est la valeur finale de la réaction dont l'intensité, nulle en commençant, est supposée restée dans les limites de sa proportionnalité à z, le travail résistant total est $\frac{1}{2}Pf$. Or P est proportionnel à la tension finale R_0 des parties les plus tendues, et f l'est à leurs dilatations finales $\frac{R_0}{E}$. Donc le travail résistant total, ou la puissance vive consommée, est bien en raison directe de $\frac{R_0^2}{E}$.

Si l'on veut évaluer le travail ou la résistance vive jusqu'à la *rupture* dite *immédiate*, ou même seulement jusqu'à un état où les réactions p ont cessé d'être proportionnelles aux allongements ou aux déplacements, il faut, comme il a été fait pour la résistance vive de rupture des barres sollicitées longitudinalement dans l'Introduction à la Mécanique industrielle (n° 296, p. 358), calculer l'intégrale $\int_0^f pdz$, où l'on suppose p connu expérimentalement en fonction de z par une courbe ou autrement. M. Poncelet a donné un grand nombre de valeurs de cette résistance vive en calculant l'intégrale par quadrature graphique, d'après la valeur de la traction p et de l'allongement z de diverses pièces de fer jusqu'à rupture, et en a déduit des conséquences remarquables.

Si l'on admet une expression empirique telle que celle qui est employée à la p. 176 ci-après pour calculer la résistance statique à la rupture immédiate, c'est-à-dire si l'on prend $p = P\left[1 - \left(1 - \frac{z}{f}\right)^m\right]$, on trouve $\int_0^f pdz = \frac{m}{m+1}Pf$, ou le produit d'un coefficient numérique $\frac{m}{m+1}$ par le poids qui fait rompre statiquement, et par l'allongement ou la flèche à l'instant de la rupture. Ce coefficient a pour limites 1/2 (pour $m=1$), et 1 (pour m grand). La quantité $\int_0^f pdz$ est à égaler à la demi-force vive du corps heurtant, réduite à $\frac{Q}{Q+Q'}\frac{V^2}{2g}$, comme montre M. Poncelet, s'il frappe sur un corps Q' d'un poids notable, lié au système heurté dont on suppose toujours que l'inertie peut être négligée. (V. n^os suivants.)

(2) Septième leçon de M. Lamé, de 1852.

corps heurtant, le *travail total des actions intérieures*, qui se réduisent par exemple aux résistances élastiques de toutes les *fibres* longitudinales des pièces si elles ne sont qu'étendues, comprimées ou fléchies ; et l'on peut même déterminer ainsi la fraction numérique dont il faut affecter le produit du volume du système par le *module* $\frac{R_0^2}{E}$ pour avoir la résistance vive. Cette fraction est $\frac{1}{2}$ si les pièces sont prismatiques et toutes étendues ou toutes comprimées; $\frac{1}{18}$ si elles sont encore prismatiques et à section rectangulaire, et toutes fléchies; enfin 1/6 si ce sont des solides de largeur constante et d'épaisseur variant de manière à remplir la condition d'égale résistance (1). Mais le même principe

---

(1) Car, 1° dans le cas où toutes les pièces sont étendues, comme on suppose que c'est finalement dans une proportion $\frac{R_0}{E}$, si l et ω sont la longueur et la section de l'une d'elles, $R_0\omega$ est sa tension finale, ou $\frac{1}{2}R_0\omega$ est la moyenne des tensions successives, qui ont commencé par zéro; et comme $\frac{R_0}{E}l$ est l'allongement ou l'espace parcouru dans la direction de la force, on a $\frac{1}{2}R_0\omega.\frac{R_0}{E}l=\frac{1}{2}\frac{R^{02}}{E}\omega l$ pour le travail, qui est, comme on voit, $\frac{1}{2}$ de $\frac{R_0^2}{E}$ multiplié par le volume.

2° Si toutes les pièces sont des prismes rectangles fléchis par des forces parallèles à l'épaisseur, les fibres éprouvent, à travers une même section, des tensions variant uniformément de 0 à R_0, et des dilatations variant de même de 0 à $\frac{R_0}{E}$ dans le sens de l'épaisseur. Le travail total, vu qu'on a en général $\int_0^a \left(\frac{x}{a}\right)^2 dx = \frac{1}{3}a$, ne sera, pour chaque élément de la longueur, que le 1/3 de ce qu'il serait s'il y avait tension et dilatation uniforme. Pareille réduction à 1/3 devra avoir lieu en raison des variations uniformes des tensions et des dilatations dans le sens de la longueur. Il en résulte bien $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$ du produit de $\frac{R_0^2}{E}$ par le volume.

3° Si les pièces sont d'égale résistance, la plus grande tension est la même pour toutes les sections ; mais comme les aires des sections sont comme les puis-

ne sera pas applicable si quelques pièces d'un système sont étendues, d'autres comprimées, ou d'autres fléchies, etc.

Young se livre, à cette occasion, à diverses considérations pratiques sur les trois qualités à rechercher dans les pièces, la roideur (*stiffness*) qui dépend du coefficient E; la résistance (*strength*) du coefficient R ou R_0; enfin la résilience, qu'on vient de voir mesurée par $\frac{R_0^2}{E}$. Pour un plafond la roideur est surtout désirable, pour un navire la résistance, pour une chaîne la résilience, pour un ressort de voiture la résilience avec la flexibilité, c'est-à-dire peu de roideur.

En étendant, comme nous venons de dire dans une note, ces distinctions aux charges capables d'altérer la contexture et même de rompre, M. Poncelet a conseillé l'emploi du fer doux et ductile plutôt que du *fer fort* pour les chaînes-câbles de marine qui ont à supporter des chocs, en montrant par ses calculs (²) que ces derniers fers, quoique résistant mieux à une charge morte, peuvent offrir jusqu'à cinquante fois moins de résistance vive que les premiers, qui ont aussi l'avantage d'avertir du danger par les grands allongements permanents qui précèdent la rupture.

LI. **Prise en considération de la masse des pièces heurtées, quant au partage de la vitesse initiale. Tredgold. M. Hodgkinson.** — Pour tenir compte de la masse, négligée par Young, de la pièce appuyée aux deux bouts et heurtée transversalement au milieu, M. Tredgold l'a fait entrer en partage de la quantité de mouvement de la masse heurtante, ce qui diminue la vitesse qu'on doit regarder comme initiale parce que c'est celle qui est possédée, au premier instant

---

sances 1/2 des distances à une extrémité, et comme $\int_0^a dx \sqrt{\frac{x}{a}} = \frac{2}{3}a$, le travail total est les $\frac{1}{2} \cdot \frac{R_0^2}{3E} \cdot \frac{2}{3}$ du produit de la longueur par la plus grande section et par conséquent les $\frac{1}{2} \cdot \frac{R_0^2}{3E}$ du volume.

(²) Introduction à la Mécanique industrielle, 1839, nos 296, 297, 298, p. 357-362.

qui suit le choc, par la masse heurtante et par le point heurté, sur lequel il concentre la masse de la pièce. Puis, supposant toujours que la courbure et la réaction élastique sont les mêmes, à chaque instant, que dans la flexion statique, Tredgold calcule la grandeur que la flèche de flexion doit atteindre pour que les réactions anéantissent la vitesse ainsi réduite (1).

M. Eaton Hodgkinson a remarqué que dans ce calcul la masse de la pièce *devait être réduite* dans une certaine proportion, parce qu'elle n'est pas libre, et que ses points prennent à chaque instant tous les degrés de vitesse depuis les appuis jusqu'au milieu. Il a reconnu que la formule de Tredgold, avec cette modification, satisfaisait assez approximativement à ses nombreuses expériences en fixant à 0,47, ou plutôt, comme il le conseille, à 1/2 la proportion de la masse de la barre qu'on suppose partager ainsi, comme ferait un corps libre, la quantité de mouvement imprimée (2).

Cette proportion peut être fixée d'une manière générale et fort plausible en divisant, à un instant quelconque, la puissance vive du système heurté par celle qu'il posséderait si les vitesses de tous ses points étaient égales à celle du point qui reçoit le choc; calcul facile puisque en supposant que les déplacements de ses points s'opèrent comme par une pression statique, on connaît les rapports qu'ils ont entre eux. Cela revient à égaler, comme dans la théorie du choc des corps libres restant unis ensuite l'un à l'autre, la diminution de force vive totale causée par le choc, à la force vive du corps heurtant, due à la vitesse qu'il a perdue par le choc, plus celle que le choc a fait prendre brusquement au système heurté (3). On trouve ainsi la fraction

---

(1) Essai sur la force du fer coulé (*Strength of cast iron*), traduction française de M. Duverne sur la deuxième édition, 1826, section XI; surtout aux nos 254 et 261. Ou nouvelle édition anglaise, n° 302. Et *Elementary Principles of Carpentry*. 2e edn, 1828, n° 132a.

(2) *Report of the Commissioners appointed to inquire into the Application of Iron to Railway-Structure*, 1849, Appendix A, page 4. — Et, aussi, Fairbairn, de l'Application de la fonte de fer et de de la tôle dans les constructions, traduit par M. Perret-Porta, 1857, page 148 (note).

(3) En effet, $\frac{P}{g}$ étant la masse du système heurté, et $k\frac{P}{g}\frac{V_1^2}{2}$ sa puissance vive

$\frac{17}{35} = 0,4857$ pour le cas du choc transversal, ce qui ne diffère point, dans la limite d'exactitude des expériences, du nombre 0,47 ou 0,50 qu'elles ont donné moyennement à M. Hodgkinson; et on trouve 1/3 pour le choc longitudinal (1). Or cela est tout à fait conforme avec ce que donnent les formules exactes dont on parlera aux nos LV et LVI, quand on se tient à leurs termes les plus influents, c'est-à-dire aux deux premiers de leurs développements en série (2).

---

lorsque le point heurté possède la vitesse V_1, l'égalité dont nous venons de parler sera :

$$\frac{Q}{g}\frac{V^2}{2} - \left(\frac{Q}{g}\frac{V_1^2}{2} + k\frac{P}{g}\frac{V_1^2}{2}\right) = \frac{Q}{g}\frac{(V-V_1)^2}{2} + k\frac{P}{g}\frac{V_1^2}{2};$$

d'où, pour la vitesse du corps heurtant et du point heurté, à l'instant qui suit le choc, la valeur

$$V_1 = \frac{Q}{Q+kP}V;$$

la même que si la quantité de mouvement imprimé $\frac{Q}{g}V$ se partageait entre deux masses libres $\frac{Q}{g}$ et $\frac{kP}{g}$, en sorte que k est bien la proportion que l'on cherchait.

(1) En effet, quand une barre de longueur a est fixée à un bout et tirée à l'autre, comme son allongement statique est uniforme, si x est la distance d'un quelconque de ses points au premier bout, et V_1 la vitesse de l'autre, on a pour la somme des puissances vives des éléments :

$$\int_0^a \frac{P\,dx}{ga}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{V_1 x}{a}\right)^2 = \frac{1}{3}\frac{P}{g}\cdot\frac{V_1^2}{2}, \quad \text{d'où} \quad k = 1/3.$$

Et quand cette barre, d'une longueur $a = 2a$, est soutenue aux deux bouts et sollicitée transversalement au milieu, si z' est le déplacement transversal d'un de ses points à une distance x du milieu, où z est le déplacement, comme on a (n° 86, p. 72 ci-après) $z' = z - \frac{3z}{a^3}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$, on trouve

$$2\int_0^a \frac{P\,dx}{2ga}\cdot\frac{1}{2}V_1^2\left[1 - \frac{3}{a^3}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\right]^2 = \frac{17}{35}\frac{P}{g}\frac{V_1^2}{2}; \quad \text{d'où} \quad k = \frac{17}{35}.$$

(2) De ce résultat relatif au choc transversal, combiné avec ce qu'on a trouvé au numéro précédent et à sa note, il résulte que si un poids Q heurte horizontalement, au milieu, avec une vitesse $V = \sqrt{2gH}$, une barre d'une longueur l et d'un poids P, en sorte que, E étant son élasticité et I le moment d'inertie de sa

LII. **Prise en considération de leur inertie, comme cause que leurs parties n'entrent en mouvement que successivement.** — Mais Young, dont la perspicacité a embrassé comme d'un seul coup d'œil presque tous les points du sujet qu'il a traité, a très-bien observé que le mouvement n'est pas instantanément communiqué à toutes les parties d'une pièce soumise à un choc, vu que leur inertie s'y oppose, en sorte qu'il faut un certain temps pour que l'effet s'en propage du point qui le reçoit aux extrémités [1]. Si donc, continue-t-il, la vitesse avec laquelle arrive le corps heurtant est à la vitesse de propagation de l'ébranlement, qui dépend

---

section, $f = \frac{Ql^3}{48EI}$ est la flèche statique que le poids Q lui ferait prendre, on aura pour la flèche dynamique

$$F = \frac{V}{\sqrt{1 + k\frac{P}{Q}}}\sqrt{\frac{f}{g}} = \sqrt{\frac{2Hf}{1 + k\frac{P}{Q}}}.$$

Élevant au carré et remplaçant F^2 par $F.\frac{Q'}{Q}f$, Q' étant le poids capable de donner statiquement la flèche F, on a la relation de M. Hodgkinson

$$H = \frac{Q'F(Q + kP)}{2Q^2},$$

donnée à la page 148 (note) de la traduction citée de l'ouvrage de M. Fairbairn.

Et si le poids Q heurte verticalement la barre en tombant de la hauteur H, on a (note du numéro précédent) pour la flèche dynamique prise en sus de la flèche statique que la barre prenait déjà sous *son propre poids*, en faisant $k = \frac{17}{35}$,

$$F = \frac{Ql^3}{48EI} + \sqrt{\left(\frac{Ql^3}{48EI}\right)^2 + \frac{Ql^3}{24EI}\cdot\frac{H}{1 + \frac{17}{35}\frac{P}{Q}}}.$$

d'où, comme $F = \frac{Q'l^3}{48EI}$, l'expression $\frac{Q'}{Q} = 1 + \sqrt{1 + \frac{96EI}{Ql^3}\frac{H}{1 + \frac{17}{35}\frac{P}{Q}}}$, qui, même en négligeant $\frac{17}{35}\frac{P}{Q}$ devant 1, diffère de celle $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{192EI}{Ql^3}H}$ qui a été donnée par M. Lemoine dans une note insérée aux *Annales des Ponts et Chaussées* en 1859, 1er semestre, page 329.

[1] *A Course of Lectures*, etc., vol. I, p. 144.

du module d'élasticité de la matière de la pièce heurtée, dans un plus grand rapport que l'extension ou la compression susceptible d'être supportée par un prisme de cette matière, est à sa longueur totale, sa résilience sera vaincue, et le corps heurtant, quelque petit que soit son volume, le brisera, ou bien y fera quelque impression permanente exigeant que sa contexture soit altérée, au moins à l'endroit soumis au choc.

On voit qu'il ne suffit pas, pour assurer la résistance à une impulsion (en supposant même que les petites impressions purement locales soient sans danger) de calculer et de limiter l'allongement maximum *total*, ou la plus grande dilatation moyenne d'une pièce droite quand elle est heurtée longitudinalement (comme les tiges de ponts suspendus) ni sa plus grande flèche et la plus grande courbure statique correspondante si elle est heurtée transversalement comme une poutre de pont). Il faut encore savoir calculer, afin de les limiter de même, les dilatations individuelles des diverses parties de la première, et les courbures prises successivement aux différents points de la seconde (et qui déterminent les extensions des fibres du côté convexe), vu que ces dilatations et ces courbures peuvent être, en quelques endroits et à quelques instants, considérablement au-dessus des autres, d'où il suit qu'on n'a aucune sécurité en établissant les conditions de résistance par les calculs du n° précédent, pour peu que la masse de la pièce heurtée approche ou surpasse la masse du corps heurtant.

LIII. **Calcul du mouvement des diverses parties. Cordes et lames. Taylor. D. Bernoulli. Euler. D'Alembert.** — Le calcul des modifications successives d'une pièce vibrante, ou la mise en compte complète de l'inertie de ses parties, dépend de travaux qui ont occupé les plus grands géomètres depuis un siècle et demi, et des intégrations qu'ils ont appris à opérer des équations aux dérivées partielles linéaires du second et du quatrième ordre avec conditions définies aux limites, dans la vue surtout de déterminer les lois de la production et de la propagation du son par les cordes, les lames et les colonnes d'air vibrantes.

Sauveur, élu en 1696 membre de l'Académie des sciences,

avait déterminé analytiquement, en se fondant sur la théorie du pendule et des centres d'oscillation, les rapports mutuels des nombres de vibrations fournis par des cordes tendues de différentes longueurs et de différents poids (1).

Mais ce fut Taylor qui mit sur la voie de déterminer la forme affectée par une corde pendant qu'elle oscille, en prouvant (2) que si elle a initialement, c'est-à-dire au moment où on la lâche, la forme de la *compagne de la cycloïde*, appelée aussi *trochoïde* ou *sinusoïde* parce que ses diverses ordonnées sont proportionnelles aux sinus de mêmes multiples des abscisses correspondantes, elle conservera pendant ses vibrations constamment cette même forme, en sorte qu'elle redeviendra périodiquement rectiligne. Il avança, au reste, l'opinion hasardée que quel que fût l'état initial, cette forme de trochoïde serait prise au bout de peu de temps et était nécessaire à la régularité des vibrations.

Jean Bernoulli arriva analytiquement au résultat principal de Taylor (3) en commençant par considérer une corde sans masse, mais chargée, à des distances égales, de diverses masses étrangères qu'il finit par multiplier à l'infini en les atténuant.

Peu après Daniel Bernoulli s'occupa des *lames* élastiques, et proposa à Euler, sur les petites oscillations de celles qui sont encastrées à une extrémité, un problème dont celui-ci donna une solution en 1734 (4).

D. Bernoulli lui adressa alors de nouvelles lettres, offrant des vues neuves (5), et publia en 1741-1743, sur le même sujet, deux mémoires où il l'envisage analytiquement d'une manière plus générale, avec deux séries d'expériences confirmatives (6). Il ne posa pas encore l'équation aux dérivées partielles

---

(1) Mémoires de l'Académie, 1713. Il rappelle qu'aux tomes de 1700, 1701, 1702, 1707, 1711, il a établi les fondements de l'Acoustique.

(2) *Methodus incrementorum directa et inversa*, Londini, 1717; page 89, propositio XXII, problema XVII. *Definire motum nervi tensi.*

(3) OEuvres, t. III, n° CXL. *Meditationes de chordis vibrantibus.*

(4) *De minimis oscillationibus corporum tam rigidorum quam flexibilium methodus nova et facilis.* Tome VII des Anciens Commentaires de l'Acad. de Saint-Pétersbourg. Voyez aussi t. VIII.

(5) Tome XIII des même Commentaires, page 1. *Excerpta ex litteris à Daniele Bernoulli ad Leonardum Eulerum.*

(6) Même tome, p. 105. *De vibrationibus et sono laminarum elasticarum Dissertatio.* — Et plus loin, *De sono laminarum .....experientiæ.* — Enfin, *De sonis multifariis quos laminæ elasticæ diversemodè edunt, experimentis illustratæ.*

dont l'une des variables principales est le temps, l'autre l'abcisse comptée suivant la longueur de la lame; mais, assimilant le mouvement transversal oscillatoire de chaque élément à celui d'un pendule simple, il rechercha quelle courbe devait, pour la lame oscillante, remplacer la sinusoïde donnée par Taylor pour la corde, ou donner lieu au retour périodique à l'état rectiligne et conserver la même forme sauf l'amplitude des écarts. Il trouva que l'ordonnée de cette courbe dépendait d'une équation simplement différentielle du quatrième ordre; et, se servant d'une intégrale de ces sortes d'équations, due à Euler [1], il donna pour les écarts transversaux des points de la lame, en fonction des distances à une extrémité, une expression composée de quatre termes, savoir : 1° deux semblables à ceux qui satisfont à l'équation du second ordre relative à la corde tendue parfaitement flexible, et où l'abscisse est engagée dans des exponentielles imaginaires à exposants égaux au signe près, ou, ce qui revient au même, deux termes où elle entre dans le sinus et dans le cosinus circulaire d'un même arc; 2° deux termes où l'abscisse est engagée dans des exponentielles à exposants réels, aussi égaux et de signe contraire, et qui peuvent être remplacés par deux termes affectés de ce qu'on nomme aujourd'hui un sinus et un cosinus hyperbolique.

Dans son dernier mémoire, D. Bernoulli suppose successivement la lame encastrée à un bout; libre (ou suspendue à un fil suffisamment long); encastrée aux deux bouts; enfin simplement attachée, c'est-à-dire posée et soutenue aux deux extrémités, autour desquelles elle peut pivoter librement. L'expérience confirme, quant aux sons rendus, les résultats comparatifs de calculs pour des lames de différentes longueurs et de différents poids, attachées des différentes manières considérées.

Euler y ajouta beaucoup à la fin de son célèbre mémoire *De curvis elasticis* [2], toujours en regardant comme « absolument nécessaire » (n° 65 de ce mémoire) de connaître préalablement « la courbe que la lame prend pendant qu'elle oscille; » connaissance qu'il croit lui être fournie par l'intégration de l'équa-

---

(1) Académie de Berlin, t. VII.

(2) *Additamentum* au grand ouvrage *Methodus inveniendi*, etc., n°s 63 à 96.

tion simplement différentielle $\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{y}{c^4}$. Il y montre que le calcul des multiplicateurs dont l'abscisse x est affectée dans les exponentielles et dans les sinus, et par conséquent la détermination du nombre des oscillations selon les diverses manières dont la lame est attachée ou soutenue, dépend de la solution de diverses équations transcendantes (1); mais il n'en calcule que la plus petite racine, la seule qu'il croie utile de connaître.

Mais, dans la même année 1747, d'Alembert montrait (2) que la détermination complète et générale des mouvements d'une corde vibrante, ou de la suite indéfinie des petits écarts transversaux de ses points, dépendait de la solution d'une équation aux différences partielles du second ordre dont l'une des deux variables indépendantes est le *temps*, l'autre l'abscisse; et il donnait de cette équation $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2\frac{d^2y}{dt^2} = 0$ l'intégrale générale connue, contenant deux fonctions arbitraires. D'où il concluait, comme elle peut représenter une infinité de courbes, que la corde peut affecter toute sorte de forme dans sa vibration.

L'année suivante, Euler, après avoir rectifié l'analyse de d'Alembert en ce qui regarde la détermination des fonctions arbitraires pour un état initial donné, prouva la même chose d'une autre manière, en montrant (3) que l'écart ou l'ordonnée de la corde, au lieu d'être ou de devenir, au bout de peu de temps, comme l'avait soutenu Taylor, proportionnelle au sinus d'un multiple déterminé de l'abscisse, pouvait bien être représentée par la somme d'un nombre quelconque, même infini, de termes affectés des sinus d'une suite de multiples ayant entre eux pour rapports ceux des nombres naturels 1, 2, 3, 4, ..., ce qui donne une variété infinie de courbes.

Étonné de ces résultats et disposé d'abord à les nier, parce

---

(1) Telles que $\frac{e^m + e^{-m}}{2} \cos m = \pm 1$, $\tang m = \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}$.

(2) Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration. Académie de Berlin, 1747, p. 214 et 220.

(3) Acad. de Berlin, 1748, p. 69. Sur les vibrations des cordes.

qu'il ne reconnaissait qu'à la sinusoïde de Taylor la propriété de donner des vibrations « régulières, simples et isochrones malgré l'inégalité des petites excursions, » Daniel Bernoulli aperçut bientôt [1] qu'on pouvait tout concilier en « faisant un examen synthétique de la question posée, » examen sans lequel on est en général sujet, dit-il, à se laisser surprendre plutôt qu'éclairer par les résultats d'une analyse abstraite. Il montra donc que les vibrations nouvelles de d'Alembert et d'Euler pouvaient être admises, mais dans un sens nouveau aussi, et en quelque sorte impropre ; qu'une corde tendue pouvait exécuter de plusieurs manières des vibrations simples et isochrones ; savoir en oscillant dans son entier, ou partagée en deux, trois, quatre..... parties égales offrant autant de *ventres* avec *nœuds* immobiles intermédiaires ; qu'on pouvait, en mêlant ces vibrations de divers ordres dans des proportions quelconques, déterminées à volonté par les grandeurs des coefficients dont on affecte les divers sinus, produire des formes aussi quelconques, et que les *courbes nouvelles* de MM. d'Alembert et Euler n'étaient absolument que de pareils mélanges de vibrations tayloriennes.

Ce fut à cette occasion que le célèbre géomètre révéla le fameux principe physique de la coexistence dans les corps, dans les systèmes et jusque dans l'air, des petites oscillations qui se produisent, se continuent et se propagent indépendamment les unes des autres, tout en se superposant [2].

Euler n'admit pas de suite [3] qu'un mélange de sinusoïdes, en nombre même infini, pût produire toutes les courbes possibles. Et d'Alembert, après avoir tenté de prouver le contraire [4], le niait encore huit ans après [5], alléguant le cas où la figure initiale de la corde serait *discontinue*, telle qu'une ligne *brisée* ou

---

(1) Acad. de Berlin. Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des corps exposés dans les Mémoires de l'Académie de 1747 et 1748.

(2) Même Académie 1753. Sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples et isochrones qui peuvent coexister dans un système de corps ; p. 173.

(3) Même volume de 1753, p. 196.

(4) Article *Fondamental* (en musique) de l'Encyclopédie.

(5) Opuscules, t. I, 1761, p. 1 et 65. *Idem*, supplément ; et, ensuite, t. IV, 1768.

anguleuse, et ajoutant que D. Bernoulli lui-même avait senti la difficulté [1].

LIV. **Solution complète pour la corde d'abord, puis pour les lames, etc. Lagrange; sa formule de réduction en série de sinus. Formules d'Euler, de Fourier. Solutions de Poisson, de Cauchy.** — La difficulté fut levée (ainsi que d'Alembert parut bientôt le reconnaître) par le célèbre mémoire de Lagrange, de 1759 [2], où il jette les fondements du calcul aux différences partielles, constitué de nos jours par Fourier et ses émules; mémoire dans lequel, en partageant d'abord la corde en un nombre fini de parties, Lagrange apprit à déterminer, par un genre nouveau d'élimination, les coefficients de la série de pareil nombre de sinus qui est capable de représenter, en fonction de l'abscisse, toutes les ordonnées des points de division quelles que soient leurs grandeurs diverses [3]. La chose parut plus claire après les développements, et les considérations plus directes, d'un mémoire de 1762 [4], où Lagrange remplace de suite par une intégration, entre les deux extrémités de la corde, l'addition qu'il opérait d'un nombre très-grand de séries, suivie de la supposition que ce nombre était infini; et où il donna en conséquence une formule très-générale de développement de toute fonction considérée entre deux limites données de sa variable [5].

Alors on comprit que les lignes brisées ne faisaient pas exception, et l'on posséda une méthode sûre et facile pour déter-

---

(1) Journal des Savants; mars 1758.

(2) Mémoires (*miscellanea*), de Turin, t. I. Recherches sur la nature et la propagation du son.

(3) On peut voir ce calcul au Résumé des leçons d'analyse de l'École polytechnique, de Navier, n° 491.

(4) Mémoires de Turin. t. III. Solution de différents problèmes de calcul intégral, et applications aux cordes sonores.

(5) C'est la formule $\varphi(x) = \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{i=\infty} \left[\int_0^a \varphi(x') \sin \frac{i\pi x'}{a} dx' \right] \sin \frac{i\pi x}{a}$, où i représente tous les nombres entiers de 1 à l'infini; et 0, a sont les deux limites entre lesquelles on veut représenter par une série de sinus la fonction quelconque $\varphi(x)$.

miner par des intégrales définies, calculées soit analytiquement, soit au besoin par des quadratures, la suite des coefficients de séries de sinus multiples, toujours convergentes, capables de représenter toute espèce de fonction continue ou discontinue, ou même des *parties de fonctions* ayant des valeurs données entre certaines limites, et s'annulant au delà comme en deçà.

On put trouver en conséquence, pour un état initial quelconque d'une corde vibrante, la suite des formes par lesquelles elle doit passer, et par un procédé ayant sur celui de d'Alembert l'avantage de distinguer les vibrations des divers ordres qui se superposent et qui rendent des sons différents, se faisant simultanément entendre avec des degrés très-divers d'intensité.

Mais d'autres problèmes de physique mathématique peuvent se présenter que celui de la corde vibrante. Les équations aux différences partielles qui expriment, comme le remarque Navier [1], les lois générales des principaux phénomènes dont l'étude est l'objet de la philosophie naturelle, peuvent être d'une autre forme et d'un autre ordre, ainsi que les conditions *définies* que doivent remplir certaines valeurs particulières de l'inconnue qui y est engagée. Euler, le pressentant sans doute, a donné en 1777, dans un de ses derniers mémoires [2], plusieurs formules de développement où les sinus sont remplacés par des cosinus d'arcs procédant d'une manière un peu différente, mais toujours par progression arithmétique. Et ces sortes de solutions ont été, comme on sait, considérablement étendues par Fourier dans son immortelle *Théorie de la chaleur* [3], où l'on trouve des séries dans lesquelles, au lieu de nombres équidifférents, les arcs successifs ont pour multiplicateurs les racines, en nombre infini, de diverses équations transcendantes comme celles qui se sont présentées à Euler

---

(1) Leçons d'analyse de l'École polytechnique, n° 487.

(2) *Methodus facilis inveniendi series per sinus cosinusve angulorum multiplorum procedentes.* Et, surtout : *Disquisitio ulterior super seriebus secundùm multipla ejusdem anguli progredientibus*; imprimés seulement en 1798 au t. XI des *Nova acta* de Saint-Pétersbourg, p. 94 et 114.

(3) Publiée en 1820, mais précédée de divers mémoires insérés à ceux de l'Institut et au Journal de l'École polytechnique.

dans ses travaux cités sur les vibrations des lames (n° LIII), mais dont il ne prenait, avons-nous dit, *que la plus petite racine*, parce qu'il ne considérait, comme D. Bernoulli, que les vibrations principales donnant le son le plus grave, sans s'occuper des vibrations secondaires qui les accompagnent en nombre infini. Enfin le même illustre géomètre de notre siècle, en rapprochant indéfiniment l'une de l'autre les grandeurs des termes consécutifs des séries, remplaçait celles-ci par des intégrales de zéro à l'infini, et attachait son nom à une formule dont MM. Liouville et Sturm, Lebesgue, etc., ont prouvé que toutes les autres pouvaient être déduites (1), mais dont l'emploi direct ne convient généralement qu'à des problèmes relatifs à des corps ou à des espaces de dimensions indéfinies.

Poisson, presque en même temps que Fourier, donnait d'autres solutions du même genre, où les exponentielles réelles se trouvent mêlées aux lignes trigonométriques, et, ensuite, une méthode générale propre à y conduire dans des cas variés ; et bientôt Cauchy, par l'invention de son *Calcul des résidus*, les présentait sous une forme plus générale en les rattachant à des considérations analytiques importantes dont on lui est également redevable.

Dès lors on put, pour les lames ou les tiges vibrantes, traiter l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre donnée par Euler en 1779 (2), comme Lagrange avait traité en 1759 l'équation du second ordre relative à la corde, et déterminer non-seulement le *nombre* des oscillations, dont s'étaient occupés Bernoulli et Euler, mais encore leur *amplitude*, qui est *la chose importante à connaître* dans les questions de résistance, et résoudre complétement le problème des états successifs du

---

(1) Premiers volumes du Journal de mathématiques pures et appliquées.

(2) *Investigatio motuum quibus laminæ et virgæ elasticæ contremiscunt*, aux Nova acta Petrop. 1779.

En faisant dans l'équation, de la forme $a^4 \frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^2y}{dt^2} = 0$, $y = Y \sin m^2 t$, on la réduit à une équation simplement différentielle qu'Euler considérait dans ses précédents écrits. Et il ne va pas plus loin dans celui de 1779, si ce n'est en considérant deux cas nouveaux d'une lame encastrée à un bout et simplement pivotante à l'autre, enfin pivotante à un bout et libre à l'autre.

corps vibrant, quand on connaît initialement les écarts de ses points de l'état d'équilibre, et les vitesses dont ils peuvent être animés en commençant de vibrer.

Pour les vibrations *longitudinales* des tiges élastiques, le problème, *si ces tiges vibrent seules*, se trouvait déjà résolu depuis 1759, car elles dépendent de la même équation que les vibrations transversales de la corde infiniment flexible, ainsi que l'a montré Lagrange, qui applique le même calcul à une colonne d'air; en sorte que son mémoire, ainsi que le titre l'indique, résout le problème de la propagation du son, dont la solution n'avait été indiquée par Newton que dans des termes obscurs (1).

Pour les vibrations transversales des mêmes tiges, lames ou poutres, le problème fut résolu complétement et en même temps en 1828 par Poisson (2) et par Cauchy (3), aussi *quand elles vibrent seules*, et pour un état initial quelconque supposé connu (4).

LV. **Participation, nécessaire à considérer, des masses heurtantes au mouvement vibratoire du système heurté. Solution de Navier pour le choc longitudinal. Complément par M. Poncelet.** — Mais ces solutions restent inutiles aux calculs de résistance des pièces tant qu'on suppose que celles-ci *vibrent seules*.

Leur mise en état de vibration est en effet déterminée généralement par le choc de quelque masse étrangère (telle qu'une voiture dont une roue retombe après avoir monté sur quelque corps ou quelque aspérité). Or, en supposant même que cette masse rebondisse, *elle est restée unie à la pièce* pendant au

---

(1) Laplace, au Bulletin de la Société philomatique, 1816, p. 190, a déduit facilement, d'une intégrale comme celle de d'Alembert, la vitesse de propagation longitudinale du son dans une barre solide.

(2) Mémoire cité du tome VIII de l'Institut nos 46, 47, 48; et, aussi, Traité de mécanique, édition de 1833, nos 519 à 529.

(3) Exercices de mathématiques, 3e année.

(4) Cette solution se trouve reproduite en partie au chapitre intitulé *Poutres vibrantes* du cours de M. Bresse (1859), qui ajoute un terme pour les petites oscillations tournantes des diverses tranches ou sections autour de la ligne des fibres invariables, mais qui ne considère de même que les poutres vibrant seules.

moins le temps d'une demi-oscillation principale, et c'est dans cette durée que se produisent les écarts moléculaires capables de mettre la cohésion en danger.

Il faut donc *savoir déterminer les oscillations d'une tige unie à une masse étrangère.*

Mais ce n'est pas tout : il faut encore savoir *quelles vitesses initiales* on attribuera à la masse étrangère et aux diverses parties ou sections de la pièce; puis exécuter le calcul avec ces données.

Sous tous ces rapports, Navier est le premier qui ait résolu complétement et dans son vrai sens un problème de *résistance vive.*

La solution qu'il a donnée est relative à un *choc longitudinal* produisant extension, c'est-à-dire, pour fixer les idées, à l'impulsion, tout auprès de l'extrémité libre d'une barre attachée à l'autre extrémité d'une masse qui y serait enfilée, et qui viendrait heurter brusquement un petit arrêt formé par un bourrelet saillant dont l'extrémité mobile serait armée. Pour abstraire la pesanteur, on peut supposer d'abord la barre horizontale.

Navier trouve, par un procédé remarquable, fondé sur l'emploi d'une des séries à cosinus d'Euler, que le déplacement d'un point quelconque de la barre unie à la masse étrangère qui se trouve au bout libre, est donné à chaque instant par une série de produits de deux sinus d'arcs proportionnels respectivement au temps et à la distance du point à l'extrémité fixe, mais où les multiplicateurs des arcs, au lieu de procéder par équidifférences comme quand la barre est seule, sont proportionnels à toutes les racines positives, faciles à calculer, d'une équation transcendante dans laquelle entre le rapport du poids de la barre au poids étranger [1]. Le temps écoulé se trouve multiplié par le rapport de ces racines au temps très-court de la propagation du son d'une extrémité à l'autre de la barre.

Pour appliquer au résultat du choc du corps étranger l'expression ainsi obtenue, Navier fait sur l'état initial, ou relatif à

---

[1] Cette équation, où m désigne l'inconnue, est $m \operatorname{tang} m =$ ce rapport $\frac{P}{Q}$.

l'instant qui suit immédiatement l'impulsion, une supposition qui semble hardie, à savoir qu'à cet instant les vitesses de la barre sont nulles partout, excepté dans la section heurtée, qui aurait tout juste alors la vitesse du corps heurtant. Mais on peut, pour se conformer mieux à l'état physique des choses, partir d'un instant non immédiat, où les sections, sur une longueur très-petite de la barre proche de l'extrémité heurtée, ont acquis déjà des vitesses croissantes suivant une loi quelconque depuis zéro jusqu'à celle du corps heurtant, celle-ci légèrement diminuée par le partage qui s'en est fait avec la petite partie correspondante de la masse de la barre, déjà mise en mouvement. En continuant le calcul, la longueur indéterminée de cette portion excessivement petite disparaît, et l'on obtient absolument le même résultat que Navier, qui supposait cette longueur nulle.

Navier ne développe cette belle solution que pour le cas où le rapport $\frac{P}{Q}$ du poids P de la barre ou du *fil* au poids heurtant Q est négligeable devant l'unité. Il trouve ainsi, comme cela devait être, l'expression depuis longtemps connue, dont nous avons parlé au n° L, relative à un poids oscillant au bout d'un fil sans masse, s'allongeant uniformément d'un bout à l'autre à tous les instants de son mouvement oscillatoire.

Il aurait obtenu, pour l'allongement maximum total de la barre, une expression aussi simple et incomparablement plus approchée en développant l'expression transcendante suivant les puissances du rapport $\frac{P}{Q}$ en question et en ne négligeant que les termes affectés de son carré et de ses puissances supérieures, car comme le carré supprimé avait pour coefficient la petite fraction $\frac{1}{120}$, la série réduite à ses deux premiers termes donne encore une valeur approchée, même quand le poids P de la barre *excède le double du poids heurtant* Q. Il est digne de remarque que la valeur de l'allongement, ainsi trouvée, est exactement celle qu'on obtient par le procédé dont nous avons parlé au n° LI, dont Tredgold a eu la première

idée en ce qui concerne le choc transversal; c'est-à-dire qu'elle est ce qu'on obtient en supposant toujours que la barre s'allonge uniformément comme dans l'état statique, mais que la vitesse du corps heurtant se trouve réduite, immédiatement après le choc, comme si sa quantité de mouvement s'était partagée avec la barre heurtée réduite à une fraction de sa masse qui est, pour le choc longitudinal, du $\frac{1}{3}$.

Mais, ainsi que nous avons dit au commencement du numéro précédent LII, les allongements, dont dépend le danger de rupture, ne sont point uniformes comme dans l'état statique; et ils se trouvent, à certains instants surtout, très-inégalement répartis d'un bout à l'autre de la barre, en raison des vibrations secondaires (comparables aux vibrations de la corde à deux, trois.... ventres), qui se mêlent à la vibration principale, et qui sont données par le second, le troisième terme.... de la série, dont les autres termes diminuent rapidement.

Nous nous sommes donc livré, sur la formule exacte de Navier, à un long travail d'application numérique, en nous aidant de constructions graphiques à grande échelle afin de relier ensemble les valeurs des déplacements, calculées pour cinq points de la barre. En appelant toujours P : Q le rapport de la masse de la barre à celle du poids heurtant, et $i_M : i_m$ le rapport entre la dilatation maximum et la *dilatation moyenne* (quotient de l'allongement total par la longueur de la barre), nous avons trouvé que, pour

$$P : Q = \frac{1}{4} \quad , \quad \frac{1}{2} \quad , \quad 1 \quad , \quad 2 \quad , \quad 4 \, ,$$

on a $i_M : i_m = 1{,}48 \quad , \quad 1{,}59 \quad , \quad 1{,}84 \quad , \quad 2{,}67 \quad , \quad 3{,}47.$

D'où l'on voit bien qu'on se trompera dans une proportion entre 1 à $1\frac{1}{2}$, et 1 à $3\frac{1}{2}$ (et même plus si le poids comparatif de la barre excède 4) en regardant la barre comme s'allongeant uniformément ou de la même manière que dans l'état statique. La formule indiquée au n° LI, analogue à celle qui a été dressée par MM. Tredgold et Hodgkinson pour un autre problème (celui du choc transversal) ne peut donc pas suffire, bien que donnant assez approximativement les allongements totaux, et

par suite les allongements moyens; et il faut, pour déterminer les conditions de résistance, ou de limitation de la plus grande dilatation produite par un choc longitudinal, se servir de la formule en série transcendante de Navier, ou d'une table de correction de calculs, telle que celle que nous venons de rapporter.

Quand la barre est dans une situation verticale, il faut tenir compte de l'allongement produit par son propre poids, et de l'excédant de travail moteur résultant de la chute du poids heurtant, qui continue après son choc. Navier n'avait fait ce calcul qu'en supposant la barre déjà tendue statiquement par l'action de celui-ci. Mais cela ne doit guère arriver. Aussi M. Poncelet a-t-il cherché à résoudre le problème pour le cas bien plus ordinaire où le poids n'a pas agi sur la barre verticale avant de la heurter. Il y est parvenu en ajoutant à la série trigonométrique de Navier une deuxième série du même genre, mais où le temps se trouve engagé dans des cosinus au lieu de sinus (1). Il a même, dans une seconde note (2), embrassé le cas où il se trouverait déjà, à l'extrémité inférieure de la barre, une certaine masse que la masse tombante vient heurter, et avec laquelle on peut supposer approximativement, avec lui (3), qu'elle partage sa quantité de mouvement préalablement à toute action sur la barre; et il est facile de voir que son analyse s'appliquerait encore si chacune de ces deux masses était sollicitée, en outre, par une force autre que son poids, telle que la pression qu'exerce un gaz ou un liquide sur un piston de machine ou de pompe (4).

LVI. **Solution analogue par le choc transversal. Expériences à l'appui.** — Un calcul complet du même genre, en tenant aussi compte de l'inertie de la barre, était désirable pour le cas, bien plus fréquent, de son choc transversal. Nous l'avons entrepris (5). Les vibrations d'une barre, appuyée

(1) Introduction à la mécanique industrielle, 1839, p. 410, note du n° 322.
(2) *Idem.* p. 424, note du n° 325.
(3) *Idem.* p. 415, n° 323.
(4) Ainsi que l'a supposé M. Belanger (Cours lithographié, 1848-49), mais en s'en tenant au calcul qui suppose négligeables la masse de la tige et l'inertie de ses parties.
(5) Société philomathique, 5 novembre 1853 et 21 janvier 1854, ou journal

aux deux extrémités, et unie à une masse étrangère placée à son milieu, dépendent d'une équation aux différences partielles du quatrième ordre. L'intégrale générale est une somme d'une infinité d'intégrales particulières où le sinus circulaire d'un multiple du temps se trouve multiplié par un sinus aussi circulaire ainsi que par un *sinus hyperbolique* d'un multiple de l'abscisse ; et les nombres donnant ces divers multiples sont toutes les racines réelles et positives, en nombre infini, d'une équation transcendante où les sinus des deux espèces se trouvent mêlés [1]. Les coefficients de la série se déterminent, *pour des vitesses initiales données*, par un procédé d'élimination analogue à ceux de Lagrange, Euler Fourier et Poisson, mais modifié parce que tous les termes de la série qui exprime ces vitesses ne disparaissent pas hors un en intégrant les deux membres de l'équation entre les limites de la longueur de la barre, après l'avoir multipliée par un certain facteur.

Quant au choix des vitesses initiales, nous les faisons, comme dans le problème de la barre heurtée longitudinalement, nulles partout excepté dans une étendue fort petite où elles croissent de part et d'autre depuis zéro jusqu'à leur valeur au milieu de la barre, où elles ont la grandeur de celle du corps heurtant, légèrement diminuée en raison du partage déjà fait de sa quantité de mouvement avec cette petite partie. Comme la longueur de celle-ci s'élimine, on a la même chose que si l'on avait supposé toutes les vitesses nulles hors celle de la section heurtée.

On tient compte du travail de la pesanteur de la barre et de celle du corps heurtant depuis que le choc est opéré en ajoutant une deuxième série, ou en faisant ce qu'a fait M. Poncelet pour le choc longitudinal.

Quand le rapport du poids de la barre au poids heurtant est très-petit, l'expression ainsi déterminée pour la flèche dynamique se réduit à ce qu'a trouvé Young (n° L). Quand il n'ex-

---

l'*Institut*, 15 février, n° 105; et Comptes rendus de l'Académie, 10 août 1857, t. XLV, p. 204.

[1] Cette équation est $m\left(\frac{\sin m}{\cos m} - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}\right) = 2\frac{P}{Q}$, P et Q étant les poids de la barre et du corps heurtant.

cède pas 2 et même 4, elle se réduit au premier terme de la série transcendante, ou à ce qui résulte de la vibration partielle principale; et, en développant l'expression de la flèche suivant les puissances du rapport du poids de la barre au poids heurtant, on peut négliger son carré, qui est affecté d'une très-petite fraction numérique; et l'on trouve précisément ce que fournit le mode de calcul élémentaire du n° LI, c'est-à-dire ce qu'on aurait en calculant cette flèche comme si la barre conservait la forme qu'elle prend sous une charge en repos, après avoir réduit la vitesse du corps heurtant par un partage avec les $\frac{17}{35}$ de la masse du corps heurté; en sorte que les résultats de cette analyse se trouvent confirmés par de nombreuses expériences de M. Hodgkinson, même en soumettant directement les résultats au calcul au lieu de prendre la formule empirique qui les résume.

Mais les deuxième, troisième et quatrième termes de la série sont très-influents quant aux diverses courbures prises par la barre, et qui déterminent la plus grande dilatation des fibres du côté devenu convexe. On les manifeste très-bien par un modèle en plâtre représentant la surface très-ondulée décrite par la barre supposée emportée d'un mouvement rapide perpendiculaire à son plan pendant qu'elle vibre. Aussi, pour calculer sa résistance, il faut, sous peine de commettre de graves erreurs qui inspireraient une fausse sécurité, se livrer au long calcul de la formule nouvelle et exacte. Ce calcul, aidé de constructions graphiques, a été fait pour des rapports

$$P : Q = \frac{1}{2}, \quad 1 \quad \text{et} \quad 2$$

du poids P de la barre au poids Q du corps heurtant; il en résulte que les résistances calculées à la manière du n° LI sont trop faibles dans des proportions respectives de 1 à

$$1{,}18, \quad \text{à} \quad 1{,}23, \quad \text{à} \quad 1{,}49,$$

qui différeraient encore plus de l'unité pour des barres ayant plus de masse par rapport au corps qui les heurte.

LVII. **Résistance vive sans choc. Bielles et balanciers. M. Tredgold. Charge voyageuse. M. Willis. M. Stokes. M. Phillips.** — La résistance vive peut être mise en jeu et des oscillations peuvent être engendrées par l'action mutuelle des pièces d'une machine qui s'arrête brusquement, comme le fait observer M. Tredgold au n° 257 de son *Traité de la résistance du fer coulé.*

Mais, comme l'observe le même auteur, la même chose peut avoir lieu à un certain degré sans impulsion brusque et par l'effet de l'action variable, quoique continue, d'un piston sur un balancier, d'une bielle sur une manivelle, etc. Les calculs et les règles pratiques qu'il donne aux nos 266 à 294 du même ouvrage auraient besoin d'être analytiquement discutés, comme nous avons fait pour ses évaluations des effets du choc. Ce genre de recherches, où les forces qui étendent, compriment ou fléchissent sont variables et se trouvent augmentées et même remplacées par des produits de masses et d'accélérations, méritent d'occuper les ingénieurs non moins que les analystes [1].

On peut regarder comme du même genre le problème du *poids voyageur*, c'est-à-dire de l'action, sur une poutre horizontale, d'une charge en mouvement, qui la parcourt uniformément avec assez de rapidité (comme une locomotive sur un pont) pour qu'il faille tenir compte des inerties dues aux mouvements ver-

---

[1] Si la loi du déplacement d'une extrémité d'une pièce élastique est connue et comme *obligatoire*, la détermination des déplacements des autres parties dépend d'une méthode qui a été donnée par M. Duhamel le 23 avril 1832 sous le titre *Mémoire sur les vibrations d'un système de points matériels* (Journ. de l'Éc. pol., 23e cahier). Elle consiste à déterminer d'abord l'expression des déplacements successifs que prendra un quelconque des points de la pièce par suite d'un *déplacement invariable*, infiniment petit, de l'extrémité donnée, puis à ajouter ensemble les grandeurs de ceux qui résulteront de même, pour le point quelconque, d'une suite connue d'autres déplacements infiniment petits imprimés encore à l'extrémité. Cette méthode serait applicable aux effets des flexions variables, comme celles que la commission anglaise qui va être citée a opérées au moyen d'un excentrique pressant et lâchant alternativement le milieu d'une barre.

En appliquant cette même méthode à la résistance qu'éprouverait une voiture roulant sur un système de ressorts verticaux juxtaposés, nous avons trouvé une expression du frottement de roulement sur un sol élastique, assez conforme à quelques expériences (Soc. Phil., 24 juin 1845; ou n° 604 du journal l'*Institut*. Note sur le frottement de roulement ou de deuxième espèce). M. Phillips a aussi appliqué cette méthode (Comptes rendus, 15 février 1864, t. LVIII, p. 347).

ticaux qu'elle prend en faisant fléchir la poutre, ou, ce qui revient au même, des forces centrifuges engendrées; et, aussi, de l'inertie mise en jeu par les mouvements des diverses parties de la poutre en ayant égard à ce qu'elles n'ont pas le temps de prendre d'un bout à l'autre les mêmes flexions et les mêmes situations à chaque instant que dans l'état produit statiquement par une force verticale agissant dans chacune des situations occupées par la charge.

Cette question a été l'objet de l'*Appendice* B, fort étendu, du célèbre rapport déposé le 26 juillet 1849 par la commission que le gouvernement anglais avait chargée en 1847, de recherches sur la force des rails et des poutres métalliques des chemins de fer (1).

Après plusieurs séries d'expériences, où MM. Willis, James et Douglas Galton relevèrent exactement la suite des formes prises par des barres sur lesquelles ils faisaient rouler des cylindres de fonte avec différentes vitesses en augmentant à volonté, par une disposition ingénieuse, l'effet de l'*inertie* de la barre sans la rendre plus grosse ni moins flexible, M. le professeur Willis s'est livré à des recherches analytiques ayant pour objet la détermination théorique de la trajectoire du poids mobile (2). En tenant compte de l'inertie de ce poids, mais en négligeant celle de la barre, ou en supposant que celle-ci prend la même forme à chaque instant que si la pression qui s'y exerce, due au poids et à la force centrifuge, agissait sur elle statiquement, il a posé facilement une équation différentielle de cette trajectoire (3).

---

(1) *Report of the Commissioners appointed to inquire into the Application of Iron to Railway Structures.* Nous reviendrons sur ses importants travaux.

(2) Même *Report*, p. 197. *Theoretical inquiry of the Trajectory.*

(3) Cette équation est $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{g}{V^2}\left[1-\frac{y}{f}\cdot\frac{a^4}{(2ax-x^2)^2}\right]$, $2a$ étant la longueur de la barre entre les deux appuis, y étant la dépression verticale à une distance x du premier appui, V la vitesse horizontale de la charge Q, $f=\frac{Qa^3}{6EI}$ la flèche statique qu'elle ferait prendre à la barre si elle était posée sur son milieu, E est le coefficient d'élasticité et I le moment d'inertie de la section. En effet, si l'on appelle 2P une charge statique s'exerçant transversalement à des distances x et $2a-x$ des deux appuis, on trouve facilement avec Navier (cité par M. Willis),

M. Stokes l'a intégrée complétement [1], et il a évalué, tantôt par l'intégrale obtenue, tantôt par des séries qui prêtent mieux au calcul [2], les nombres qui composent deux tables numériques (V et VI, p. 199 et 200 du *Report*) fournissant, pour une suite de valeurs de l'abscisse, de cinquantième en cinquantième et de vingtième en vingtième de la portée totale de la poutre, celles de la dépression ou de l'ordonnée y de la trajectoire, ou plutôt de son rapport $\frac{y}{f}$ à la flèche statique f que produirait la charge en équilibre au milieu de la poutre. Ces deux mêmes tables, qui

---

que la dépression ou flèche y produite à l'endroit même de la charge est $y=\frac{2P[x(2a-x)]^2}{3.2a.EI}$ (édition de 1833, n° 359). Or il faut y faire

$$2P=Q-\frac{Q}{g}\frac{d^2y}{dt^2}=Q-\frac{Q}{g}\frac{V^2d^2y}{dx^2},$$

car il faut attribuer à l'action de la charge sur la barre une valeur égale à son poids Q augmenté, soit de son *inertie* $-\frac{Q}{g}\frac{d^2y}{dt^2}$, soit, ce qui revient au même, de la force centrifuge $\frac{QV^2}{g\rho}$, $\frac{1}{\rho}$ étant la courbure, sensiblement égale à $-\frac{d^2y}{dx^2}$ quand elle est faible. Ces substitutions donnent bien l'équation posée, du second ordre.

[1] Dans un beau mémoire inséré au t. VIII, part. V, année 1849, des Transactions of the Cambridge philosophical Society, p. 787, intitulé : *Discussion of a differential Equation relating to the breaking of Railway Bridge*. L'intégrale de cette équation, posée à la note précédente, est

$$y=\frac{g}{2aV^2}\frac{1}{m-n}\left[x^m(2a-x)^n\int_0^x x^n(2a-x)^m\,dx-x^n(2a-x)^m\int_0^x x^m(2a-x)^n\,dx\right]$$

si m, n sont deux nombres tels que $m+n=1$, $mn=\frac{ga^2}{4fV^2}$.

[2] Par exemple quand, dans l'équation différentielle de la note (3), réductible, en faisant $x=2ax$, $y=16fy$, et $\frac{ga^2}{4V^2f}=6$, à la forme $y=(x-x^2)^2-\frac{1}{6}(x-x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2}$, la constante 6 est grande, on obtient facilement par des approximations successives cette série convergente, où X est écrit pour $(x-x^2)^2$

$$y=X-\frac{1}{6}X\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{6^2}X\frac{d^2}{dx^2}\left(X\frac{d^2X}{dx^2}\right)-\frac{1}{6^3}X\frac{d^2}{dx^2}\left(X\frac{d^2}{dx^2}\left(X\frac{d^2X}{dx^2}\right)\right)+\ldots;$$

procédé qui s'appliquerait à des équations plus compliquées, où l'on tiendrait compte de l'inertie de la barre.

s'appliquent à neuf grandeurs $\left(\text{de } \frac{5}{36} \text{ à } 20\right)$ d'une certaine constante 6 (¹), donnent aussi, dans d'autres colonnes, les rapports, appelés z, de l'ordonnée ou de la dépression dynamique en chaque point, à la dépression statique que produirait au même point la charge en équilibre (²); enfin, dans d'autres colonnes, les valeurs correspondantes T de ce que M Stokes appelle la *tendance* relative *à la rupture*, et qui est le rapport du plus grand moment de flexion ou de la plus grande courbure dans l'état dynamique, pour chaque position de la charge mobile, au plus grand moment ou à la plus grande courbure qu'on aurait dans l'état statique en plaçant cette charge au milieu de la poutre (³).

On reconnaît ainsi que le rapport de la dépression dynamique à la dépression statique est très-faible aux points proches du premier appui, c'est-à-dire de l'endroit où la charge arrive sur

---

(¹) L'inverse $\frac{1}{6} = \frac{V^2}{g} \cdot \frac{2Qa}{3EI}$ de cette constante numérique (appelée B à la traduction du Rapport par M. Busche), est égale au double de la hauteur due à la vitesse V, multipliée par la courbure $\frac{4f}{a^2} = \left(-\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=a}$ au milieu de la trajectoire $y = \frac{f(2ax - x^2)^2}{a^4}$ qui serait parcourue si la vitesse de la charge était infiniment petite; en sorte que $Q\left(1 + \frac{1}{6}\right)$ est le poids Q augmenté de l'inertie ou de la force centrifuge qu'il acquiert à ce point milieu en parcourant une pareille trajectoire.

(²) On a $z = \frac{y}{f}\left(\frac{a^2}{2ax - x^2}\right)^2$ qui, comme on voit, se réduit à $\frac{y}{f}$ pour $x = a$ au milieu de la poutre.

(³) On a $T = \frac{y}{f} \cdot \frac{a^2}{2ax - x^2}$. En effet, quand la masse de la poutre est négligeable, la courbure s'opère à chaque instant comme sous une charge statique $Q - \frac{Q}{g} V^2 \frac{d^2y}{dx^2}$; et comme la plus grande courbure a lieu alors au point où cette charge agit, le plus grand moment est cette même charge multipliée par $\frac{x}{2a}(2a - x)$. Or ce produit, d'après l'équation précédente, est égal à $\frac{y}{2ax - x^2} \cdot \frac{Qa^3}{2f}$; et son rapport au plus grand moment de l'état statique $\frac{Qa}{2}$ est bien ce que nous venons d'égaler à T.

la poutre, et est au contraire extrêmement grand aux points proches du deuxième appui, c'est-à-dire de l'endroit où la charge quitte la poutre; et, pour certaines valeurs de la constante appelée 6, ce rapport, après avoir atteint l'infini, devient négatif, ce qui prouve que la poutre, fléchie par le passage de la charge vers le milieu, rebondirait vers la deuxième extrémité, et quitterait quelquefois l'appui correspondant. La *tendance à rupture*, qui est proportionnelle à la courbure prise, acquiert sa plus grande valeur au delà du milieu de la poutre; son rapport, appelé T, à celle qui a lieu au milieu dans l'état statique, est d'environ 3/2 quand la constante dont nous avons parlé est 3; mais elle s'élève bien plus haut quand cette constante 6 est moindre ou quand les vitesses sont considérables.

Lorsque la constante 6 est grande, c'est-à-dire la vitesse petite ainsi que le poids fléchissant, ou la roideur de la pièce considérable et la flèche statique faible, l'augmentation proportionnelle de flèche, au milieu, due au mouvement, est sensiblement mesurée par l'inverse $\frac{1}{6} = \frac{4fV^2}{ga^2} = \frac{2QaV^2}{3gEI}$ de cette constante, et l'augmentation correspondante de la plus grande courbure, ou du moment qui tend à rompre, suit la même proportion, égale tout juste *à celle de la partie de la pression de la charge qui est due à son inertie*, ou à la force centrifuge qu'elle acquerrait au milieu de la trajectoire répondant à une vitesse infiniment petite, si elle la parcourait au lieu de la trajectoire réelle [1].

---

[1] C'est-à-dire que la flèche ou la courbure maximum dynamique est à la flèche ou à la courbure maximum statique comme 1 est à

$$1 + \frac{1}{6} = 1 + \frac{V^2}{g} \cdot \frac{2Qa}{3EI} = 1 + \frac{V^2}{g} \cdot \frac{4f}{a^2}.$$

Cela résulte immédiatement de l'équation différentielle $y = \frac{f(2ax - x^2)^2}{a^4} \times \left(1 - \frac{V^2}{g}\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ donnant, en négligeant $\frac{V^2}{g}\frac{d^2y}{dx^2}$ devant 1, la dépression statique qui, regardée comme une première approximation, et substituée dans la parenthèse, donne $1 + \frac{4fV^2}{ga^2} \cdot \frac{6ax - 3x^2 - 2a^2}{a^2}$; d'où $1 + \frac{4fV^2}{ga^2}$ au milieu ou pour $x = a$.

M. Willis a comparé ces résultats du calcul, rendus plus manifestes au moyen d'épures des trajectoires, avec ceux de diverses expériences faites à Portsmouth par MM. Henri James et Douglas Galton, et d'expériences non moins variées faites par lui à Cambridge plus en petit, mais d'une manière qui les rendait plus comparatives entre elles et qui permettait mieux d'en saisir la loi, surtout en ce qui regarde la part d'influence de l'inertie de la barre. Dans celles-ci, pour ne pas diminuer la flexibilité dont dépendent la sensibilité et la justesse des mesurages, et qui diminue naturellement quand la masse augmente, M. Willis se sert constamment de la même barre d'acier, de $1^{m},22$ de long sur $5^{mm},84$ d'équarrissage ; et il fait varier artificiellement son inertie en suspendant, au milieu, par une bielle verticale mince, l'une des deux extrémités d'un appareil qu'il appelle une *balance d'inertie,* consistant dans un simple levier horizontal à deux bras égaux, sur lequel on met des masses tantôt plus petites tantôt plus grandes, mais toujours en équilibre statique sur ce levier ; de sorte qu'elles ne résistent au mouvement vertical de la bielle qu'autant que ce mouvement est accéléré ou retardé. Comme M. Willis trouve que l'inertie de la barre doit résister à peu près de la même manière que si sa masse était concentrée à son milieu, mais réduite seulement aux $0,486 = \frac{17}{35}$ de sa grandeur [1], il peut comparer facilement, en

---

[1] On a vu (fin du n° LI, note) que cette masse, réduite aux $\frac{17}{35}$ concentrés au milieu, *a la même force vive que toute la barre* si l'on suppose, comme fait M. Willis, que ses divers points se déplacent transversalement comme dans l'état statique sous l'action d'une charge centrale.

En partant de cette même supposition on peut facilement, sans remplacer les masses des éléments de la barre par une masse centrale unique, calculer pour un instant quelconque les rapports approchés de leurs diverses inerties à celle du poids roulant (ou à sa force centrifuge) et en déduire, comme deuxième approximation, par deux équations de moments de flexion, l'état de la barre soumise à ces diverses forces ainsi qu'à la charge et aux réactions des appuis ; d'où, pour la trajectoire, une équation différentielle du second ordre, analogue à celle de la note ci-dessus, ou contenant $\frac{d^2y}{dx^2}$, y première puissance et diverses puissances entières de x. En l'intégrant en série comme nous avons dit qu'a fait M. Stokes

divers points de la barre, les inerties factices créées par son appareil; et il trace en conséquence les trajectoires que suivrait la charge pour divers rapports du poids roulant au poids de la barre d'une roideur supposée constante.

La comparaison avec les trajectoires calculées de M. Stokes donne une concordance approchée quand le poids de la barre est très-faible; mais quand le poids de la barre approche de celui de la charge roulante, elle donne un écart déjà sensible qui augmente beaucoup.

En conséquence M. Stokes, dans une deuxième addition à son mémoire (où il fait un examen critique d'un article de M. Cox) [1], pose une équation complète de l'équilibre de rotation de la barre autour d'un quelconque de ses points, sous l'action de toutes les forces y compris les inerties de ses parties. Débarrassée par deux différentiations, comme on fait ordinairement, de la variable auxiliaire qu'elle contient sous deux intégrales qui y entrent, cette équation devient exactement celle du mémoire de 1779 d'Euler, à deux termes différentiels l'un du 4e ordre par rapport à l'abscisse x, l'autre du 2e ordre par rapport au temps t, car pour tous les problèmes relatifs à une lame ou barre vibrant transversalement, l'équation indéfinie est la même, et ils ne diffèrent que par les conditions définies aux limites de la barre ou de chaque partie de la barre. Comme il ne paraît pas qu'on puisse l'intégrer exactement avec les conditions du problème dont nous nous occupons, M. Stokes en cherche des solutions approchées, en supposant les inerties des divers éléments distribuées proportionnellement aux dépressions qu'ils prendraient sous l'action de poids uniformément répartis d'un bout à l'autre. Il y arrive, mais *pour le second cas extrême*, savoir le cas où c'est la masse mobile qui est très-petite par rapport à la masse de la barre et de sa charge permanente.

Enfin M. Phillips, et, quelques années après lui, M. Renaudot,

---

pour un cas plus simple, elle donne des résultats où l'inertie paraît comptée d'une manière suffisante quant au calcul des flèches successives servant d'ordonnées à la trajectoire.

[1] On the dynamical Deflection and Strain on Railway-Girders (Civil Engineer Journal, september 1848).

dans de remarquables mémoires, le premier présenté le 23 avril 1855, approuvé le 18 février 1856 et inséré aux *Annales des mines* (1), le second inséré en 1862 aux *Annales des ponts et chaussées*, ont cherché d'une manière nouvelle à donner une solution complète du problème, en tenant compte de la masse de la poutre ainsi que de celle d'une charge permanente répartie sur sa longueur (2). M. Phillips pose d'abord, pour les deux parties dans lesquelles la barre se trouve partagée au point où se trouve la charge, supposée agir en un seul endroit à chaque instant, deux équations différentielles du quatrième ordre en x et du deuxième en t comme celle d'Euler, et les équations de condition à la jonction ainsi qu'aux extrémités, qu'il suppose successivement encastrées et simplement appuyées. Il cherche à satisfaire aux équations en exprimant l'inconnue par des séries ordonnées suivant les puissances entières de l'abscisse x, et dont chaque coefficient indéterminé est fonction du temps t. Il trouve facilement que ces coefficients peuvent se déduire tous, par des différentiations d'ordre pair, de quatre d'entre eux, dont deux pour chaque portion. Pour déterminer ceux-ci, qui, en vertu des conditions de raccordement, se trouvent engagés dans quatre équations différentielles d'ordre infini, M. Phillips les regarde comme développables eux-mêmes suivant les puissances entières successives d'une certaine constante $\frac{1}{k^2}$ proportionnelle au poids de la poutre par unité de longueur, et à sa *flexibilité* ou à l'inverse de son moment d'élasticité EI (3), et dont les puissances paires affectent déjà les termes successifs des équations en question. Chacun des coefficients des nouveaux

(1) Calcul de la résistance des poutres droites sous l'action d'une charge en mouvement, *Comptes rendus*, t. XL, p. 951 et XLI, p. 325 ; et *Ann. des Mines*, t. VII, 1855.

(2) Nous pensons avec M. Renaudot que cette charge permanente doit être supposée vibrer comme la poutre elle-même. Cela n'exige, au reste, d'autre modification aux équations de M. Phillips que d'annuler une constante.

(3) Cette constante $\frac{1}{k^2}$ est, en effet, avec les notations précédentes, et en appelant P le poids de la poutre et de sa charge, égale à $\frac{1}{2ag}\frac{P}{EI}$.

développements se trouve ainsi dépendre d'une simple équation différentielle du second ordre, intégrable par une marche d'approximations successives, en série de termes qui sont des fonctions connues du temps, ou de l'abscisse actuelle du poids voyageur, affectés des puissances d'un produit de ce poids par la longueur et la flexibilité de la poutre et par les deux tiers de la hauteur due à la vitesse du mouvement (c'est-à-dire des puissances de la constante $\frac{1}{6}$ de M. Stokes).

En négligeant partout les puissances deuxième et supérieures de ces deux constantes, M. Phillips obtient des solutions qui satisfont, dans les limites de l'approximation à laquelle il se borne, aux diverses conditions de la question, excepté à la condition initiale de l'immobilité de la poutre, car, d'après les formules trouvées, les éléments auraient déjà, avant le passage de la charge, certaines vitesses transversales. Mais M. Phillips montre que les mouvements vibratoires qui résulteraient d'ébranlements initiaux correspondants sont, dans les limites des données de la pratique, faibles et sans influence sensible sur l'évaluation des déplacements et des résistances.

Le résultat principal est que la courbure, dont dépend la tendance à rompre, peut être évaluée comme pour l'état de repos sous la double action de la charge placée au milieu et du poids propre de la poutre, en augmentant cette courbure statique locale dans une certaine proportion, qui est précisément celle que donne le calcul de M. Stokes relatif au cas où l'inertie de la poutre peut être négligée, et qui résulte aussi, comme on a vu (note 2, p. ccxlj), d'une intégration en série, bornée à deux ou trois termes, de l'équation différentielle du second ordre posée par M. Willis [1], et se réduisant, quand on se tient à deux termes, à ce dont l'inertie verticale de la charge ou sa force centrifuge augmente sa pression sur la poutre. M. Phillips tire, pour le cas d'une poutre encastrée aux deux bouts, des conséquences analogues [2].

---

[1] En effet, avec la notation $\frac{1}{6} = \frac{2QdV^2}{3gEI}$, il trouve $1 + \frac{1}{6} + 2{,}5\,\frac{1}{6^2} + \ldots$.

[2] Le deuxième terme de la seconde parenthèse de l'expression numérotée (76) aurait besoin d'être réduit de moitié, comme l'a remarqué M. Bresse, en rectifiant une inadvertance dans le calcul final.

Le calcul de M. Renaudot est imité de celui de M. Phillips, mais relatif au cas où la charge roulante occupe, comme un convoi, une certaine longueur de la poutre. Dans ses Résumés et conclusions (p. 197), il néglige aussi ce qui vient de la masse de la poutre en ce qui est relatif aux rapports de la tension dynamique à la tension statique.

Cette solution, qui se distingue par la hardiesse des expédients, mériterait qu'on poussât plus loin le calcul des termes successifs des trois ordres de séries entières dont M. Phillips a cru pouvoir faire usage et qui s'y combinent, principalement celle qui procède suivant les puissances de la masse de la poutre, afin de s'assurer au moins par des exemples numériques nombreux, de leur convergence dans les cas de la pratique. La question, dans l'état actuel, ne paraît point épuisée. On a vu en effet tout à l'heure que la correction de la flèche statique, semblable à celle qui a été déduite par M. Stokes du calcul de la courbure de la trajectoire pour une inertie nulle de la poutre, donnait des résultats très-différents de ceux des expériences de M. Willis pour peu que la masse de la poutre approchât de celle de la charge roulante.

On a vu aussi, au n° XXXII, et l'on verra encore au n° LX, que les séries entières n'ont pas toujours fourni à MM. Poisson et Cauchy, dans des problèmes d'équilibre, des résultats conformes, même par approximation, avec ceux d'une analyse plus exacte où l'on ne faisait point usage de cette forme de développement non justifiée; et l'on a encore vu (n°s LII et LIII) que dans des questions de mouvement ou de *résistance vive*, ces sortes de séries, tout en donnant à peu près les flèches centrales ou les allongements dynamiques totaux des barres heurtées transversalement ou longitudinalement, ne fournissaient, pour les allongements individuels des parties, ou pour les courbures, que des nombres fort différents de ceux que révèlent les intégrales exactes en séries de sinus, ou de sinus et d'exponentielles. Une masse roulante, il est vrai, ne doit pas produire autant qu'une masse heurtante, ces vibrations du second et du troisième ordre qui rendent très-onduleuse et très-variable la forme réelle de la pièce, et qui produisent, en cer-

tains points, des courbures très-fort au-dessus de celles qu'on a quand l'inertie est négligée, ou la déformation supposée propagée instantanément. Mais quelque chose de semblable doit néanmoins se produire ici à un certain degré, et paraît échapper aux calculs que nous citons, ainsi qu'aux expériences faites jusqu'à présent, où l'on n'a guère observé que les flèches de courbure (1).

Nous pensons donc que jusqu'ici il n'y a de solutions analytiques complètes et certaines du problème de la résistance aux déformations dynamiques des pièces solides que celle qui a été donnée par Navier pour les allongements produits par un choc longitudinal, en y joignant celle que nous avons donnée suivant les mêmes principes et par une marche analogue pour le choc transversal (n° précédent LVI).

LVIII. **Surfaces élastiques. Sphère et cylindre creux. Tuyaux. Vases. Chaudières et réservoirs. Mariotte. Navier. M. Lamé.** — Voyons maintenant ce qui a été fait pour le calcul des déformations et des vibrations des vases et des plaques.

C'est pour arriver au calcul des épaisseurs des tuyaux cylindriques supportant des pressions dans leur intérieur, et de celles des rondelles ou platines qui les ferment, que Mariotte a entrepris et inséré dans le *Traité du mouvement des eaux* ses recherches théoriques et expérimentales sur la résistance des solides en général.

D'après la première des deux règles qui terminent son *deuxième discours* dejà cité (n° IV), l'épaisseur du tuyau, supposé cylindrique à section circulaire, doit être proportionnelle à la fois à la pression et au diamètre.

Ce théorème se démontre de suite en supposant le tuyau

(1) Il serait possible d'obtenir la suite des formes d'une barre ou heurtée ou sollicitée par une charge roulante, en fixant latéralement, à plusieurs de ses points, des styles qui marqueraient leur trace sur un plan vertical enduit de noir de fumée et entraîné rapidement dans une direction oblique à l'horizon pour éviter la confusion des différentes traces. Ce serait un sujet digne de la sagacité des habiles expérimentateurs qui ont enrichi la science de tant de faits soigneusement observés, surtout au Conservatoire sous la direction de M. Morin.

coupé longitudinalement par un plan méridien. Pour l'équilibre d'une moitié du tuyau et du fluide contenu, la tension sur l'unité de longueur, dans chacune des deux coupes de la matière suivant son épaisseur, doit être égale à *la pression intérieure de l'eau sur l'unité superficielle, multipliée par le rayon.*

De même, pour une sphère creuse, Navier a remarqué que la tension totale, dans une coupe annulaire diamétrale, doit être égale à la pression intérieure par unité superficielle, multipliée par la surface d'un grand cercle intérieur, ce qui donne, par unité de longueur de l'arc intérieur de la coupe, une tension égale à la pression multipliée par *la moitié* du rayon.

Quant aux dilatations que les tensions font éprouver à la paroi suivant les sens tangentiels transversaux, et auxquels il faut imposer la limite désignée ordinairement par $\frac{R_0}{E}$ pour établir l'équation de cohésion, elles ne sont point égales dans toute l'épaisseur de la paroi, soit cylindrique, soit sphérique; et leurs moyennes n'ont point pour mesure, même lorsque l'épaisseur est très-petite, les tractions divisées par la section et par le module d'élasticité E de l'allongement et de la flexion d'un prisme de même matière dont les faces sont libres. MM. Lamé et Clapeyron ont déterminé, en 1828, par une analyse rigoureuse, fondée sur la théorie de l'élasticité [1], la manière dont les tensions et les dilatations varient dans l'épaisseur, soit d'un tuyau cylindrique indéfini, fermé aux deux bouts [2], soit d'une sphère creuse, dont Poisson s'est occupé la même année à peu près dans les mêmes termes [3]. On en déduit que lorsque les parois sont très-minces, leurs dilatations dans le sens tangentiel transversal sont égales aux tensions par unité de section diamétrale, divisées, non pas par le coefficient d'élasticité ordinaire E, mais par $\frac{8}{7}$ E pour le cylindre, et par $\frac{4}{3}$ E pour la sphère. On trouve,

---

(1) Sur l'équilibre intérieur des solides homogènes, 1828 (Sav. étr., t. IV), nos 45 à 48, et 57 à 60.

(2) Nous pensons qu'il convient de supposer toujours cette fermeture, même dans un tuyau de conduite ouvert aux deux bouts s'il est d'une grande longueur, car la pression de l'eau contenue doit être à peu près égale en tous sens.

(3) *Ann. de ch. et de ph.*, 1828, 2e série, t. XXXVIII, p. 330.

aussi, que si l'épaisseur est le 1/6 du diamètre extérieur, la dilatation tangentielle, dans la sphère comme dans le cylindre, est à peu près deux fois plus forte du côté intérieur que du côté extérieur (1).

Les deux théorèmes élémentaires ci-dessus $T = pr$ pour le tuyau et $T = \frac{1}{2} pr$ pour la sphère creuse à parois minces (r et r étant leurs rayons, p la pression intérieure, ou plutôt son excès sur la pression extérieure de l'atmosphère, et T la traction tangentielle), peuvent se démontrer aussi sur des portions, même infiniment petites, de leurs parois, à savoir sur une calotte de la sphère et sur une bande longitudinale du tuyau. Mais ils exigent pour être exacts, comme l'observe M. Lamé (2), que les tractions tangentielles exercées aux contours de ces portions produisent les mêmes dilatations que si la sphère était entière et partout également pressée et que si le cylindre était aussi entier et même de longueur infinie, ou que si la partie considérée était infiniment éloignée des deux couvercles ou platines de fermeture. Il en résulte, continue M. Lamé, que si une chaudière à vapeur est composée d'un cylindre terminé par deux calottes de sphère, les tractions ne se régleront conformément aux deux théorèmes $T = pr$ et $\frac{1}{2} pr$ qu'autant que les épaisseurs de la paroi cylindrique et du fond sphérique seront entre elles comme 7 fois le rayon r de la partie cylindrique est à 3 fois le rayon r de la partie sphérique. C'est, en effet, la condition pour que les dilatations tangentielles soient les mêmes pour toutes deux, à leur cercle de jonction, et conséquemment partout, et que par conséquent aussi le rayon de ce cercle s'étende autant comme faisant partie de l'une que comme faisant partie de l'autre (3).

---

(1) M. Barlow, dans son chapitre *Force des presses hydrauliques*, trouve que ce rapport n'est que celui des inverses des diamètres intérieur et extérieur. On voit qu'il est bien plus considérable. C'est que son calcul est basé sur la supposition que l'aire de l'anneau est la même après qu'avant la dilatation, et que la densité est restée uniforme, ce qui n'est point exact (A Treatise of the Strength, etc., édition de 1837).

(2) Note sur les épaisseurs et les courbures des appareils à vapeur (Comptes rendus, 18 février 1850, t. XXX, p. 157).

(3) En effet si e, e sont les deux épaisseurs supposées petites, les dilatations

La même règle peut servir à très-peu près pour les épaisseurs de la paroi cylindrique et du fond sphérique d'un réservoir d'eau en tôle [1].

C'est au moyen des mêmes formules du mémoire de 1828, modifiées comme à la 16e leçon sur l'élasticité en y introduisant deux coefficients, que M. Lamé a fourni à M. Regnault un calcul approximatif des dilatations de ses piézomètres de deux formes, dont nous parlons à l'appendice V, p. 668 et 674.

Si un tuyau cylindrique a une coupe transversale d'une autre forme que le cercle, la tension en un endroit quelconque, comme le prouve Navier par un raisonnement simple, est la moitié de la pression intérieure (supposée constante) pour une surface égale à la projection de l'unité de longueur du tuyau sur un plan parallèle à ses arêtes et à la normale en cet endroit. Et, pour un vase fermé, par une raison semblable, la somme des tensions dans la portion de paroi répondant à la courbe de contact d'un cylindre qui envelopperait ce vase tangentiellement, est égale à la pression intérieure sur une surface égale à la section droite du cylindre.

Mais quand les coupes ne sont pas circulaires, la pression produit généralement, avec la tension qu'elle développe, des *flexions* qui tendent à les rendre telles, et dont il résulte des inégalités plus ou moins considérables dans la répartition des dilatations suivant les épaisseurs : il faut calculer la plus grande pour lui imposer une limite [2].

---

des parois du cylindre et de la sphère seront respectivement, comme nous venons de dire, $\frac{pr}{\frac{8}{7}\,Ee}$ et $\frac{\frac{1}{2}\,pr}{\frac{4}{3}\,Ee}$. Leur égalité donne bien la proportion $\frac{e}{e} = \frac{7r}{3r}$ de M. Lamé.

(1) La formule à laquelle arrive M. Dupuit pour ce fond (Traité de la conduite et de la distribution des eaux, page 242) revient à $T = \frac{1}{2}\,pr$ donné ci-dessus. L'attaque que M. Love dirige contre cette formule (Des diverses résistances de la fonte, du fer et de l'acier, 1859, n° 152, p. 235) n'a nul fondement, non plus que le raisonnement par lequel il prétend prouver qu'au centre de la calotte la tension est nulle.

(2) C'est ce qu'a fait M. Bresse (Société philomathique, 28 février 1857), sur une

Quand la pression la plus forte vient de l'extérieur de l'enveloppe sphérique ou cylindrique, les conditions sont analogues, excepté lorsque des inégalités de courbure ou d'épaisseur déterminent des flexions qui peuvent amener un aplatissement ou écrasement.

LIX. **Plaques et membranes élastiques. Leur équilibre et leurs vibrations. Euler. Jacques Bernoulli** (de 1787). **Sophie Germain. Lagrange. Poisson** (1814). **Première rectification, presque complète, et applications exactes, par Navier.** — Quant aux plaques, aux membranes, et aux vases ouverts, tels que les cloches, nous pouvons parler ici à la fois de ce qui est relatif à leurs vibrations et de ce qui regarde leurs déformations statiques.

Il n'a été fait dans le siècle dernier, comme dit M. Poisson [1], que quelques essais infructueux sur les *surfaces élastiques* pliées à la fois dans deux sens différents. Ainsi Euler, après avoir donné en 1764 une équation de la forme $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\zeta}{dx^2} + b^2 \frac{d^2\zeta}{dy^2}$ pour le mouvement vibratoire des *tambours* ou membranes parfaitement flexibles, en les considérant comme des tissus de fils élastiques se croisant rectangulairement [2], a présenté, dix-huit pages plus loin, un essai sur le son des cloches [3], qu'il décompose, moins heureusement, en anneaux vibrant indépendamment l'un de l'autre, supposition qui conduit à des résultats en désaccord avec l'expérience comme avec le véritable état des choses.

En 1787 un jeune géomètre portant le beau nom de Jacques

---

indication de M. Belanger, pour une chaudière dont la coupe offre un petit degré d'ellipticité. Voir aussi le n° 107 de la deuxième édition (1862) de la Théorie de la résistance et de la flexion plane des solides, par M. Belanger.

(1) Mémoire sur les surfaces élastiques, lu le 1er août 1814 (Mém. de la classe des sciences mathématiques de l'Institut, 1812), déjà cité nos XXII et XXIX.

(2) *De motu vibratorio tympanorum*, au tome X (1767) des *Novi commentarii* Academiæ Petropolitanæ, p. 243.

(3) *Tentamen de sono campanarum*. (*Idem*, p. 1785.)

Bernoulli [1], présenta, à l'occasion des expériences que venait de publier le physicien allemand Chladni sur les plaques sonores [2], un mémoire dans lequel, appliquant à une plaque rectangulaire une hypothèse analogue à celle qu'avait faite Euler sur les toiles ou membranes, il la considère comme formée de deux systèmes superposés de lames parallèles à ses deux côtés, ce qui lui donne facilement, x et y étant les coordonnées comptées dans les mêmes directions, sur le plan moyen, K une constante et ζ l'ordonnée normale ou le petit déplacement perpendiculaire à la plaque, une équation

$$K\left(\frac{d^4\zeta}{dx^4}+\frac{d^4\zeta}{dy^4}\right)=Z \quad \text{ou} \quad =-m\frac{d^2\zeta}{dt^2}$$

selon que la plaque est en équilibre sous une charge Z par unité superficielle au point (x,y) ou selon qu'elle vibre, m représentant sa masse aussi par unité. Cette équation est incomplète; elle manque d'un terme $2K\frac{d^4\zeta}{dx^2dy^2}$ comme nous allons voir. L'auteur reconnaissait, au reste, qu'on pouvait lui objecter la division également possible de la plaque en lames non droites, ou bien non orthogonales, etc., « ce qui ne donnerait peut-être pas la même chose, » mais en ajoutant qu'il ne présentait son mémoire que comme un premier essai sur ce sujet.

Cependant Chladni étant venu en France vers 1808 et ayant montré les curieuses lignes nodales, de forme courbe régulière et très-variée, qui sont dessinées par le sable fin répandu sur les plaques qu'il faisait vibrer à l'aide d'un archet, l'Académie, sur l'indication du souverain d'alors, proposa en 1810 pour sujet de prix de *donner la théorie mathématique des vibrations des surfaces élastiques*, et *de la comparer à l'expérience* [3]. Une seule

---

(1) Fils du second Jean (ou petit-fils du premier, et neveu de Daniel), né en 1759, mort en 1789 d'un accident dans la rivière de Neva. *Essai théorétique sur les vibrations des plaques rectangles et libres*, présenté le 21 septembre 1788. Tome V (1789) des *Nova acta*.

(2) Cette première publication de Chladni parut à Leipsig en 1787.

(3) Traité d'acoustique de Chladni, traduction publiée par lui en 1809. p. 357.

pièce fut envoyée, car, seule entre les géomètres du temps, mademoiselle Germain [1] ne se laissa pas décourager par un mot de Lagrange, qui avait dit qu'il faudrait, pour la solution de cette question, un nouveau genre d'analyse. Elle aperçut et énonça un principe qui lui parut capable de conduire à l'équation véritable. Ce principe revient à ce que la somme $\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}$ des courbures, ou des inverses des rayons de courbure ρ, ρ' dans deux sens rectangulaires, somme qui mesure en quelque sorte le degré de déformation de chaque élément de la plaque, doit jouer dans la flexion le même rôle que la courbure $\frac{1}{\rho}$ dans la flexion d'une simple tige primitivement droite; en sorte que cette somme multipliée par une constante mesurerait la force élastique tendant à ramener à sa forme plane l'élément superficiel courbé, et à diminuer par conséquent la même somme; d'où il suivrait que le *moment* ou *travail virtuel* de la réaction en question serait égal, pour toute la plaque, à la somme des superficies des éléments multipliés par une constante K et par le produit $\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}\right)\delta\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}\right)$ de la même somme par sa *variation* ou différentielle par δ; en sorte que le *potentiel* des forces élastiques développées, ou la quantité dont la variation donne le travail virtuel, serait $\frac{K}{2}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}\right)^2$ par unité superficielle.

Comme elle fit, à ce qu'il paraît, une erreur de calcul en posant ou en développant l'équation de travaux virtuels qui en découle, son mémoire de 1811 ne fut pas jugé remplir les conditions du programme. Mais Lagrange, qui encourageait les travaux de cette personne aussi modeste qu'éminente, adopta son idée et lui montra qu'on en tirait facilement, par les méthodes de la mécanique analytique, l'équation

$$K\left(\frac{d^4\zeta}{dx^4}+2\frac{d^4\zeta}{dx^2dy^2}+\frac{d^4\zeta}{dy^4}\right)=Z \quad \text{ou} \quad -m\frac{d^2\zeta}{dt^2} \text{ [2]}.$$

---

(1) Née en 1776, morte en 1831. Voyez la notice en tête de ses *Considérations sur l'état des sciences et des lettres*, publiées en 1833.

(2) En effet, en réduisant les courbures aux valeurs qu'elles prennent quand

La question fut remise au concours une deuxième et une troisième fois, et Sophie Germain, en présentant en 1813 cette équation différentielle complète, avec un essai d'établissement, par le même principe, des conditions-limites pour les seules plaques rectangulaires, obtint d'abord une mention honorable; puis, de nouveaux développements, et l'extension à des plaques naturellement courbées en forme de surface cylindrique, sur lesquelles elle fit également des expériences, lui méritèrent le grand prix en 1816. Elle ne se détermina qu'en 1821, sur les exhortations de Fourier et de Legendre, à publier ses travaux (1), auxquels elle donna une suite en 1826 (2). Tout en soutenant son hypothèse, elle semble décliner l'invention de l'équation différentielle, en se réservant pour tout mérite de l'avoir appliquée. Ses intégrales, exprimées en sinus et exponentielles, sont *particulières*, et ne fournissent que le nombre de vibrations principales ou du ton le plus grave, et le nombre des lignes nodales, sans déterminer les amplitudes de celles-là ni les formes de celles-ci. On verra plus loin que le potentiel, ou la quantité à rendre un minimum pour l'équilibre, est proportionnel, non pas à $\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}\right)^2$, mais à ce carré plus une constante multipliée par la somme $\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho'^2}$, qui, traitée de même, conduit à la même équation du quatrième ordre (3).

Aussitôt qu'il eut connaissance de l'équation différentielle nouvelle, Poisson en chercha une démonstration exacte, et lut

---

elles restent très-petites, on a, pour toute l'étendue de la plaque

$$K\iint dxdy\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}+\frac{d^2\zeta}{dy^2}\right)\left(\frac{d^2\delta\zeta}{dx^2}+\frac{d^2\delta\zeta}{dy^2}\right)$$

qui, en intégrant par parties deux fois, donne, pour le terme restant affecté du double signe d'intégration, $K\iint dxdy\left(\frac{d^4\zeta}{dx^4}+2\frac{d^4\zeta}{dx^2dy^2}+\frac{d^4\zeta}{dy^4}\right)\delta z$.

(1) Recherches sur la théorie des surfaces élastiques, in-4°.

(2) Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques.

(3) En effet, les deux rayons de courbure principaux ρ et ρ' sont donnés comme

à ce sujet le mémoire, déjà cité, du 1er août 1814. Dans la première partie, il s'occupe des membranes, c'est-à-dire des surfaces infiniment flexibles ne résistant aux déformations, comme la corde vibrante, qu'en vertu de tensions longitudinales ou tangentielles ; et il parvient, en embrassant le cas où la forme primitive est courbe, à une équation qui se réduit, lorsque cette forme est plane, à celle d'Euler (de 1766), plus générale que celle de Lagrange, car, dans la *Mécanique analytique* (1), la ten-

---

l'on sait (quand la courbure est petite) par l'équation du second-degré

$$\left(\frac{1}{\rho}-\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{d^2\zeta}{dy^2}\right)=\left(\frac{d^2\zeta}{dxdy}\right)^2;$$

d'où résulte, en tirant leurs valeurs et en substituant,

$$\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho'^2}=\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)^2+2\left(\frac{d^2\zeta}{dxdy}\right)^2+\left(\frac{d^2\zeta}{dy^2}\right)^2.$$

Multipliant par $dxdy$, prenant les $\iint$, différentiant par δ et intégrant par parties, ce qui restera affecté du double signe et de $dxdy\delta z$ sera le même trinôme du quatrième ordre qui est fourni par $\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}\right)^2$.

(1) Edition de 1811, 1re partie, section V, ch. III, § II, nos 44, 45.

Fourier a aussi étudié les *surfaces élastiques*, d'abord seulement, dans un Mémoire présenté le 8 juin 1818, sous le rapport de la propagation d'un mouvement qu'on y excite quelque part, lorsqu'elles sont infinies en tous sens; et il a donné à ce sujet, de leur équation différentielle

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}+a^2\left(\frac{d^4\zeta}{dx^4}+2\frac{d^4\zeta}{dx^2dy^2}+\frac{d^4\zeta}{dy^4}\right)=0,$$

une intégrale en série d'exponentielles réelles et imaginaires susceptible d'être sommée par une intégrale définie. M. Poisson ayant présenté à cette occasion, à la séance suivante de la Société philomathique, et inséré à son Bulletin, p. 97, des *Remarques sur les rapports qui existent entre la propagation des ondes à la surface de l'eau* (sujet dont il s'était déjà occupé, même Bulletin, juin 1817, p. 85) *et leur propagation dans une plaque élastique*, Fourier répliqua par une *Note relative aux vibrations des surfaces élastiques et au mouvement des ondes*, où il donne de l'équation précédente une intégrale sous forme finie contenant deux fonctions arbitraires engagées chacune sous une intégrale double prise de $-\infty$ à ∞ par rapport à des variables auxiliaires. La même intégrale est donnée par Poisson quelques pages avant, au même cahier, p. 125, sous le titre : *Sur l'intégrale de l'équation relative aux vibrations des surfaces élastiques*, en partant de celle $z=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}\varphi\left(x+2\alpha\sqrt{mt}\right)d\alpha$ de $\frac{dz}{dt}=m\frac{d^2z}{dx^2}$, trouvée par Laplace (*J. de l'Éc. pol.*, 14e cahier). Mais M. Poisson ne fait aucun usage de cette intégrale dans son Mémoire de 1828 où il ne considère qu'une plaque de dimensions finies.

sion est seulement supposée égale en tous sens. Passant à ce qui est relatif à une plaque, c'est-à-dire à une surface capable de résister à la flexion, il suppose sa résistance due à des forces répulsives mutuelles entre ses points matériels (n° XXII ci-dessus). Ces forces, sur lesquelles il ne fait d'autre supposition que celle de leur action à des distances insensibles seulement, ne se trouvent finalement engagées, comme dans les calculs relatifs à l'action capillaire, etc., que dans des intégrales définies se réduisant à des constantes arbitraires déterminables par l'observation. Les changements de distance qui mettent ces actions en jeu ne sont, dans son analyse, que ceux des points de la surface moyenne, car, comme nous l'avons dit au n° XXII et comme il l'a reconnu, il réduisait la plaque à une série de points répandus sur cette surface plane, d'où il suit que le trinôme différentiel de Sophie Germain et de Lagrange n'est multiplié que par le carré de la masse de l'unité de surface de la plaque et par conséquent par le carré de son épaisseur tandis qu'il devrait l'être par le cube. Cette équation est applicable du reste à des surfaces douées de tous les degrés de flexibilité, car selon qu'on néglige certains termes ou certains autres elle peut servir à la plaque ou à la membrane. Poisson termine son mémoire en montrant (comme nous venons de faire dans deux notes, mais en embrassant le cas de courbures plus grandes) que la surface élastique, en appelant $d\omega$ son élément, a la propriété de rendre un minimum non-seulement $\int d\omega \left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}\right)^2$ mais encore $\int d\omega \left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho'^2}\right)$ et par conséquent toutes les sommes de ces deux intégrales multipliées par des constantes; ce qui vient, observe-t-il, de ce qu'elles diffèrent entre elles d'une constante multipliée par $\int \frac{d\omega}{\rho\rho'}$, dont la différentielle par δ est nulle quand on n'a égard qu'à ce qui reste sous le double signe $\int\int$ après qu'on a remplacé $d\omega$ par sa valeur $dxdy$ et intégré par parties. Cette propriété généralise celle qui avait été aperçue par D. Bernoulli et développée par Euler pour les simples lames (n° XIII).

Navier le premier envisagea les surfaces élastiques ou les plaques dans leur réalité physique en tenant compte de leur épaisseur, dans un mémoire déjà cité (n° XXII), présenté à l'Académie le 14 août 1820 et imprimé par extrait en 1823 [1]. Il composa pour cela (comme il fit l'année suivante pour des corps de forme quelconque) la résultante des actions s'exerçant sur chaque molécule de la part de toutes les molécules environnantes, en vertu de ce que leurs distances ont été augmentées ou diminuées par la courbure de la plaque, dont il suppose que les lignes matérielles primitivement normales aux deux faces leur sont restées normales. Comme il se sert du calcul des variations et de la méthode de la *Mécanique analytique*, les intégrations par parties lui fournissent non-seulement l'équation différentielle du quatrième ordre avec un coefficient où l'épaisseur entre au cube, mais, encore, les *équations aux limites*, ou les conditions à remplir aux bords de la plaque selon la direction et l'intensité des forces extérieures qui agissent sur ces bords.

Son analyse est exacte, excepté en ce qu'il suppose que les petits éléments linéaires, dans le sens de l'épaisseur, *restent de la même grandeur* qu'avant la courbure de la plaque, tandis que, par suite des dilatations $\frac{z}{\rho}$, $\frac{z}{\rho'}$ des éléments linéaires *dans les sens parallèles* à la plaque, au point à la distance z de la surface moyenne, et en vertu de ce qu'on suppose nulles les pressions perpendiculaires aux deux faces, les premiers éléments auraient dû être regardés comme se contractant dans des proportions $\frac{1}{3}\left(\frac{z}{\rho}+\frac{z}{\rho'}\right)$ d'après la théorie de l'élasticité, qui ne fut créée que l'année suivante par Navier lui-même, et développée seulement en 1827 dans ses conséquences par Cauchy et Poisson.

De cette omission il résulte que le potentiel par unité de surface, ou la quantité dont il faut rendre un minimum la somme des produits par les éléments superficiels, est proportionnel, dans son mémoire, à $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}\right)^2-\frac{2}{3}\frac{1}{\rho\rho'}$, tandis

[1] Bulletin de la Société philomathique, p. 92.

qu'il l'est réellement à $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}\right)^2-\frac{3}{4}\frac{1}{\rho\rho'}$. Cela n'empêche pas Navier d'arriver à la véritable équation indéfinie du quatrième ordre, ce que l'on comprend d'après la remarque finale du mémoire de Poisson rapportée tout à l'heure ; l'erreur n'affecte que les équations définies à satisfaire au contour. Encore est-elle tout à fait sans influence sur les belles applications qu'il en fait à la plaque rectangulaire, en sorte qu'on doit considérer Navier comme ayant le premier montré le genre de rectification qu'il fallait faire subir à l'expression du travail virtuel de déformation adoptée par Sophie Germain et Lagrange.

Il suppose horizontale la plaque rectangulaire, et :

1° Appuyée au contour sur un cadre fixe et chargée de poids arbitrairement répartis sur sa surface ; d'où il déduit comme cas particulier ce qui arrive quand la charge est ou au milieu ou également répartie, ce qui sert à démontrer analytiquement le théorème, prouvé tout autrement par Mariotte, de la constance du poids de rupture quelles que soient les dimensions.

2° Appuyée seulement sur quatre angles et sollicitée à tous les points de son contour par une force constante horizontale ou parallèle à son plan primitif (comme l'est une simple lame sollicitée debout ou longitudinalement).

Les intégrales offrent une belle application des méthodes de Fourier, alors nouvelles et non encore publiées.

LX. Suite des plaques et membranes. Poisson. Cauchy. M. Lamé. M. Kirchhoff. Potentiel moléculaire véritable des plaques. Nombre des conditions aux limites. — Mais la découverte des équations générales de l'équilibre d'élasticité permit bientôt à Poisson en 1828, et à Cauchy la même année, de présenter d'une autre manière celles qui sont relatives aux surfaces élastiques.

Poisson s'occupe d'abord de la membrane [1], à laquelle il attribue une courbure quelconque primitive ou acquise. Il la suppose sollicitée seulement par des forces agissant sur son

---

[1] Mémoire au t. VIII de l'Institut, 1828, n°s 51 et suivants.

contour, ainsi que par d'autres s'exerçant sur tous les points à la manière de la pesanteur et de l'inertie, et assez mince pour que les pressions intérieures puissent être regardées comme les mêmes dans toute l'étendue de son épaisseur. En exprimant l'équilibre d'un de ses éléments terminés par quatre faces normales, il obtient une équation, à laquelle M. Lamé arrive d'une manière bien plus simple (1) en taillant l'élément en forme de prisme quadrangulaire tronqué, qui a ses faces latérales perpendiculaires à deux des coordonnées. De cette équation il déduit, quand la membrane est primitivement plane, deux équations différentielles du second ordre donnant les déplacements que ses points peuvent éprouver dans deux sens parallèles à son plan, et, aussi, l'équation du second ordre, semblable à celle d'Euler (1766) donnant les vibrations perpendiculaires au même plan. M. Lamé l'a intégrée pour des cas remarquables où les diverses lignes nodales doivent se déterminer par des considérations tirées de la théorie des nombres.

Pour la plaque susceptible de résister à la flexion, Poisson et Cauchy (2), à défaut d'une intégration complète des équations de l'élasticité, jusqu'à présent ineffectuée pour les corps *finis* non sphériques, regardent les déplacements à l'intérieur comme exprimables en séries convergentes procédant suivant les puissances entières de la très-petite ordonnée z qui est la distance de chaque point à la surface moyenne divisant l'épaisseur en deux parties égales. En supposant qu'aucune pression ne s'exerce sur les deux faces, et en ne conservant qu'un certain nombre de termes des développements, ils arrivent à l'équation différentielle du 4e ordre ci-dessus, où Z doit être, comme l'on voit, une force agissant sur toutes les molécules à la manière de la pesanteur ou de l'inertie, et, du reste, distribuée d'une manière quelconque aux divers points (3). Mais on peut en étendre

(1) Neuvième leçon sur l'élasticité, 1853.

(2) Mémoire de M. Poisson du 14 avril 1828 au t. VIII de l'Institut, n° 65, p. 523 et suiv.; et Mémoire du 6 octobre 1828 (présenté avant la publication de celui de Poisson), aux Exercices de mathématiques, 3e année, p. 328-355.

(3) Pour le faire comprendre nous croyons devoir rapporter ici, sous une forme simple, ce qu'il y a de plus essentiel dans leur analyse. Soient z la coordonnée normale, comptée depuis le plan moyen de la plaque, x et y les deux autres coor-

approximativement l'emploi, dans les problèmes d'équilibre, au cas où Z représenterait une pareille force augmentée d'une charge étrangère distribuée aussi suivant une loi quelconque

---

données rectangles, 2ε l'épaisseur très-petite de la plaque, sur les deux faces de laquelle on suppose qu'aucune pression ne s'exerce, en sorte qu'avec les notations du troisième Appendice, p. 547, on doit avoir $p_{xz}=0$, $p_{yz}=0$, $p_{zz}=0$ pour $z=\pm\varepsilon$; enfin soit $\frac{Z}{2\varepsilon}$ l'intensité de la force, parallèle aux z, qui agit sur l'unité de volume à la manière de la pesanteur ou de l'inertie, au point (x, y, z), ou soit Z cette force rapportée à l'unité de surface. Posons les équations d'équilibre intérieur (même Appendice, p. 585) :

$$0=\frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{xy}}{dy}+\frac{dp_{zx}}{dz},\quad 0=\frac{dp_{xy}}{dx}+\frac{dp_{yy}}{dy}+\frac{dp_{yz}}{dz},\quad \frac{Z}{2\varepsilon}=\frac{dp_{zx}}{dx}+\frac{dp_{yz}}{dy}+\frac{dp_{zz}}{dz}.$$

Différentions-les respectivement par rapport à x, à y, à z; puis différentions par rapport à z ce qui en résulte, et ajoutons, à la troisième équation non différentiée, les trois résultats de cette double différentiation, multipliés respectivement par $\frac{\varepsilon^2}{3}$, $\frac{\varepsilon^2}{3}$, $\frac{\varepsilon^2}{6}$; nous avons, vu que $\frac{\varepsilon^2}{3}+\frac{\varepsilon^2}{6}=\frac{\varepsilon^2}{2}$:

$$\frac{1}{2\varepsilon}\left(Z+\frac{\varepsilon^2}{6}\frac{d^2Z}{dz^2}\right)=\frac{\varepsilon^2}{3}\frac{d}{dz}\left(\frac{d^2p_{xx}}{dx^2}+2\frac{d^2p_{xy}}{dxdy}+\frac{d^2p_{yy}}{dy^2}\right)+$$
$$+\frac{d}{dx}\left(p_{zx}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d^2p_{zx}}{dz^2}\right)+\frac{d}{dy}\left(p_{yz}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d^2p_{yz}}{dz^2}\right)+\left(\frac{dp_{zz}}{dz}+\frac{\varepsilon^2}{6}\frac{d^3p_{zz}}{dz^3}\right).$$

Si l'on fait $z=0$, les trois dernières parenthèses du second membre s'annuleront, car si l'on s'arrête aux quatre premiers termes du développement suivant, supposé convergent et appliqué à p_{zx}, p_{yz}, p_{zz}, où les indices zero marquent ce que deviennent, pour $z=0$, les quantités qui en sont affectées

$$p=p_0+z\left(\frac{dp}{dz}\right)_0+\frac{z^2}{2}\left(\frac{d^2p}{dz^2}\right)_0+\frac{z^3}{6}\left(\frac{d^3p}{dz^3}\right)_0,$$

cette annulation des trois binômes entre parenthèses est nécessaire pour que ces trois composantes de pression p_{zx}, p_{yz}, p_{zz} deviennent nulles pour $z=\pm\varepsilon$ comme on le suppose.

L'équation précédente se réduit donc, en effaçant, dans la parenthèse du premier membre, le terme en ε^2 vis-à-vis du terme qui n'en est pas affecté, à

$$Z_0=\frac{2\varepsilon^3}{3}\left[\left(\frac{d^3p_{xx}}{dzdx^2}\right)_0+2\left(\frac{d^3p_{xy}}{dzdxdy}\right)_0+\left(\frac{d^3p_{yy}}{dzdy^2}\right)_0\right].$$

Or si nous mettons dans le second membre, qui est affecté de ε^2, à la place de p_{xx}, p_{xy}, p_{yy} leurs valeurs (35) du § 26, p. 581 du 3e Appendice, en fonction des déplacements u, v, w des points dans les sens x, y, z pour une matière isotrope, nous pouvons y remplacer, au même degré d'approximation, les dérivées des déplacements parallèles u, v par leurs valeurs en fonction des dérivées

sur la face supérieure, car il devra en résulter sensiblement la même flexion, sauf à changer très-légèrement la valeur de la constante affectant le trinôme différentiel.

Si des forces agissent non-seulement dans le sens normal mais encore dans deux sens tangentiels rectangulaires, on arrive de la même manière à une équation qui se sépare en deux autres et dont l'une donne les déplacements tangentiels comme dans le cas de la membrane susceptible de dilatations et de contractions, l'autre les déplacements normaux.

Mais il faut avoir aussi les équations d'équilibre *définies*, à satisfaire aux limites, c'est-à-dire aux bords ou au contour d'une portion quelconque de plaque dont nous supposons les faces horizontales pour fixer les idées. Poisson en pose trois, savoir : 1° une pour la somme des forces verticales, ou, comme on dit, des *efforts tranchants* qui peuvent agir sur l'unité de longueur de ce contour; 2° et 3° deux pour les sommes de moments, autour de parallèles aux deux coordonnées horizontales, des forces tant horizontales que verticales s'exerçant sur la même unité de longueur du bord ou *cylindre contournant*. Les forces verticales sont tenues en équilibre de translation par les réactions transversales, c'est-à-dire par les composantes de pression intérieure, de même direction, agissant à travers une section aussi verticale, rendue légèrement inclinée et courbe par les petits glissements qui les développent. Ces composantes sont nulles sur les

---

$\frac{dw}{dx}$, $\frac{dw}{dy}$ du déplacement normal w, tirées de la supposition qu'on a $p_{zx} = 0$, $p_{yz} = 0$, $p_{zz} = 0$ dans toute l'épaisseur comme on l'a sur les deux faces de la plaque; c'est-à-dire on peut faire $\frac{du}{dz} = -\frac{dw}{dx}$, $\frac{dv}{dz} = -\frac{dw}{dy}$, et $\frac{d}{dz}\frac{dw}{dz} = -\frac{e'}{2e+e'}\frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right) = \frac{e'}{2e+e'}\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}\right)$. Or il en résulte

$$Z_0 = 4e\,\frac{e+e'}{2e+e'}\cdot\frac{2e^3}{3}\left(\frac{d^4w_0}{dx^4}+2\frac{d^4w_0}{dx^2dy^2}+\frac{d^4w_0}{dy^4}\right),$$

c'est-à-dire l'équation du quatrième ordre qui était à établir et qui, étant intégrée, donnera le déplacement normal w_0 du plan moyen, et où Z_0 est la force agissant, à l'endroit (x, y), sur une portion de la plaque répondant à l'unité de surface.

faces supérieure et inférieure, et Poisson a pu les négliger, sur toute l'épaisseur, dans le calcul qui a conduit à l'équation différentielle indéfinie; mais, ici, il faut en tenir compte, et Poisson conserve, dans la série entière par laquelle il les représente, le terme affecté du carré de la coordonnée verticale [1].

Quant aux réactions ou composantes de pression horizontales s'exerçant à travers la même section verticale, comme leurs sommes, pour toute l'épaisseur, sont nulles quand la plaque horizontale n'est sollicitée que par des forces verticales, les développements de ces forces manquent du premier terme; et M. Poisson les réduit au second terme, ce qui revient à les supposer (comme dans la théorie de la flexion des simples tiges ou lames) proportionnels à la petite ordonnée z, distance de chaque

---

[1] L'annulation nécessaire, pour $z = \pm \epsilon$, de ces composantes p_{xz} et p_{yz}, représentées approximativement par

$$p = p_0 + z\left(\frac{dp}{dz}\right)_0 + \frac{z^2}{2}\left(\frac{d^2p}{dz^2}\right)_0$$

donne $\left(\frac{dp}{dz}\right)_0 = 0$, $p_0 = -\frac{\epsilon^2}{2}\left(\frac{d^2p}{dz^2}\right)_0$ et réduit leurs expressions à la forme $p = \left(\frac{d^2p}{dz^2}\right)_0 \cdot \frac{\epsilon^2}{2}\left(1 - \frac{z^2}{\epsilon^2}\right)$ analogue à celle qu'on a trouvée, en ce qui est relatif à une simple tige, pages 244, 392, 394, pour le glissement qui leur est proportionnel, ce qui fournit

$$-\frac{2\epsilon^3}{3}\left(\frac{d^2p_{xz}}{dz^2}\right)_0, \quad \text{et} \quad -\frac{2\epsilon^3}{3}\left(\frac{d^2p_{yz}}{dz^2}\right)_0$$

pour les sommes de ces réactions sur l'unité de longueur de sections perpendiculaires aux x et aux y respectivement. Et comme les deux premières des trois équations d'équilibre intérieur, rapportées tout à l'heure dans une note, donnent

$$\left(\frac{d^2p_{xz}}{dz^2}\right)_0 = -\left(\frac{d^2p_{xx}}{dzdx}\right)_0 - \left(\frac{d^2p_{xy}}{dzdy}\right)_0; \quad \left(\frac{d^2p_{yz}}{dz^2}\right)_0 = -\left(\frac{d^2p_{xy}}{dzdx}\right)_0 - \left(\frac{d^2p_{yy}}{dzdy}\right)_0,$$

on peut, au moyen des relations entre les déplacements u, v, w données à la fin de cette même note, exprimer facilement ces deux sommes de forces en fonction du seul déplacement w_0, et arriver, pour celle qui agit sur l'unité de longueur horizontale d'une section verticale dont la normale fait l'angle α avec l'axe des x, à l'expression de M. Poisson

$$F = -\frac{2\epsilon^3}{3} \cdot \frac{4e(e+e')}{2e+e'}\left[\left(\frac{d^3w_0}{dx^3} + \frac{d^3w_0}{dxdy^2}\right)\cos\alpha + \left(\frac{d^3w_0}{dx^2dy} + \frac{d^3w_0}{dy^3}\right)\sin\alpha\right].$$

point au plan moyen, dont les dimensions restent invariables; et il détermine facilement, en fonction des dérivées des déplacements verticaux w_0 des points de ce plan, l'expression de leurs moments, qu'il égale aux moments des forces extérieures agissant sur le contour, ces moments étant pris comme les autres autour de parallèles aux coordonnées horizontales x et y (1).

Poisson en fait une belle application aux vibrations d'une plaque circulaire sollicitée d'une manière égale à égale distance de son centre, et détermine, lorsqu'elle est libre, ses vibrations et ses lignes nodales circulaires concentriques.

Mais M. Kirchhoff a montré qu'au lieu de ces trois équations de condition aux limites il n'en fallait que deux, dans un mémoire des plus dignes d'attention, dont un extrait a paru d'abord aux Comptes rendus en 1848 (2), et qui a été imprimé *in*

---

(1) On a ainsi (même notations)

$$p_{xx} = z\left(\frac{dp_{xx}}{dz}\right)_0, \quad p_{yy} = z\left(\frac{dp_{yy}}{dz}\right)_0, \quad p_{xy} = z\left(\frac{dp_{xy}}{dz}\right)_0,$$

donnant pour moments, sur l'unité de longueur des sections verticales, ces mêmes expressions multipliées par $zdz \cos\alpha$ ou $zdz \sin\alpha$ et intégrées de $-\varepsilon$ à ε, c'est-à-dire $\frac{2\varepsilon^3}{3}$ multiplié par les mêmes trois dérivées $(\ )_0$ et par $\cos\alpha$ ou $\sin\alpha$. Mettant dans ces dérivées, pour p_{xx}, p_{yy}, p_{xy} leurs valeurs $(2e+e')\frac{du}{dx} + \ldots\ldots$, etc., en fonction des déplacements u, v, w, on a $\frac{2\varepsilon^3}{3}(2e+e')\left(\frac{d^2u}{dxdz}\right)_0 + \ldots\ldots$, etc., où les dérivées des déplacements seront, comme aux deux autres notes, exprimées facilement au moyen de celles de w_0 seul. D'où facilement aussi, les expressions suivantes (se confondant avec celles de M. Poisson quand on fait $e = e'$) des moments, autour de parallèles aux x et aux y, des forces s'exerçant à travers l'unité de longueur de la face dont la normale fait avec les x l'angle α :

$$H' = \frac{4}{3}\frac{e\varepsilon^3}{2e+e'}\left\{\left[e'\frac{d^2w_0}{dx^2} + 2(e+e')\frac{d^2w_0}{dy^2}\right]\sin\alpha + (2e+e')\frac{d^2w_0}{dxdy}\cos\alpha\right\},$$

$$H = \frac{4}{3}\frac{e\varepsilon^3}{2e+e'}\left\{(2e+e')\frac{d^2w_0}{dxdy}\sin\alpha + \left[2(e+e')\frac{d^2w_0}{dx^2} + e'\frac{d^2w_0}{dy^2}\right]\cos\alpha\right\}.$$

(2) 16 octobre. *Note relative à la théorie de l'équilibre et du mouvement d'une plaque élastique*, t. XXVII, p. 394. Il est essentiel, à la page 396, au lieu

extenso en 1850 au journal de Crelle [1]. Ces deux équations sont :

1° Celle qu'on peut tirer des deux dernières de Poisson, par le principe de la composition des moments de rotation, en égalant entre eux les moments des forces extérieures et des forces intérieures *autour d'une tangente* au contour.

2° La première de Poisson, relative aux forces verticales, mais additionnée, comme cela paraît nécessaire à M. Kirchhoff, avec

---

des deux équations $N + (N) = 0$, $G + \frac{dG}{ds} + (F) + \frac{d(G)}{ds} = 0$, d'écrire $G + (G) = 0$, $F + \frac{dN}{ds} + (F) + \frac{d(N)}{ds} = 0$; et, à la 4e ligne en remontant, de mettre F et N, N, N au lieu de G, G, G.

[1] 40e volume, 1re livraison, p. 51. *Ueber das Gleichgewicht und Bewegung einer elastischen scheibe.*

Il commence par prouver, dans ce mémoire, que le principe de Mademoiselle Germain, qui donne une équation différentielle indéfinie exacte, conduit à des conséquences fausses quant aux conditions aux limites. En effet, en faisant $\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} = U$, l'intégration par partie de $\iint dxdy U\delta U$, dont on a parlé à une note ci-dessus, p. cclvj, donne, pour les intégrales simples qu'elle détache, en désignant par $\left[\ \right]^1$ des différences entre les valeurs de leurs limites qui sont relatives aux points où le contour est percé par une parallèle aux x ou par une parallèle aux y

$$\left[\int U \frac{d\delta\zeta}{dx} dy\right]_0^1 + \left[\int U \frac{d\delta\zeta}{dy} dx\right]_0^1 - \left[\int \frac{dU}{dx} \delta\zeta . dy\right]_0^1 - \left[\int \frac{dU}{dy} \delta\zeta . dx\right]_0^1,$$

réductibles, par une transformation connue (Appendice complémentaire, p. 793-794) à cette somme plus simple de deux intégrales relatives à tout le contour dont nous appelons ds l'élément et l la longueur, et où les différentielles sur dn sont ce dont δz et U augmenteraient en cheminant sur une normale n au contour

$$-\int_0^l U \frac{d\delta\zeta}{dn} ds + \int_0^l \frac{dU}{dn} \delta\zeta . ds.$$

Or, dit-il, si le contour est libre, il y aurait ainsi à remplir, pour ses divers points, deux conditions $U = 0$, $\frac{dU}{dn} = 0$. Comme la première suffit pour déterminer complétement la solution de l'équation indéfinie, qui peut être écrite $K\left(\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2}\right) = Z$, la deuxième condition ne pourrait être remplie en général, et le problème de l'équilibre de la plaque serait sans solution possible.

ce qui résulte de la différentiation, par rapport à l'arc s du contour, de celle qu'on déduirait encore des deux dernières de M. Poisson pour l'égalité des moments de rotation des forces intérieures et extérieures autour *d'une normale* au même arc, et qui tendraient à produire, au contour, des espèces de torsions [1].

Il regarde, au reste, comme exacte l'application, faite par Poisson, de ses équations à une plaque circulaire, sollicitée d'une manière égale aux points à égale distance du centre; mais c'est parce qu'alors une de ses trois conditions-limite devient identique. M. Kirchhoff donne une magnifique solution du problème des vibrations de la même plaque dans le cas où cette égalité de sollicitation n'existe pas, et où les lignes nodales sont à la fois des cercles concentriques et des rayons [2]. Ses résultats s'accordent avec des expériences de M. Strehlke.

Dans ce beau mémoire de 1848-1850, M. Kirchhoff déduit l'équation indéfinie du quatrième ordre, et ses deux équations définies, de la supposition, suffisamment approchée, que les lignes matérielles primitivement normales aux faces de la plaque leur restent normales, de même que dans la théorie de la flexion des tiges, et pour le cas ordinaire où les glissements sont négligeables, on déduit les formules de la supposition que les sections restent planes et normales aux arêtes. Mais, dans une note d'un mémoire ultérieur, non moins remarquable, relatif aux tiges infiniment minces, et dont nous donnons un extrait à la fin de notre Appendice complémentaire (p. 830 à 848), il annonce qu'une analyse semblable à celle dont il fait usage pour les tiges, et qui est exempte de toute hypothèse de ce genre, peut être employée pour une plaque aussi infiniment mince. Cette analyse a été donnée par un de ses élèves, M. Gehring, dans

---

(1) Le même reproche n'atteint pas Cauchy, qui n'a considéré que le cas où les bords ou contours de la plaque seraient sollicités normalement au cylindre contournant, en sorte que la force appelée F par Poisson et qui agit dans le sens des arêtes de ce cylindre, soit nulle. Il fait lui-même (Exercices, 3e année, 1828, p. 346) une objection contre une des équations de Poisson quand la plaque a une autre forme que le cercle.

(2) Comptes rendus, 17 décembre 1849, t. XXIX, p. 753. Ou même Mémoire, au t. 40 de Crelle.

une thèse [1] de doctorat, où il l'étend à une plaque dont la matière n'est pas isotrope : elle est fondée sur un artifice consistant à diviser la plaque, comme on a fait pour la tige, en éléments rectangulaires infiniment petits, dans chacun desquels on imagine une origine et trois axes de coordonnées pour leurs seuls points, et à égaler la dérivée des coordonnées dans l'espace, d'un point quelconque, par rapport à l'une de ces coordonnées infiniment petites parallèles à la plaque, à la dérivée par rapport à la coordonnée finie, de même direction, de l'origine particulière des petites coordonnées en question. Un des points de doctrine que soutient le jeune savant contre les argumentateurs qu'on lui oppose, est que la théorie des corps élastiques ne peut être traitée convenablement que par le calcul des variations ; il le fonde surtout sur ce que son maître n'a réduit et rectifié les équations aux limites de Poisson, qu'en posant l'équation d'équilibre au moyen du potentiel des forces tant intérieures qu'extérieures, et en faisant par conséquent usage, suivant la méthode de Lagrange, de cette sorte de calcul ; méthode qui seule conduirait pour chaque question au nombre justement nécessaire et suffisant de conditions à remplir [2].

---

(1) *De Æquationibus differentialibus quibus æquilibrium et motus laminæ cristallinæ definiuntur, dissertatio inauguralis.* M. Clebsch a reproduit cette analyse dans son beau livre *Théorie der élasticität fester Körper*. Il y considère, ailleurs, une plaque dont l'épaisseur n'est pas infiniment petite.

(2) En attendant la publication des Notes à l'article XII du présent ouvrage, on nous saura gré d'indiquer ici succinctement en quoi consiste l'analyse de M. Kirchhoff, de 1848, fondée sur la conservation, toujours très-approchée, de la normalité des petites lignes primitivement normales aux faces de la plaque.

Le potentiel des forces intérieures, que nous appelons Φ^1 à l'Appendice complémentaire et dont nous donnons l'expression générale (199) à la p. 788, se réduit, quand la matière est isotrope (§ 26 p. 584 de l'Appendice III) et en appelant ∂', ∂'', ∂''' les trois dilatations *principales* (App. compl. § 82, p. 784) ou dans les directions suivant lesquelles il n'y a pas de glissements, à

$$\Phi^1 = e(\partial'^2 + \partial''^2 + \partial'''^2) + \frac{e'}{2}(\partial' + \partial'' + \partial''')^2.$$

Or, en supposant que toute normale matérielle reste normale à la surface qui divise en deux parties égales l'épaisseur de la plaque, et que cette surface *moyenne* ne change pas de grandeur en se courbant, les dilatations, à une distance z de cette même surface, dans les sens des deux courbures principales

Ce sujet est délicat. Nous ne doutons pas que les équations aux limites de M. Kirchhoff ne soient les véritables; mais en

---

$\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\rho'}$ et dans le sens normal, ont les valeurs suivantes, dont la troisième ∂_z se déduit des deux premières en égalant à zéro la valeur (35) $p_{zz}=e'\partial_x+$ $+e'\partial_y+(2e+e')\partial_z$ de la page 584 après avoir mis celles-ci pour ∂_x, ∂_y :

$$\partial'=\frac{z}{\rho},\ \partial''=\frac{z}{\rho'},\ \partial'''=-\frac{e'z}{2e+e'}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}\right).$$

Substituant à ∂', ∂'', ∂''' dans Φ^1, puis multipliant par $dxdydz$ et intégrant pour toute la plaque, on a en effectuant l'intégration de $-\varepsilon$ à ε par rapport à z

$$\frac{2\varepsilon\varepsilon^3}{3}\iint dxdy\left[\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho'^2}+\frac{e'}{2e+e'}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}\right)^2\right]$$

On voit de suite, en différentiant par δ le trinôme entre crochets, quelle est la vraie forme du moment virtuel des réactions élastiques par unité superficielle de la plaque, et qu'il n'est pas proportionnel à $\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho}\right)\delta\left(\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\rho'}\right)$ résultant de l'hypothèse ou de l'intuition de Sophie Germain, qui a pourtant si bien fait découvrir la véritable équation différentielle indéfinie du 4e ordre.

Or on sait que les deux valeurs principales $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\rho'}$ de la courbure $\frac{1}{\rho}$ sont données par les racines de l'équation du second degré suivantes, où w représente la petite ordonnée de la surface moyenne devenue courbe

$$\left(\frac{1}{\rho}-\frac{d^2w}{dx^2}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{d^2w}{dy^2}\right)=\left(\frac{d^2w}{dxdy}\right).$$

Substituant, et appelant Π le potentiel des forces extérieures, on a pour l'équation d'équilibre ou des travaux virtuels

$$0=\delta\Pi+\frac{2\varepsilon\varepsilon^3}{3}\iint dxdy.\,\delta\left[\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2+2\left(\frac{d^2w}{dxdy}\right)^2+\left(\frac{d^2w}{dy^2}\right)^2+\frac{e'}{2e+e'}\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}\right)^2\right]$$

Effectuant la différentiation par δ du crochet, puis les intégrations par parties; puis, en appelant α l'angle que fait avec les x la normale n à l'élément ds du contour, mettons, dans les intégrales simples détachées, $\pm ds\sin\alpha$, $\pm ds\cos\alpha$ pour dx et dy de manière à transformer les différences de ces intégrales en des intégrales $\int_0^l ds$ pour tout le contour dont nous appelons l la longueur développée; enfin remplaçons

$$\frac{d\delta z}{dx}\text{ par }\frac{d\delta z}{ds}\sin\alpha+\frac{d\delta z}{dn}\cos\alpha,\text{ et }\frac{d\delta z}{dy}\text{ par }-\frac{d\delta z}{ds}\cos\alpha+\frac{d\delta z}{dn}\sin\alpha;$$

et, en appelant, avec M. Kirchhoff, p la force agissant verticalement sur la plaque par unité de la superficie, F la force agissant aussi verticalement par unité

quoi celles de Poisson sont-elles fausses? C'est ce que nous n'avons pas encore eu le loisir d'étudier à fond. Est-ce, comme

---

de longueur du contour, G et N les moments de rotation, autour de la tangente et autour de la normale n, de toutes les forces qui agissent sur la même unité de longueur, remplaçons $\delta\Pi$ par sa valeur, qu'il est facile de reconnaître égale à

$$\iint dxdy\, p\,\delta z + \int_0^l ds\, F\,\delta z + \int_0^l ds\, G\,\frac{d\delta z}{dn} + \int_0^l ds\, N\,\frac{d\delta z}{ds};$$

nous trouverons, en faisant en outre, pour abréger, avec M. Kirchhoff

$$-\frac{2e\varepsilon^3}{3}\frac{4(e+e')}{2e+e'}\left[\left(\frac{d^3w}{dx^3}+\frac{d^3w}{dxdy^2}\right)\cos\alpha+\left(\frac{d^3w}{dy^3}+\frac{d^3w}{dx^2dy}\right)\sin\alpha\right]=(F),$$

$$-\frac{2e\varepsilon^3}{3}\left[\left(\frac{d^2w}{dx^2}-\frac{d^2w}{dy^2}\right)\sin 2\alpha-2\,\frac{d^2w}{dxdy}\cos 2\alpha\right]=(N),$$

$$\frac{2e\varepsilon^3}{3}\left[4\frac{e+e'}{2e+e'}\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}\right)-2\left(\frac{d^2w}{dx^2}\sin^2\alpha+\frac{d^2w}{dy^2}\cos^2\alpha\right)+2\frac{d^2w}{dxdy}\sin 2\alpha\right]=(G),$$

l'équation d'équilibre suivante

$$0=\iint dxdy\left[4\frac{e+e'}{2e+e'}\frac{2e\varepsilon^3}{3}\left(\frac{d^4w}{dx^4}+2\frac{d^4w}{dx^2dy^2}+\frac{d^4w}{dy^4}\right)+p\right]\delta z+$$
$$+\int_0^l ds[F+(F)]\delta z-\int_0^l ds\,[N+(N)]\,\frac{d\delta z}{ds}+\int_0^l ds\,[G+(G)]\,\frac{d\delta z}{dn}.$$

En égalant à zéro le premier polynôme entre crochets on a l'équation différentielle *indéfinie* connue.

En égalant séparément à zéro les trois binômes contenus dans les autres crochets, le premier donnerait la première équation *définie* de Poisson, qui revient à $F+(F)=0$ (note ci dessus p. cclxiv), et les derniers donneraient les deux autres par une transformation facile, en déduisant les moments autour de parallèles aux x et aux y des moments autour de la normale et de la tangente.

Mais on n'est point autorisé à opérer ainsi, car le second $\int_0^l$ peut être intégré par parties et peut fournir un terme en $\int_0^l \delta z$ qui se réunira au premier. La partie détachée ou mise hors du $\int$ est nulle *puisque, sur le contour, les limites $s=0$ et $s=l$ se confondent;* on a ainsi, au lieu des trois dernières intégrales $\int_0^l$:

$$\int_0^l ds\left[F+(F)+\frac{dN}{ds}+\frac{d(N)}{ds}\right]\delta z+\int_0^l ds\,[G+(G)]\,\frac{d\delta z}{dn}.$$

Égalant à zéro les deux quantités entre crochets, on a les deux équations-limite de M. Kirchhoff, à substituer aux trois équations de M. Poisson.

paraît le penser M. Kirchhoff, parce que les séries entières dont il a fait usage sont divergentes? Nous avons de la peine à le croire; car, de même qu'il arrive pour les simples tiges ou lames dont une des deux courbures reste nulle, il doit arriver pour une plaque que les pressions normales à travers le bord varient à peu près linéairement d'une face à l'autre, et les pressions tangentielles, qui sont nulles à la rencontre de ces deux faces, doivent varier à peu près paraboliquement de chacune d'elles à la surface moyenne; et, d'ailleurs, les deux équations de M. Kirchhoff contiennent précisément les expressions (F), (G), (N), dont M. Poisson a fondé le calcul sur l'emploi de ces séries, emploi qui revient jusqu'à un certain point à la supposition qui a été faite de la normalité conservée par les petites lignes matérielles primitivement normales, et qui doit se retrouver sous une autre forme dans l'analyse de M. Gehring relative à une plaque d'une épaisseur supposée infiniment petite. La matière demande donc un examen approfondi, et c'est pour y convier les géomètres que nous en avons développé ici les éléments avec quelque détail.

LXI. **Expériences et observations sur la résistance et l'élasticité des corps solides.** — Outre les calculs théoriques, la résistance et l'élasticité des solides ont été, dès le premier moment où on les a fait entrer dans le domaine scientifique, l'objet de nombreuses recherches expérimentales.

Les premières que l'on mentionne (sans indiquer où l'on en trouve le détail) sont celles du physicien suédois Wurtius, cité au n° III ci-dessus.

Robert Hooke, peu d'années après, appuya de quelques expériences, principalement sur les ressorts en hélice, son prin-

---

M. Kirchhoff justifie cette réduction des conditions limites à deux de cette forme par un raisonnement direct, mentionné à l'article cité du *Compte rendu* de 1848, mais non développé.

On reconnaît par là l'utilité de l'emploi, dans les questions de l'élasticité, de la méthode de Lagrange, perfectionnée par l'usage du potentiel, et par cette substitution des dérivées sur s et sur n aux dérivées sur x et y pour le contour, qui paraît due à Poisson comme fournie implicitement par son *Mémoire sur le calcul des variations* du 10 novembre 1831 (tome XII de l'Institut); bien qu'il ne soit pas encore parfaitement prouvé qu'on ne peut pas se passer de cette méthode.

cipe de proportionnalité des efforts exercés aux allongements et aux flexions qui en résultent [1].

Vers le même temps, Mariotte ayant étudié les lois du choc des corps et observé la *flexibilité* dont il les regarde comme tous doués *avec* ou *sans ressort* [2], fut conduit, comme nous avons dit (n° IV), à baser la théorie de leur rupture sur la considération des modifications qui la précèdent. Il fit sur de petites tiges de bois, de métal, de verre, des expériences qui infirment une des conclusions de Galilée, en vérifiant les autres [3]. Il a reconnu le premier, sur une lame de verre, qu'un solide horizontal était capable de supporter, au milieu, une charge deux fois plus grande lorsque ses deux extrémités sont encastrées que lorsqu'elles sont simplement posées, et qu'il pouvait rompre alors aussi bien vers les encastrements qu'au point où la charge est suspendue. Il a aussi montré qu'un prisme, ou bien un ressort en hélice, éprouvait toujours longitudinalement, sous le même poids, la même extension proportionnelle quelle que fut sa longueur; et il a fait aussi, sur la résistance des tuyaux aux pressions intérieures, quelques expériences, mais dans des conditions qui les rendent peu concluantes.

Au commencement du siècle suivant, Parent fit sur la rupture de barreaux de bois de chêne et de sapin, tant soutenus qu'encastrés des deux côtés, diverses expériences qui lui servirent à dresser les premières tables destinées à la pratique [4]. Musschenbroek, en 1729, en publia de plus précises et de bien plus variées [5],

---

(1) Philosophical Tracts and Collections, 1676 et 1678.

(2) De la percussion ou du choc des corps; dont la *troisième édition* est de 1679 (avis en tête de ses œuvres complètes); p. 1.

(3) Traité du mouvement des eaux, deuxième Discours.

(4) Académie des Sciences, 1707, et 1708, p. 516. Il paraît que de la Hire, Couplet, Pitot, ont fait aussi quelques expériences vers le même temps.

(5) *Introductio ad cohærentiam corporum firmorum*, faisant partie de ses *Dissertationes physicæ experimentalis et geometricæ*, Lugduni Batavorum (Leyde) 1729, in-4°. Il les a reproduites en partie, avec quelques autres, à son ouvrage *Introductio ad philosophiam naturalem*, traduit en hollandais; puis du hollandais en français en 1739, sous le titre *Essais de physique* par Pierre Massuet; traduction où elles occupent le chap. XIX intitulé *De la cohésion ou de l'adhérence* des corps. Elles occupent le chap. XXI de la traduction faite en 1769 par Sigaud de la Fond sous le titre *Traité de physique*. Les premières expériences sur les plaques de verre sont au *Compendium physicæ experimentalis*, 1762 cap. XVIII, § 369.

qui comprennent la rupture par extension, par flexion et par compression, des bois d'un grand nombre d'essences, pris dans diverses parties des arbres; du fer de diverses provenances, de la fonte et de divers autres métaux, ainsi que de leurs alliages; et du verre, même en plaques rondes et carrées. Il reconnut un fait alors nouveau, à savoir que les pièces d'une certaine longueur, pressées *debout* ou longitudinalement, offrent une résistance en raison inverse du carré de cette longueur, ce qu'expliquèrent et confirmèrent en 1747 les recherches théoriques d'Euler (n° XIII).

C'est aussi dans la première moitié du XVIIIe siècle que furent faites, avant d'entourer de cercles de fer le dôme de Saint-Pierre de Rome, les expériences sur la résistance de ce métal à la traction, du marquis Poleni (plus connu comme hydraulicien célèbre) appelé vers 1742 pour donner son avis sur les crevasses qui s'étaient manifestées dans cet édifice et sur les moyens de prévenir la chute de sa coupole (1).

Belidor publia vers le même temps (2), sur des barreaux de bois de 27 et de 54 millimètres d'écarrissage, sollicités transversalement, ses essais destinés à dresser des tables de résistance qui le satisfissent mieux que celles de Parent.

Mais bientôt furent faites par Buffon les premières expériences en grand sur la rupture des bois par effort transversal (3). Il put observer plus complétement que Musschenbroek les différences de force résultant de l'âge des arbres, de la densité de leur bois, de leur croissance lente ou tardive, du choix des échantillons depuis le cœur jusqu'à l'aubier, depuis le tronc jusqu'à la cime. Et comme le degré de dessication lui parut avoir aussi une grande influence sur la résistance, et être du reste difficile à constater, il se décida, pour rendre ses principales expériences comparables, à ne les exécuter que sur des arbres qu'on venait d'abattre et d'équarrir. Il se contenta d'essayer des pièces simplement posées, en remarquant très-bien

(1) Memorie istoriche della gran cupola del tempio Vaticano.

(2) Science des Ingénieurs, 1729, liv. IV. ch. III pour les bois, et IV pour les fers.

(3) Publiées d'abord aux volumes de 1740 et 1741 des Mémoires de l'Académie, puis insérées au t. VIII de ses œuvres, sous ce titre *Partie expérimentale; onzième Mémoire; Experiences sur la force des bois.*

qu'à cause de l'imperfection des encastrements qu'offrent les maçonneries ordinaires, il ne fallait guère compter, dans les bâtiments, sur l'augmentation de résistance qu'ils ont donnée dans les expériences de Mariotte et de Musschenbroek. Après avoir fait, comme ses prédécesseurs, quelques expériences sur de simples barreaux, qui le convainquirent de la grande variabilité de leur force et du peu de confiance que méritent les conclusions qu'on tire de ce qui leur est relatif, il se décida à opérer sur des pièces comparables à celles qu'on emploie dans les constructions, ayant des équarrissages depuis $0^m,11$ sur $0^m,11$ jusqu'à $0^m,22$ sur $0^m,22$, et des longueurs de $2^m,30$ à $9,^m10$ (qu'il faut, dans les calculs, diminuer d'un douzième pour avoir leur *portée* entre les tréteaux où on les posait). Il observa, le premier, les flèches de flexion, mais seulement au moment où les pièces éclataient. Le résultat principal de ses 81 expériences est la presque-proportionnalité des charges de rupture immédiate (*Voyez* n° 151 ci-après, et § 1 de sa Note, p. 173) aux largeurs, aux carrés des épaisseurs et aux inverses des longueurs, ou la presque-constance du nombre appelé R (du § 12 de la note du n° 113, p. 107); mais, comme le remarque Navier, en ayant soin toutefois de faire, aux formules dont on tire ce nombre, les corrections indiquées au n° 128 pour prendre en considération le poids propre de la pièce et l'inclinaison de ses extrémités, résultant de sa flèche finale, bien qu'on sache que la formule n'a tout à fait cette forme que dans les limites de la proportionnalité des efforts aux effets produits (1).

Buffon observa aussi l'accroissement progressif, en quelques mois, et quelquefois jusqu'à rupture, des flexions des pièces déjà fortement chargées.

Il fit aussi quelques expériences sur les fers (2), et observa un rapport considérable, de 10 ou 12 à 1, entre la tenacité du fil

---

(1) Il serait possible de tenir compte de ces éléments d'une manière plus approchée, au moyen des formules (1), p. 176, au § 2 de la note du n° 151, surtout avec $m_1 = 1$, ou en remplaçant la seconde par $p_1 = P_1 \frac{v}{v}$ comme au § 3.

(2) Œuvres, t. VII, *Introduction à l'histoire des minéraux*, partie expérimentale, 4e Mémoire. Les résultats sont rapportés au t. II de Gauthey, p. 153.

de fer et celle de *boucles* de gros échantillon, pour même superficie de section.

Duhamel du Monceau fit aussi, sur la résistance transversale des bois (1), diverses expériences où fut mesurée pour la première fois la flèche de flexion avant la rupture, de manière à pouvoir évaluer leur *élasticité;* et d'autres parmi lesquelles on doit remarquer (2) celles des traits de scie transversaux, pratiqués du côté devenant concave, et qui prouvent, en ne diminuant point la résistance, que les fibres comprimées sont plus nombreuses au moment de la rupture que les fibres étendues (*Voir* aussi n° XXIII, et § 45 de la note du n° 156, p. 391).

Vinrent ensuite trois séries d'expériences de M. Aubry, inspecteur général des ponts et chaussées (3), sur les flexions de trois pièces de chêne sous diverses charges.

C'est vers ce même temps qu'à l'occasion des doutes élevés sur la suffisante solidité des piliers destinés à soutenir le dôme de l'église de Sainte-Geneviève, furent entreprises par Gauthey, au moyen d'une machine à levier, les premières expériences sur la force que les pierres peuvent soutenir sans être écrasées (4). Soufflot, architecte de cet édifice, en fit un grand nombre d'autres en commun avec Perronet, en opérant de même l'écrasement de petits échantillons parallélipipèdes. Mais, une double et grave défectuosité ayant été reconnue dans la machine à charnière employée, Rondelet (5) fit construire une machine

---

(1) Mémoire de l'Académie, pour 1767 (ou 1768), et, ensuite : Chapitre III du Traité du transport de la conservation et de la force des bois, 1780.

(2) Même Traité, livre V, p. 416.

(3) Mémoire sur différentes questions de la science des constructions publiques et économiques. Lyon, 1790, p. 55 et 66. M. Aubry a fait aussi une expérience sur une pièce composée de plusieurs parties assujéties entre elles par des armatures en fer.

(4) Publiées en novembre 1774 dans le Journal de physique de l'abbé Rozier.

(5) Art de bâtir, tome I de la 4e édition, p. 308; reproduite à la p. 240 de la 6e édition.

C'est en comparant le résultat d'une expérience sur la pierre des deux colonnes de l'église de Toussaint d'Angers, avec le poids des voûtes qu'elles supportaient, que Rondelet a donné pour règle de faire porter aux soutiens le *dixième* de la charge capable de les écraser pour même section en les réduisant en cubes de 5 centimètres de côté. Cet édifice hardi, qui appartenait autrefois aux Génovéfains, n'est plus qu'une ruine magnifique, servant de musée d'antiquités en plein air.

où le levier était à couteaux et à appui mobile, et à l'aide de laquelle il écrasa un très-grand nombre d'échantillons de pierres; en sorte qu'il donna, de leur résistance, des mesures qui sont encore adoptées, et dont plusieurs ne s'élevèrent qu'aux deux tiers ou à la moitié de celles que la première sorte de machine avait fournies à ses prédécesseurs (1).

Rondelet a fait d'autres expériences sur la résistance des mortiers et du plâtre (2), et aussi, sur la diminution notable de résistance qui lui paraît résulter de la superposition de plusieurs cubes.

Depuis, on a eu sur les pierres et les briques une expérience de White (3), et un grand nombre de M. Georges Rennie (4). Mais M. Vicat pense que les résultats de ces dernières, comme ceux des expériences de Gauthey et de Soufflot, auraient besoin d'être réduites de plus d'un tiers à cause des dispositions de la machine employée (5).

M. Vicat lui-même en a fait un certain nombre, sur les mortiers d'abord (6), puis sur diverses pierres, celles-ci dans le but surtout de mieux déterminer qu'on n'avait fait, les lois de ce qu'il appelle leur *force portante*. Il a prouvé, en prévenant les porte-à-faux ou l'inégale répartition des charges, au moyen de rondelles de carton interposées, que les échantillons les plus minces étaient ceux qui résistaient le mieux, etc:, etc. (7).

D'autres expériences du même genre ont été faites dans ces

On a conservé quelques tronçons de ses deux colonnes, de 14 pouces (environ 0m,30) de diamètre, retirés du milieu des décombres par M. Godard-Faultrier, conservateur du musée d'Angers.

Les piliers de Sainte-Geneviève sont plus hardis. Ils supportent jusqu'à un huitième ou un neuvième.

(1) Rondelet, Mémoire historique sur le Panthéon français.

(2) Art de bâtir, t. I, 1re édit., p. 309, ou 6e édit., p. 218 à 223.

(3) Philosophical Magazine, april 1832.

(4) Philosophical Transactions, 1818. Traduit et inséré la même année en septembre aux Annales de chimie et de physique.

(5) Mêmes Annales, t. IX, 1818.

(6) Recherches expérimentales sur le chaux de construction, les bétons et les mortiers, 1818. Et Résumé des connaissances positives sur les mortiers, etc., 1828.

(7) Recherches expérimentales sur les phénomènes qui précèdent et accompagnent la rupture d'une certaine classe de solides (Annales des Ponts et Chaussées, 1833, 2e semestre).

derniers temps en Angleterre; elles sont disséminées dans divers recueils.

Pour terminer ici ce que nous avons à dire sur les charges que les pierres sont capables de porter, nous citerons les expériences récentes, très-variées et très-bien faites, de M. l'ingénieur en chef Paul Michelot. Leur but et la haute utilité des recherches statistiques dont elles font partie, ont été caractérisés en 1855 dans un lumineux rapport de M. Belgrand (1); et un premier résumé de plus de trois mille expériences sur les pierres de taille non-seulement du bassin dit de Paris, mais de toutes les carrières dont les produits sont employés aux constructions dans cette capitale, a été récemment publié (2). La machine, exécutée sur les dessins de M. Michelot, se compose principalement d'un grand levier gradué à couteaux, à une extrémité duquel on suspend un poids plus petit que celui que l'échantillon pourra supporter, et l'écrasement est déterminé par un second poids soutenu par un plateau mobile à roulettes, qu'on éloigne graduellement du point d'appui. Toutes les précautions sont prises pour éviter les porte-à-faux et pour obtenir des résultats justes et comparables. Ces expériences se continuent de manière à pouvoir résoudre plusieurs des questions soulevées par Rondelet, sur l'influence de la hauteur, de la superposition de plusieurs assises, etc.

D'autres expériences de Rondelet (même ouvrage), de Rennie (mémoire cité), de Reynolds (3), de MM. Minard et Desormes (4) antérieures à 1833, ont été faites sur l'écrasement de petits cubes de bois, de fer, de fonte et d'autres métaux. On a eu aussi, sur la résistance de pièces de bois, de fer et de fonte d'une certaine longueur à la rupture par compression ou plutôt par la flexion que détermine un effort longitudinal, les expériences de MM. Aubry (ouvrage cité), Girard (faites au Havre avec une machine que Lamblardie avait destinée à cet usage) (5),

(1) Annales des ponts et chaussées, 1855, 2e semestre, p. 189.
(2) *Idem*, 1863, 1er semestre, p. 185.
(3) Tredgold. A practical Essay on the Strength of cast Iron, p. 138.
(4) Édition de 1833 des Leçons de Navier.
(5) Traité de la résistance des solides, p. 138 et Tables.

Lamandé (faites à l'occasion de l'établissement des cintres du pont d'Iéna) (1), Rondelet (Art de bâtir), Reynolds (2). Celles de Girard surtout sont nombreuses; mais il est difficile d'en tirer aucune règle sûre, car on n'a pas assez de détails sur les conditions dans lesquelles elles ont été exécutées pour savoir si la résultante des efforts exercés aux extrémités passait au milieu des bases ou plus ou moins près des bords, et si ces bases étaient, ou non, assez bien posées et appliquées pour que leur assiette fît l'effet d'un encastrement, circonstances qui ont sur les résultats une influence considérable. Aussi, des expériences plus récentes, dont nous parlerons, paraissent devoir remplacer avec avantage les expériences anciennes sur la compression longitudinale des pièces de bois et de fer.

On a aussi une expérience de Guyton de Morveau sur la ténacité d'un fil de fer de $0^m,0025$ de diamètre (3).

Diverses expériences furent faites aussi à la fin du siècle dernier et au commencement de celui-ci sur la résistance à la rupture *par extension* des pierres, de la brique, du plâtre, des mortiers, du bois et du fer, par Rondelet (*idem*), Vicat (4); d'autres sur la flexion, que nous citerons plus loin (5).

On doit aussi à M. Pictet, de Genève, physicien très-connu, quelques expériences sur l'allongement des barres de fer dans les limites de sa proportionnalité aux charges qui le produisent (6).

Mais les premières expériences sur la flexion, dirigées dans un esprit réellement scientifique et de manière à pouvoir en déterminer les lois, sont celles qui ont été faites sur les bois dans l'île de Corcyre en 1811 par M. Charles Dupin, à la suite d'une mission comme ingénieur de la marine française (7), et, pour

(1) Gauthey, t. II, p. 48.

(2) Treatise on the Power of Machines, by John Banks Kendall, 1803, p. 89.

(3) Mémoire lu les 29 mai et 19 juin 1809, aux Mém. de l'Institut.

(4) Recherches sur les chaux, etc, 1818, ou Résumé des connaissances, etc. 1828.

(5) Young lui-même en a fait quelques-unes sur le cuivre jaune afin de déterminer son module d'élasticité. (Natural Philosophy, vol. II, p. 86.)

(6) Bibliothèque universelle de Genève, t. I, p. 171 à 200.

(7) Expériences sur la flexibilité, la force et l'élasticité des bois, faites dans l'arsenal de la marine à Corcyre en 1811. Premier mémoire, présenté le 12 avril 1813. (Journal de l'école Polytechnique, 1817).

les fers, à Cubzac en 1813 par M. Duleau [1], comme ingénieur chargé en 1812 de l'étude du projet d'un pont sur la Dordogne, qu'on se proposait d'exécuter en voussoirs métalliques analogues à ceux du pont d'Austerlitz de Paris, mais de fer forgé et composés de huit barres et de croisillons.

Dans son premier Mémoire, M. Dupin expose qu'ayant mesuré à deux dixièmes de millimètre près les augmentations successives des flèches de courbure prises par des pièces horizontales sous des charges croissantes agissant au milieu, il les a trouvées proportionnelles aux charges tant qu'elles sont restées dans certaines limites. Il a trouvé que la même charge *répartie* faisait prendre moyennement une flèche des $2/3 = 0,66$ environ de ce qu'elle produirait étant concentrée au milieu, ce qui se rapproche suffisamment du rapport théorique $5/8 = 0,625$ [2]; que, pour mêmes largeur et longueur, les flèches étaient en raison inverse des cubes des épaisseurs, et que, pour mêmes dimensions transversales, elles étaient comme les cubes des longueurs, ou plutôt des *portées* ou des distances des appuis. Toutes les conclusions de la théorie de la flexion sont donc confirmées, pour les bois, par ces expériences de M. Dupin, qui a vérifié aussi les fondements de cette théorie en constatant que la face devenant concave s'accourcissait autant que la face devenant convexe s'allongeait; que les fibres qu'il appelle *invariables* restaient au milieu de l'épaisseur dans ses expériences sur de petites flexions éloignées de celle de rupture, enfin que les sections transversales des pièces fléchies circulairement restaient normales aux faces et aux fibres. M. Dupin remarque aussi que les cohésions n'ont aucune relation nécessaire avec les élasticités.

Duleau soumit à la flexion, sous diverses charges, des pièces

---

(1) Recherches théoriques et expérimentales sur la résistance du fer forgé, présentées au Conseil général des ponts et chaussées en 1813, et imprimées en 1820, in-4°.

(2) M. Dupin a mentionné dans son Cours de mécanique des Arts et Métiers, 14e leçon, d'autres expériences, faites par lui en 1813, à Toulon, et en 1816, à Dunkerque. Les résultats, dont il ne rapporte pas le détail, confirment ceux de 1811, et donnent même 19/30, bien plus rapproché du rapport théorique 5/8.

droites à section soit rectangulaire, soit circulaire, encastrées à un bout et sollicitées transversalement au bout opposé; d'autres, qui étaient posées sur deux appuis et chargées soit au milieu soit uniformément sur toute la longueur, soit encastrées aux deux bouts, ou bien à un bout et appuyées à l'autre, enfin chargées *debout* ou parallèlement à leur longueur, avec extrémités tantôt libres, tantôt encastrées ou astreintes à rester dans leur direction primitive; puis des cylindres creux, des tuyaux carrés ou ronds, puis une pièce composée de deux autres séparées et rendues solidaires, et une pièce cintrée en arc invariablement retenu aux extrémités. Il mesura, aussi, comparativement, les flexions d'une pièce carrée posée successivement à plat et sur une arête, et, aussi, celles d'une pièce ayant une section en forme de triangle équilatéral, en tournant successivement en haut la base et le sommet de ce triangle. Il soumit ensuite à la torsion diverses barres rondes, carrées et rectangulaires.

Il reconnaît avoir été aidé des conseils de M. Bernard, plus ancien que lui d'un ou deux ans, et alors ingénieur à Bordeaux.

Duleau résume ses résultats en vingt-cinq *lois*. Les neuf premières sont relatives à la flexion de pièces pleines, et la 17e à la flexion d'un tuyau sous un effort transversal : elles sont exactement en rapport avec ce qu'indique la théorie. Les lois 10e à 15e sont relatives aux pièces sollicitées debout, dont les longueurs ont excédé presque constamment cent fois l'épaisseur ou le plus petit côté de la base; elles montrent que la charge qui détermine la flexion est bien, conformément à la formule d'Euler (n° XIII), modifiée par Lagrange (n° XIV) quand la flexion a lieu avec une ou deux inflexions, proportionnelle au moment d'inertie de la base et à l'inverse du carré des longueurs, mais qu'elle est moyennement plus forte d'un septième ou d'un huitième que ce qu'on aurait en substituant, dans cette formule, le coefficient d'élasticité déterminé par les expériences de flexion des mêmes pièces par un effort transversal; ce que Duleau attribue à un frottement considérable de son appareil, car il manquait de ressources pour en faire construire de mieux constitués. La pièce cintrée et la pièce en deux parties sépa-

rées (lois 16, et 18 à 21) ont donné aussi des flexions qu'il serait facile de faire rentrer dans la théorie. Enfin la torsion comparative des pierres rondes, carrées et rectangulaires (lois 22 à 25) ont donné des résultats qui ont étonné Navier (comme nous avons dit n° XXXVI, p. clxxxj), mais qui rentrent, avec toute l'approximation désirable, dans les formules que nous avons données depuis lui pour ce genre de déformation des prismes ayant des sections de diverses formes (1).

On voit que Duleau s'est proposé surtout de déterminer les lois de l'élasticité, et n'a poussé jusqu'à rupture ou forte flexion que les pièces debout, ce qui était la chose importante pour le genre de construction auquel ses fers étaient destinés.

Vers le même temps furent faites au Creusot, par M. Ramus, quelques expériences destinées à comparer entre elles diverses espèces de fonte (2). Elles avaient été précédées de quelques autres faites en petit à Saint-Gervais en Dauphiné (3).

Des expériences remarquables de traction ou d'extension furent faites peu de temps après (1815) à Verbery, par M. Minard, depuis inspecteur général des ponts et chaussées, et par M. Desormes, connu comme physicien et manufacturier distingué (4). Les unes eurent pour objet la cohésion longitudinale ou transversale du chêne et du tremble, les autres l'allongement progressif, sous des charges croissantes, d'un barreau de chêne, qui est revenu à sa longueur primitive tant que cet allongement n'a pas dépassé une proportion de 1/629; d'autres, enfin, en grand nombre, sur la rupture par extension de barres et de fils de fer ou de cuivre, de diverses qualités et contextures, et sur l'allongement progressif d'autres barres sous des charges qu'on augmentait. Cet allongement, passé une certaine charge, et surtout lorsqu'on approche de celle qui produit la rupture,

---

(1) *Mémoire sur la torsion des prismes*. Savants étrangers, t. XIV, art. 78.

(2) Publiées aux Annales de chimie, t. VII, sous le nom de *Gazeran* (alors directeur de l'usine du Creusot). On peut voir aussi *Sidérotechnie* d'Hassenfratz, t. I, p. 47.

(3) Rapportées dans les *Recherches sur l'Artillerie* de Tessier de Norbeck.

(4) Elles ont été communiquées à Navier et insérées par extrait à l'édition 1833 de ses *Leçons*. D'autres, encore inédites, seront insérées à une autre partie de celle-ci.

devient relativement fort considérable, comme le prouvent aussi d'autres expériences que nous citerons plus loin. Des barres de fonte furent également rompues par extension.

Mais la publication, en 1817, de l'ouvrage de M. le professeur Peter Barlow, intitulé : *Essai sur l'élasticité et la force des bois, fondé sur les expériences exécutées à l'Académie royale militaire* avec des pièces prises dans l'arsenal maritime de Woolwich (1), fit connaître un grand nombre d'autres expériences non-seulement sur les bois, mais encore sur les métaux.

Celles qui sont particulières à l'auteur furent entreprises sur l'invitation du colonel Mudge, sous-gouverneur de cette *Académie*, destinée surtout à l'instruction des officiers de l'artillerie et du génie de l'Angleterre.

Barlow en fait connaître diverses autres; d'abord d'Emerson sur la résistance de diverses espèces de bois à la rupture par traction, et qui paraîtraient avoir été faites il y a environ un siècle (2); puis celles du docteur Robison (3); puis celles qui venaient d'être exécutées à l'arsenal de marine de Deptford, près Londres, par le colonel Beaufoy (4), et qui donnent une suite de mesures exactes des flèches de courbure prises sous diverses charges par des pièces de chêne et de pin, de 5 centimètres d'équarrissage environ; puis celles de MM. Peake et Barailler sur des pièces encastrées à un bout et sollicitées transversalement à l'autre, et sous l'encastrement desquelles ils avaient fixé un corps saillant semi-cylindrique pour éviter l'altération que le bord tranchant inférieur de l'enclave fait subir aux pièces; puis celles de M. Benjamin Couch, maître de mâts dans l'arsenal de Plymouth, sur des pièces aussi encastrées tantôt à une extrémité, tantôt aux deux, ayant des sections en forme de triangle et de trapèze, qu'il ployait, comme Duleau, en tournant en haut tantôt la grande base, tantôt le sommet ou la petite base, et, aussi, sur de longues perches rondes de sapin, d'iné-

---

(1) *An Essay on the Strength of Timber*, etc., London, 1817.

(2) Emerson's Mechanics. (Nous n'avons pu nous procurer cet ouvrage.)

(3) Ses articles ont été réunis après sa mort sous le titre *A System of mechanical Philosophy*.

(4) Publiées vers 1816 dans les *Annals of Philosophy* du Dr Thomson, vol. IX.

gale grosseur ou en forme de tronc de cône, sollicitées au bout le plus mince.

Celles de M. Barlow lui-même ont eu d'abord pour objet la *cohésion*, ou le poids capable de rompre, par *traction* tantôt parallèle, *tantôt perpendiculaire* aux fibres naturelles du bois, des blocs longs de 30 centimètres dont le milieu, sur 4 à 5 centimètres de longueur, était réduit, sur le tour, à un diamètre de 8 millimètres environ. Ensuite il rompit par flexion des barreaux de 25 millimètres d'équarrissage, en notant les flèches, tantôt seulement à l'instant qui précède la rupture, tantôt graduellement à mesure qu'on les chargeait de poids croissants. Puis il entailla des pièces, comme autrefois Duhamel, dans le but de déterminer, à l'instant de la rupture, la position de l'*axe neutre* (qu'il trouva en général placé aux 5/8 de l'épaisseur); puis il encastra ses barres à un seul bout *sous diverses inclinaisons*, etc.

De ses observations des flèches de courbure, il déduisit (comme Duleau et comme M. Dupin) qu'elles suivaient indubitablement la raison inverse des cubes des épaisseurs, et non celle des carrés comme l'avait dit Girard (n° VIII), dont les erreurs et les contradictions, non aperçues par l'auteur du Rapport approbatif de son ouvrage, furent en grande partie l'occasion des expériences du savant professeur de Woolwich, que l'Institut a inscrit depuis au nombre de ses correspondants. On lui doit d'autres séries d'expériences sur le point où les flexions commencent à devenir permanentes, et le mesurage, après la rupture, des parties de la section où les fibres se sont séparées. D'autres expériences sont relatives aux *bois tendus* (bent timber), c'est-à-dire courbés par une machine [1], ou bien ployés après un sciage longitudinal suivi de l'introduction de clefs, et, aussi, à des pièces juxtaposées, fortement unies par des cordes.

Deux autres sont intitulées *on the Momentum*, c'est-à-dire sur la force vive ou le choc que des fils déjà tendus peuvent

---

[1] De M. Hoskey, décrite au t. XXXII des Transactions de la Société des Arts, et dont l'emploi était précédé d'une immersion de plusieurs heures dans l'eau bouillante, que Barlow reconnaît ne point diminuer la force des bois.

supporter sans se rompre. Elles ont été faites sur un long fil de fer tendu horizontalement, au milieu duquel était attachée une corde verticale de $3^m,20^c$, portant un poids. En élevant ce poids et en le laissant retomber, tantôt il n'endommageait pas le fil de fer, tantôt il le rompait (1).

Dans un appendice, M. Barlow rapporte les expériences de Telfort, de Banks (2) et de Sickingen sur la ténacité du fil de fer et sur la résistance des barres de fonte à la rupture par flexion.

Dans la 3e édition de son ouvrage, publiée en 1837 sous le titre *Traité de la force des bois, du fer coulé et autres matières, etc* (3), il ajoute des expériences de M. Hodgkinson dont nous parlerons tout à l'heure; celles qui ont été faites à l'arsenal de Woolwich par ordre de l'amirauté, sur le cuivre, par M. Kingston avec une machine à levier construite par M. Bramah, et, aussi, par le capitaine Brown, le célèbre inventeur des câbles en chaînes de fer pour la marine, et le premier constructeur de ponts suspendus en Angleterre; enfin des expériences faites par lui-même en 1805 sur l'allongement progressif et la flexion graduelle des barres de fer forgé et les limites de leur *élasticité* si l'on entend par là leur faculté de retour à la longueur ou à la forme primitive; mais les conclusions qu'il en tire quant à la position de l'axe neutre à l'instant qu'il caractérise par *Elasticity injuried* ou *destroyed* n'ont rien d'assuré.

Cette nouvelle édition se termine par la relation de plusieurs séries d'expériences sur la flexion de rails de diverses formes, tant au repos que sous l'action d'une charge roulante.

Une partie de ces expériences se trouve citée également aux *Principes de charpente* publiés vers 1817 par M. Tredgold (4), qui contiennent aussi celles de Fincham (5) pour la résistance des bois à la rupture par traction et par flexion, de Rumford

(1) Cette expérience, comme plusieurs autres, est citée à l'ouvrage de Navier sur les ponts suspendus.

(2) John Banks Kendall. *Treatise on the Power of Machines*, 1803.

(3) *Treatise on the Strength*, etc., by Peter Barlow, member of Institute of France, etc. (*Mahoguni Hispaniola* doit être traduit par *Acajou de Saint-Domingue*).

(4) *Elementary Principles of Carpentry.*

(5) *Papers on naval Architecture*, published by Morgan and Creuze, vol. I.

pour la traction du fer. Une seconde édition, de 1828, en contient d'autres, de M. Bevan [1], sur la rupture des bois par traction et par flexion, et aussi par *detrusion* ou glissement des parties, genre de rupture qui s'opère, par exemple, lors de l'arrachage des vis à bois.

Mais un grand nombre d'autres expériences furent bientôt entreprises sur les métaux, à l'occasion de l'établissement des ponts suspendus, ou de la substitution des chaînes de fer au chanvre dans le gréement des navires, ou à la suite de l'élan que la paix de 1814 imprima à la métallurgie et aux constructions. L'usage de la fonte (*cast iron*, fer coulé) attira surtout l'attention. Employée depuis longtemps pour divers ustensiles, et aussi pour l'artillerie, elle paraît avoir été introduite dans les bâtiments seulement en 1755 par Smeaton, dont la hardiesse à cet égard fut l'objet d'un étonnement général [2]. M. Tredgold, par son traité spécial sur la force de cette matière [3], et M. Duverne par la traduction française qu'il en fit en 1826 sur la 2e édition, contribuèrent beaucoup à en étendre l'usage. Après avoir rapporté les expériences de Banks [4], d'Ebbels, etc., il donne les siennes, faites sur des solives ayant une forme longitudinale parabolique comme celles d'égale résistance, et une section transversale en double T ; puis sur des barreaux de fonte de diverses provenances, de 25 millimètres d'écarrissage. Il remarqua que malgré la dureté et l'aigreur qu'on attribue à la fonte elle prend comme le fer, passé certaines charges, des flexions permanentes. Il fit aussi quelques expériences d'extension et de compression sans rupture. Il cite aussi celles de *résilience* de M. Bevan, de pénétration du bois debout dans le bois à plat, et celles de l'auteur de l'article *Bridge* du Supplément à l'*Encyclopédie britannique* de Napier, qui a observé la compression d'un prisme rectangle suivant une de ses diagonales, etc.

---

(1) *The philosophical Magazine*, october 1827, vol. I.

(2) *Smeaton's Reports*, vol. I, p. 410-411.

(3) *Practical Essay upon Strength of cast Iron and others Metals*. Cet essai avait été précédé d'un mémoire inséré aux *Philosophical Transactions*, 1824, t. II.

(4) Ouvrage cité. Ces expériences ont été faites dans une fonderie de Wakefield.

Des expériences non moins intéressantes étaient faites en France.

M. Seguin, qui y construisit, en 1824, le premier pont suspendu, sur le Rhône entre Tain et Tournon, après avoir établi avec une étonnante économie une passerelle devant son établissement d'Annonay, en fit un grand nombre sur l'allongement et la ténacité du fil de fer ([1]), et quelques-unes aussi sur des barres de fonte ([2]). L'allongement, d'abord proportionnel à la charge, augmente ensuite dans un bien plus grand rapport, et devient en partie persistant ([3]). Le recuit du fil diminue beaucoup la ténacité en augmentant la ductilité.

D'autres expériences sur le fil de fer furent faites à Genève par M. Dufour, colonel du génie ([4]). Il reconnut en éprouvant, comme MM. Minard et Desormes, des fils de cuivre et de laiton (dont il avait été question de faire le pont de Genève), que le recuit diminuait aussi beaucoup leur ténacité.

On doit à M. Lamé, alors ingénieur au service de la Russie, quelques expériences sur la force du fil de fer de cette contrée : elle paraît considérable ([5]). Il en fit aussi sur des barres ([6]).

M. Lagerhjelm, ingénieur des mines de Suède, voulant réduire à sa juste valeur l'opinion qui fait préférer, dans plusieurs pays, les fers laminés anglais aux fers forgés suédois, entreprit à Stockholm en 1826 un très-grand nombre d'expériences avec une machine de l'invention de M. Hammarschiœld, se composant d'une presse hydraulique qui tirait, par un bout, des barres horizontales, dont l'autre bout était attaché au petit bras d'un

---

([1]) Des ponts en fil de fer, 1823, in-8°. Et deuxième édition in-4°, 1826.

([2]) M. Seguin rapporte aussi un fait observé par M. de Montgolfier fils; c'est le peu de durée du fer exposé, dans une presse à papier, à un effort de traction modéré, mais intermittent. Les pièces sont hors de service après quatre ou cinq mille de ces alternatives.

([3]) Cet allongement persistant, nommé *Set* par les Anglais, était signalé dès 1815 à l'article *Strength of Materials* de l'Encyclopédie britannique.

([4]) *Description d'un pont suspendu construit à Genève en* 1824. Ou *Annales des Ponts et Chaussées*, 1832, pour une analyse de cet ouvrage et de celui que le même officier a publié en 1831 sur les ponts suspendus en général.

([5]) Journal des voies et communications, 1828.

([6]) Lettre à M. Baillet, Annales des Mines, t. X, p. 329.

fort levier coudé que l'on chargeait de poids, de manière à maintenir son grand bras horizontal, et qui accusait ainsi les tensions. Les résultats ont été consignés en 1827 aux *Annales du bureau des mines de fer* de Suède (*Jern-Kontorets Annaler*) et publiés à part (1). Il a remarqué, comme d'autres expérimentateurs, que la section se rétrécit considérablement à l'endroit de la rupture. L'ouvrage a été traduit en allemand en 1829 par le Dr Pfaff (2); il est regrettable qu'on ne le connaisse en France que par une courte analyse (3), indiquant les propriétés générales constatées, sans donner aucun chiffre.

Navier fit aussi, sur la traction de la tôle, du cuivre rouge et du plomb laminé, quelques expériences dont on trouve les résultats aux nos 52, 70, 72 de l'édition 1833 de ses *Leçons*, où il a rapporté aussi le résultat moyen de l'épreuve des barres destinées au pont des Invalides, et dont on trouve la détail à la 2e édition de son ouvrage sur les ponts suspendus, avec diverses expériences qui lui ont été communiquées par le capitaine Brown et par M. Brunel.

M. Vicat, après avoir fait vers 1827 quelques expériences d'allongement des fils de fer, de 2 2/3 à 3 millimètres employés au pont suspendu d'Argentat (4), donna en 1831, à la suite du compte rendu d'un examen de ceux du Rhône (5), d'autres expériences où il compara les allongements permanents des fils non recuits et recuits (6). Depuis, l'illustre ingénieur a fait plusieurs expériences remarquables, où quatre brins de fil de fer ont supporté des poids pendant plusieurs années, et où il a noté l'accroissement que le temps apporte à l'allongement passé le 1/4

---

(1) *Forsök at bestamma*, etc. Essai pour déterminer la densité, la ductilité, la malléabilité, l'élasticité du fer en barre passé au cylindre et forgé, 2 vol. in-8° et atlas.

(2) Sous le titre *Peter Lagerhjelm versuch zur Bestimmung der Dichtheit, Gleichartigkeit*, etc.

(3) Bulletin technologique (Férussac), 1829, t. XI, n° 46, p. 41. Voir aussi t. XIII, n° 193, p. 304.

(4) *Description du pont suspendu construit sur la Dordogne à Argentat*, 1830.

(5) *Rapport*, etc. aux Annales des ponts et chaussées, 1831, 1er semestre, p. 141.

(6) M. Vicat a proposé de préférer le fil de fer aux barres à la suite d'autres remarques.

ou le 1/3 de la charge capable de rompre [1]; effet qu'il compare à celui qu'offrent certaines matières bitumineuses qui se brisent en éclats lorsqu'on les frappe, mais qui, abandonnées à leur propre poids, s'affaissent peu à peu sur elles-mêmes; et d'où il conclut que pour employer des matériaux quelconques avec sécurité il conviendrait de les soumettre à des épreuves de plusieurs mois au moins.

C'est une des conclusions que le même M. Vicat avait tirées, en 1833, d'expériences relatives à de tout autres matériaux (les pierres, les briques, le plâtre, le mortier) dans un mémoire célèbre [2] dont nous avons déjà plusieurs fois parlé (n° XVIII, et note du 152, § 1 et 10) et où il fait une distinction des forces tirante, portante ou transverse *instantanées* et des mêmes forces *permanentes*. Nous avons dit (V. ci-après, p. 473) que la manière dont il mesure la force *transverse* ou la résistance au glissement ou cisaillement, était propre à la faire évaluer beaucoup trop haut, et qu'il valait mieux, pour comparer cette force à la force *tirante*, s'en rapporter à des expériences récentes (§ 9 de la note du n° 152, p. 203; Voir aussi p. ccxcviij). Dans ce mémoire il se trouve, du reste, bien des choses précieuses à enregistrer, entre autres ce qu'il dit sur les encastrements parfaits et imparfaits (ci-après notes des n°s 152, 154, 156) etc., etc. Mais le but en étant surtout polémique, il convient d'étudier comme réponse le *Rapport* de MM. de Prony et Girard [3], qui suffit, même après la réplique de M. Vicat, pour venger la théorie de ses attaques, portant d'ailleurs sur d'autres points que ceux où elle pose des affirmations, puisqu'elle ne prétend pas que ses formules s'appliquent jusqu'à l'instant où il y a rupture.

Pour en revenir aux fers, l'augmentation de leur allongement, dans une plus forte proportion que la charge par unité de section passé une certaine tension, fut encore plus mise en lumière

---

(1) *Note sur l'allongement progressif du fil de fer soumis à diverses tensions.* Annales des ponts et chaussées, 1834, 1er semestre, p. 40.

(2) *Recherches expérimentales* sur les phénomènes physiques qui précèdent et accompagnent la rupture ou l'affaissement d'une certaine classe de solides. Ann. des ponts et chaussées, 1833, 2e semestre.

(3) Annales des ponts et chaussées, 1834, 1er semestre, p. 293.

par des expériences de M. Bornet faites à la presse hydraulique aux forges de la marine à Guérigny (Nièvre) (1). La ligne dont les abscisses sont les forces et dont les ordonnées sont les allongements, après être restée droite jusqu'à une certaine charge, se relève tout d'un coup avec rapidité, surtout pour les fers doux et ductiles; mais, alors, les allongements sont pour la plus grande partie persistants.

Du reste, en retranchant la partie persistante, on trouve que les parties *élastiques* ou qui disparaissent quand on soustrait les charges, restent assez sensiblement proportionnelles à celles-ci, rapportées à l'unité superficielle de la section en ayant égard au besoin à la petite diminution progressive qu'éprouve celle-ci, ou que *le coefficient d'élasticité reste à peu près constant*.

C'est ce qu'on appelle la loi de M. de Gerstner (2), déduite par ce célèbre ingénieur allemand d'expériences sur des fils de fer très-fins. Elle a été remarquée aussi par le physicien Leslie (3) sur des barres. Mais on pourrait l'appeler aussi la loi de Coulomb, car le physicien français a remarqué, dans ses expériences sur la torsion des fils de métal et la flexion des lames (*voir* ci-après), le même fait, qui prouve que l'élasticité *reste entière* dans le nouvel état que déterminent les torsions, extensions ou flexions permanentes. (*Voir* § 8 de la Note du n° 21, p. 22.)

Cette loi, au reste, n'est qu'approchée, et ne s'observe pas d'une manière tout à fait exacte, comme on voit par les expériences sur le fer recuit ou non recuit, et l'acier, faites par M. Ardant; et il y a, à cet égard, des effets un peu différents selon qu'on laisse ou non le fil en repos un certain temps sous sa dernière charge, car il en résulte un écrouissage (*voir* p. 4 et p. 22)

---

(1) *Du fer dans les ponts suspendus*, par M. Émile Martin, br. in 4°, 808; ou Annales des ponts et chaussées, 1834, 2e semestre, p. 157.

(2) *Manuel de Mécanique*, t. I, p. 280. Ou *Mémoire* (allemand) *sur la force des matériaux*, par M. Adam Burg, 1838. Ou *Extrait* du *Journa. de l'Institut polytechnique de Vienne*, t. XIX. — On trouve aussi un certain nombre d'expériences de Von Gerstner aux *Annales der Physik und Chemie von Poggendorff*, 1832, t. XXVI.

(3) Leslie. *Elements of natural Philosophy*. Edinburg, 1823.

qui donne aux fils mous une certaine roideur [1]. Réciproquement on peut, par le recuit, leur rendre la ductilité que cette longue charge ou bien l'étirage leur avait ôtée au profit de leur résistance élastique.

On doit à ce savant Général, qu'un accident funeste a enlevé au corps du génie, d'autres expériences sur les fils de laiton, de plomb, etc., et un grand nombre de remarques précieuses que lui ont suggérées leurs résultats comparés.

Nous avons déjà eu l'occasion (n° XLIX, note p. ccxj) de parler de ses recherches sur les systèmes de charpente [2]. On y trouve un grand nombre d'expériences sur des fermes composées de diverses manières.

Au reste il ne faut pas compter, à un instant quelconque des expériences, sur une constitution bien homogène des corps. Sans parler des bois, qui offrent à cet égard des inégalités prononcées (voir plus loin), l'allongement sous une tension donnée n'est pas toujours la même dans les différentes parties d'un fil de fer, comme l'a reconnu le même M. Ardant. Et la surface, l'*épiderme*, comme dit M. Girard, est évidemment d'une autre contexture que le centre. Savart, par des expériences délicates sur les vibrations de plaques même de métaux fondus, ainsi que de verre, de résine, etc., a observé des faits nombreux qui ne peuvent s'expliquer que par des différences de contexture non-seulement dans les divers sens mais aussi aux divers points [3].

Après les ingénieurs, qui visent à obtenir des données pratiques, ce champ devait être parcouru par les physiciens, qui observent de plus près et par des moyens précis les circonstances, dans le but d'en déduire des lois dont la science puisse s'enrichir.

Déjà, comme nous avons dit (n° LIX), vers 1785, Chladni, en Allemagne, avait non-seulement observé les vibrations longitu-

---

(1) Introduction à la Mécanique industrielle, de M. Poncelet.

(2) Études théoriques et expérimentales sur l'établissement des charpentes à grande portée. Metz, in-4°, 1840.

(3) *Annales de chimie et de physique*, de 1822 à 1837.

dinales et transversales des verges élastiques, et, aussi, leurs vibrations *normales* et leurs vibrations *tournantes*, sur lesquelles il a le premier appelé l'attention, mais, encore, fait des expériences nombreuses et curieuses sur les vibrations des plaques et sur leurs singulières lignes nodales [1]. Savart continua et varia considérablement ces expériences, en révélant aussi des faits nouveaux et importants sur les vibrations longitudinales, susceptibles par exemple d'être énergiquement provoquées par un simple frottement s'il est continué ou renouvelé.

Un des résultats les plus remarquables des recherches de cet habile expérimentateur fut la vérification de plusieurs lois de vibration découvertes analytiquement par M. Cauchy, et, aussi, de sa formule du moment de torsion pour les prismes rectangulaires, quand ils sont *plats* ou minces; cas où la formule, comme nous avons dit (n° XXXVI), est exacte; et ses deux expériences sur des prismes où le rapport des deux dimensions transversales était de 1 à 3,3 et de 1 à 3,9, vérifient notre formule, dont Cauchy a approuvé la substitution à la sienne.

C'est dans cet esprit scientifique qu'ont été faites les nombreuses et consciencieuses expériences de Wertheim, exécutées en observant avec un cathétomètre très-sensible les allongements ou les flexions les plus imperceptibles, et en comptant par des moyens aussi très-exacts les nombres de vibrations. On lui doit des *Recherches sur l'élasticité et la cohésion des métaux* [2] (platine, or, argent, plomb, cuivre, zinc, fer, acier, etc.), étirés, écrouis, recuits, à l'état pur ou légèrement alliés, à diverses températures de —15° à +200° [3]. Les modules d'élasticité furent mesurés par lui tant par l'extension statique que par la vitesse du son dans les tiges, ou bien par les vibrations transversales. Il a vérifié la loi de Gertsner. Il a cru trouver que la partie persis-

---

(1) *Traité d'acoustique.*

(2) Présenté le 8 juillet 1842. *Annales de ch. et de ph.*, 3e série, t. XII.

(3) On sait que MM. Tremery et Poirier Saint-Brice ont fait aussi des expériences tendant à évaluer l'influence des hautes températures pour modifier les coefficients d'élasticité (Ann. des Mines, 2e série, t. 3).

tante des allongements se manifestait dès le commencement de l'extension : c'est la seule conclusion qu'on puisse lui contester. (*Voir* § 10 de la Note du n° 21, p. 23.)

Wertheim présenta bientôt une suite à ce travail, intitulé *Recherches sur l'élasticité*, où il examine d'abord (2e mémoire) les alliages [1]; puis, dans un troisième mémoire, l'influence d'un courant électrique.

Le même physicien, dont les premières études avaient porté sur l'anatomie, a présenté un nouveau mémoire, le 28 décembre 1846, sur l'élasticité et la cohésion des principaux tissus du corps humain [2].

Vers le même temps, les *Annales de chimie et de physique* donnèrent un mémoire fait en commun par lui et par M. Chevandier sur l'élasticité et la cohésion des différentes espèces de verre [3]. Ils remarquèrent que, comme pour les métaux, le coefficient d'élasticité calculé par les allongements statiques est constamment moindre que celui qu'on déduit des vibrations.

Mais le travail le plus considérable, le plus complet et le plus entouré de toutes les précautions propres à garantir l'exactitude des résultats est celui qui a été présenté encore en commun le 5 octobre 1846 par MM. Chevandier et Wertheim sous le titre *Mémoire sur les propriétés mécaniques des bois* [4]. Il est précédé d'un historique qui fait connaître encore quelques expérimentateurs, savoir M. Wheastone [5], qui a taillé des plaques de bois de forme rectangulaire, en réglant le grand côté, parallèle aux fibres, et le petit côté, de telle sorte qu'en les mettant en vibration on ait des lignes nodales diagonales, ce qui permet de déduire le rapport des élasticités dans les deux sens; M. Hagen [6], dont il est question à l'Appendice complémentaire § 92;

---

(1) 8 mai 1843, même tome.

(2) Nous avons cité, au § 74 du 5e Appendice, les expériences de M. Weber (Ann. de Poggendorff, t. LIV) sur les fils de soie, se comportant d'une manière analogue.

(3) 2 juin 1845, 3e série, t. XIX.

(4) In-8°, 1848, chez Bachelier.

(5) *Philosophical Transactions*, 1833, p. 608.

(6) *Annales de Poggendorff*, t. LVIII, p. 425.

et MM. Pacinotti et Peri [1] dont les expériences de flexion ont été faites en posant les barres de bois tantôt sur deux appuis à faces horizontales et verticales, tantôt sur des rouleaux, tantôt sur des poulies. Ces derniers auteurs ont trouvé qu'en défalquant les parties persistantes, les extensions et flexions restaient proportionnelles aux charges, même en approchant du point de rupture (loi de Gertsner), et que le coefficient d'élasticité E est presque proportionnel à la densité dans les diverses variétés d'un même bois, ce qui rendrait sensiblement constante la *hauteur du module* de Young. Les expériences de MM. Chevandier et Wertheim, faites dans les Vosges, ont porté sur des échantillons de dix-sept espèces de bois, tirés de quatre-vingt-quatorze arbres. Les barreaux ont été extraits dans diverses orientations, ils ont été éprouvés à divers degrés de dessiccation; on a déterminé les allongements, les flexions statiques, les cohésions ou charges de rupture, le nombre des vibrations; et on a comparé les résultats des expériences sur les tringles et les barreaux avec celles qui ont été faites sur les pièces entières débitées dans les dimensions ordinaires du commerce et des constructions. On a noté les densités, la nature du sol. On a mesuré les allongements élastiques et les allongements persistants. On a éprouvé des tringles taillées dans le sens des fibres, dans le sens des rayons des couches concentriques et dans le sens de leurs tangentes. Ce grand et beau travail sera toujours consulté avec fruit.

On doit aussi à M. Wertheim des expériences sur la vitesse du son dans le fer, faites en commun avec M. Breguet [2]; et une dernière note [3] présentée à l'occasion d'expériences de M. Kirchhoff sur la comparaison de la flexion avec la torsion dans les verges rondes d'acier trempé et de cuivre [4].

M. Wertheim a inséré aussi aux *Annales de chimie et de physique* (3e série, t. XXV) une *Note sur la torsion des verges homo-*

---

(1) *Il Cimento*, 3e année, 1845.

(2) Comptes rendus, t. XXXII.

(3) Comptes rendus, t. LI, p. 969.

(4) Annales de Poggendorff; ou l'extrait publié par M. Verdet aux Ann. de ch. et de ph., 3e série, t. LIX.

gènes, une autre sur la *vibration des plaques* circulaires (t. XXXI) et une autre (présentée le 10 décembre 1849) sur la *propagation du mouvement* dans les corps solides et dans les liquides. Le premier de ces trois mémoires avait pour but de justifier, par la comparaison des résultats de flexion avec ceux de torsion, sa modification aux formules que nous avons longuement discutées à notre Appendice V. Le mémoire sur l'équilibre des solides homogènes, présenté le 10 février 1848 (1), où il propose cette modification peu heureuse, contient un assez grand nombre d'expériences sur des tubes en verre et en laiton, mais qui peuvent, comme nous avons dit (même Appendice) être interprétées autrement qu'il ne fait (2).

Un des travaux les plus considérables de Wertheim est son mémoire de 1855 sur la torsion (3).

Ce sujet a été, comme nous l'avons dit, traité pour la première fois par Coulomb (4) avec sa supériorité ordinaire. Son mémoire contient, avec une théorie saine mais s'appliquant uniquement aux fils ou aux cylindres à section circulaire, des expériences à l'appui, dans une partie desquelles la résistance est évaluée en comptant le nombre des vibrations tournantes. On y trouve (XX & XXV, seconde section) la première remarque qui ait été faite des parties persistantes n'empêchant pas, quand on les défalque, l'élasticité de se conserver, ou les parties non-persistantes de rester proportionnelles aux efforts. Depuis, M. Banks (5),

---

(1) Ann. de chimie et de physique, 3e série, t. XXIII.

(2) Au nombre des travaux de physiciens nous ne devons pas oublier de mentionner celui de M. Person (Comptes rendus, 4 septembre 1848, t. XXVII, p. 258), dans lequel il trouve pour la chaleur latente l de fusion de divers métaux dont E représente le coefficient d'élasticité, et Π le poids spécifique (celui du mètre cube sans doute), une formule $l = KE\left(1 + \frac{2}{\sqrt{\Pi}}\right)$. Le coefficient K est trouvé le même pour le zinc, le plomb, le bismuth, l'argent, etc. Il se sert des expériences de M. Wertheim sur les élasticités.

(3) Présenté le 19 février 1855. Annales de ch. et de ph. Juin 1855, p. 195.

(4) *Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de métal*, Mém. de l'Académie pour 1784... Observations sur les lois de l'élasticité et de la cohérence.

(5) *Treatise on the Power of Machines.*

M. Dunlop [1], M. Rennie [2], M. Bramah [3] et M. Bevan [4], ont fait diverses expériences, surtout de rupture par torsion. Nous avons parlé de celles de Duleau et de Savart pour la simple torsion sans rupture.

Bien que plusieurs passages du mémoire de Wertheim sur la torsion aient été rédigés dans un esprit évident de polémique, et qu'on ne puisse lui accorder ni le retour à une formule de Cauchy à laquelle ce géomètre avait renoncé, ni l'évaluation du coefficient d'élasticité de torsion, en le déduisant, par ses formules théoriques modifiées, du coefficient d'élasticité d'extension, seul mesuré, les expériences consciencieusement et soigneusement faites, comme toutes celles de ce regretté physicien, et qui ont porté sur des prismes ou cylindres circulaires, rectangulaires, elliptiques, en verre, cristal, fer, acier fondu, laiton, tôle, bois de chêne et de sapin, ne donnent pas moins une suite de résultats précieux.

Des expériences récentes sur la torsion des bois ont été faites aussi par M. Bonniceau, ingénieur en chef des ponts et chaussées [5]. Les torsions sont proportionnelles aux efforts tant que ceux-ci ne dépassent pas une certaine limite; les angles de torsion sont bien en raison inverse des quatrièmes puissances des côtés de la base supposée carrée; et les efforts qui rompent sont comme les cubes.

D'autres expériences sur la torsion, qui paraissent très-précises, avaient été publiées en 1842 par M. Giulio [6]. Il déduit la torsion des fils métalliques de l'allongement des ressorts en hélice que l'on en compose, car, lorsque le pas de l'hélice est très-peu considérable, la torsion se trouve seule en jeu, et peu

---

(1) *Dr Thomson's Annals of Philosophy*, t. XIII, p. 200.

(2) *Philosophical Transactions*, 1818; ou *Annales de ch. et de ph.*, 1818.

(3) *Practical Essay on the Strength of cast Iron*, by Tredgold.

(4) *Experiments of the Modulus of Torsion by Benjamin Bevan*. Trans. phil., 1829; faites sur 47 espèces de bois et 16 espèces de métaux.

(5) *Annales des ponts et chaussées*, 1861, 1er semestre.

(6) *Académie de Turin*, 1842; lu le 11 juillet 1841. Deux autres mémoires du même expérimentateur, lus le 5 juillet et le 20 décembre 1840, figurent au tome de 1841. L'un est relatif à la flexion des fers, l'autre est relatif à l'extension des fils de fer.

ou point la flexion. Ses expériences sur le fer, le cuivre, l'argent, l'étain, le plomb, lui paraissent confirmer la loi de Gertsner [1].

On trouve aussi dans la *Bibliothèque universelle de Genève*, t. V, n° 20, 20 août 1859 (Archives, p. 294) l'extrait d'un mémoire de M. G. Wiedeman sur la torsion des fils [2]. Elles ont rapport surtout aux lois des torsions et détorsions permanentes, successivement imprimées.

Enfin, en 1862, le numéro de mars du *Civil Engineer and Architect's Journal* contient, p. 85, quelques expériences faites à Glasgow par M. Rankine sur la résistance des barres à la rupture par torsion.

La résistance à la torsion dérive, comme nous avons vu, de *la résistance au glissement*. Mais celle-ci peut être mise aussi en jeu sans qu'il y ait torsion, à savoir lorsque l'action extérieure contre laquelle elle réagit s'exerce dans un sens transversal aux pièces, ou dans une direction tangentielle aux sections ou faces de rupture, qui soit sensiblement la même sur tous leurs éléments, en sorte que cette action tende à trancher, cisailler, détruire l'adhérence; tendance qui a plus ou moins lieu dans toute flexion qui ne s'opère pas d'une manière *égale* d'un bout à l'autre ou en arc de cercle. Avant que M. Vicat ait appelé l'attention sur cette force *transverse*, et basé sur son omission la principale accusation qu'il porte contre la théorie ordinaire de la résistance des pièces solides aux efforts perpendiculaires à leur longueur [3], cette espèce de force ou de résistance avait été l'objet de diverses expériences. On peut en effet y rattacher celles de M. Boitard [4], sur l'adhérence des mortiers et sur la résistance que leur interposition entre les pierres de taille op-

---

(1) Le glissement transversal doit avoir aussi une influence (Mémoire du 6 novembre 1843 aux *Comptes rendus*, t. XVII, p. 1020).

(2) Le mémoire complet se trouve dans les *Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschafft in Basel*, II° Heft., 2, 1859.

(3) Ce reproche de M. Vicat se trouve formulé pour la première fois à sa *Description d'un pont suspendu construit sur la Dordogne à Argentat*, in-4°, 1830, p. 2 et 3. Il cite les *corbeaux*, les *tourillons*, les *goujons* et autres pièces courtes, comme se soutrayant à cette théorie.

(4) Elles sont décrites au t. I du *Traité des ponts*, de Gauthey, p. 263.

pose au glissement de celles-ci l'une devant l'autre. Perronet avait fait aussi diverses expériences sur le frottement mutuel des pierres. On en doit aussi à M. Morin [1] sur l'adhérence des pierres avec mortier interposé, indépendamment de leur *frottement* qui ne résiste que lorsqu'il y a mouvement commencé ou que l'*adhérence* est déjà vaincue. Enfin nous avons déjà parlé (p. 473) de celles de cisaillement de tringles de fer, qui ont été faites par MM. Gouin et Cᵉ, et d'autres plus récentes, sur des rivets d'acier, faites par MM. Combes, Lorieux et Couche [2], qui ont montré que cette sorte de résistance, au lieu de s'élever, comme pensait M. Vicat, à cinq ou six fois la résistance à la rupture par extension, restait un peu au-dessous de celle-ci et pouvait être regardée comme en étant les *quatre cinquièmes*, conformément à la théorie, qui, cependant, est donnée comme ne s'appliquant à la rigueur que pour des corps non-seulement isotropes, mais encore restant dans les limites de la conservation intacte de leur contexture moléculaire.

A mesure que nous avançons les expériences se multiplent, surtout au point de vue d'une application pratique immédiate [3]. Presque aucun pont suspendu ou autre ouvrage de fer, fil de fer ou fonte, ne s'exécute sans éprouver préalablement les pièces, indépendamment de l'épreuve totale à laquelle ces ouvrages sont finalement soumis [4]. Toutes les usines, tous les entrepôts de pièces de fer, essayent leurs produits.

Ainsi, les fils de 3 millimètres de diamètre du pont de Fribourg, d'une portée de 300 mètres, l'ouvrage le plus hardi qui ait été construit, ont été reconnus par l'ingénieur, M. Chaley,

---

(1) *Nouvelles expériences sur l'adhérence des pierres et des briques posées à bain de mortier, etc.*, 1828, et, aussi, *Leçons sur la résistance des matériaux.*

(2) Mêmes Leçons de M. Morin, 3ᵉ édit, (1862), t. I, nᵒ 70.

(3) M. Wiesbach (*Lehrbuck der Ingenieur and Machinen Mechanik*) cite encore d'autres expérimentateurs tant anciens que récents : S' Gravesande, Brir, Moseley, Moll, Bornemann, Ettelwein ; puis M. Kamarch, avec une commission nommée en Hanovre ; et, aussi, M. Ernest Lamarle, dont nous avons eu occasion de parler ailleurs, et qui a confirmé les formules de flexion, comme Duleau, en y soumettant des règles à section triangulaires posées alternativement sur leur plat et sur leur arête.

(4) La plus ancienne épreuve peut-être est celle du *Pont des Arts*, à Paris : on en voit la relation au *Bulletin de la Société philomathique*, 1803, p. 154.

supporter, avant de rompre, 82 kilogrammes par millimètre carré. Ils sont soumis à un effort permanent de 17k,53, et, lors de la charge maximum, à un effort de 26k,88. Le pont a résisté à toutes les épreuves, même de pas cadencés, au son de la musique militaire, et malgré de fortes oscillations (1).

Après avoir présenté, en 1835 (2), diverses *observations comparatives* sur l'emploi des fils et des barres de fer, M. Leblanc, qui avait conclu à l'adoption des fils, a présenté, en 1839, plusieurs séries d'expériences, accompagnées d'importantes remarques sur ceux qu'il a employés au grand pont de la Roche-Bernard (3); et, ensuite, il en a publié le complément (4), où il remarque que les allongements augmentent avec rapidité après une tension des deux tiers de celle de la rupture; mais que, soumis pendant cent jours à un effort considérable, les fils ont offert ensuite une résistance plutôt supérieure qu'inférieure à la résistance primitive, etc.

On trouve aussi diverses expériences sur les barres et sur les fils aux pages 295 et 334-336 d'une notice sur le pont suspendu de Saint-Christophe, près Lorient, par MM. Leclerc et Noyon (5).

Dans le même recueil (*Annales des ponts et chaussées*) on trouve, jusqu'à l'époque actuelle, les résultats d'un certain nombre d'autres expériences sur la force ou la flexion des matériaux. — En 1842 (1er semestre, p. 336) un mémoire de MM. Flachat et Petiet sur les ponts suspendus avec câbles en *rubans de fer laminé*, employés à la passerelle d'Abainville et au pont de Suresnes. (*Voir* aussi p. 394, le rapport de M. Baude sur les épreuves.)—En 1850 (1er semestre, p. 309), des recherches expérimentales de M. Chevallier sur la construction des grandes portes d'écluses; ses expériences vérifient la théorie connue et le conduisent à établir, sur la répartition des charges, quelques principes qui auraient besoin

---

(1) *Annales des ponts et chaussées*, 1835, 1er semestre, p. 1.

(2) *Idem*, 2e semestre, p. 315.

(3) *Idem*, 1839, 2e semestre, p. 300.

(4) *Description du pont suspendu de la Roche-Bernard*, 1841.

(5) *Ann. des p. et ch.*, 1850, 1er semestre.

d'être examinés.—En 1852 (1er semest., p. 253), le résultat, obtenu par M. Féburier, des épreuves d'une entretoise destinée aux portes de la grande écluse de Saint-Malo. — En 1853 (1er semestre, p. 78), une note de M. Brame sur l'application de la tôle à quelques ponts du chemin de fer de ceinture de Paris; ce mémoire renferme la relation de plusieurs épreuves auxquelles ces ponts en tôle ont été soumis, et de quelques expériences inédites faites aux forges d'Imphy, près Nevers, sur les tôles, par MM. Gouin et Ce. — En 1854 (1er semestre, p. 257), un rapport, par MM. Collet-Meygret et Desplaces, sur les épreuves faites à l'occasion de la réception du viaduc en fonte construit sur le Rhône à Tarascon, et sur les mouvements des arches par l'influence de la température et des charges, etc. A la suite du compte rendu des observations précises dont ces mouvements ont été l'objet, se trouvent les résultats d'un assez grand nombre d'expériences sur des barres de fonte de 3 mètres de long, de 5 et 10 centimètres de côté, faites aux ateliers du chemin de fer à Arles. — En 1855 (1er sem., p. 192), des expériences de M. Pirel, sur la flexion des arcs et poutres en fonte de Lormont et de Chauvin au moment du passage des convois, et sur les mouvements que leur font éprouver les variations de température.—Même volume, p. 225, des expériences sur le coefficient d'élasticité de la fonte par M. Baumgarten. — En 1857 (2e sem., p. 257), un mémoire de M. Decomble sur la meilleure forme à donner aux poutres droites en fonte; on y trouve plusieurs expériences, et un grand nombre d'utiles considérations basées sur des faits de la pratique du coulage des pièces. — En 1859 (1er sem., p. 129), un mémoire de M. Plocq sur les épreuves d'un pont tournant en tôle de Dunkerque. — Même année (2e sem., p. 326), les expériences faites par M. Noyon sur les fils des câbles du pont de la Roche-Bernard, après l'accident causé en 1852 par des oscillations horizontales pendant une violente tempête. — En 1860 (2e sem., p. 113), des remarques de M. le colonel russe Jouravski sur les poutres en treillis et les poutres pleines en tôle, suivies de quelques épreuves et expériences. — En 1861 (2e sem., p. 1), un rapport de MM. Combes, Lorieux et Couche sur les conditions d'épaisseur pour les *tôles d'acier fondu* employées dans la construction des chaudières à

vapeur. On y trouve un certain nombre d'essais d'extension et de rupture de la tôle à froid et à chaud, et les avis de divers ingénieurs, offrant comme le résumé de ce que leur expérience leur a appris à ce sujet.

Cette commission avait exprimé l'avis que de nouvelles expériences étaient nécessaires. Elles furent faites (même volume de 1860) par M. Tresca, sous-directeur du Conservatoire des arts et métiers; son procès-verbal en contient aussi sur diverses barres d'acier vif.

Les Annales des mines (où l'on trouve déjà, en 1826, un article de M. d'Aubuisson sur les limites d'élasticité) ont enregistré également diverses expériences qui sont consignées, entre autres, dans des mémoires de M. Couche, de 1852 et 1854, principalement sur les rails de différentes formes. On y trouve aussi (1852), à la suite du *Mémoire sur les ressorts* en acier employés dans le matériel du chemin de fer, par M. Phillips, un certain nombre d'expériences sur l'élasticité de l'acier.

M. Ferdinand Zorès, dans une notice jointe à son Recueil de fers spéciaux, dont il était entrepositaire (quai Jemmapes, 212), a donné les résultats d'un certain nombre d'expériences sur la flexion et la rupture de ses échantillons à double T (p. 113 ci-après).

Depuis 1852, il se fait à Saint-Pétersbourg, dans l'Observatoire de physique central, des expériences dont il est rendu un compte annuel au ministre des finances. Les comptes ainsi rendus de 1852, 1853, 1855 en contiennent sur l'élasticité des métaux, déterminée tant par leurs flexions ou torsions statiques que par leurs vibrations transversales ou tournantes. Le compte de 1856 en contient qui sont relatives à l'influence de la chaleur sur l'élasticité.

Mais les principales expériences du milieu du siècle où nous sommes ont été faites en Angleterre, et quelques-unes sur une échelle presque gigantesque.

Depuis longtemps, le célèbre M. Fairbairn (aujourd'hui correspondant de l'Institut de France) qui, le premier, a construit pour la marine anglaise des navires de grande dimension tout en fer, avait entrepris dans son bel établissement de Manchester une suite d'expériences sur la résistance des matériaux,

et il avait, pour en étendre le cadre, mis à la disposition de son savant ami M. Eaton Hodgkinson, professeur de physique, les moyens dont il disposait. Dès 1830, M. Hodgkinson s'était fait avantageusement connaître par divers beaux mémoires, dont cinq insérés au volume de 1831 de ceux de la *Société littéraire et philosophique de Manchester;* quatre d'entre eux étaient relatifs aux ponts suspendus; l'autre, qui doit fixer davantage notre attention, était intitulé : *Recherches théoriques et expérimentales pour déterminer la force et la meilleure forme des poutres en fer* (1). Devenu collaborateur de M. Fairbairn, il entreprit d'abord avec lui diverses séries d'expériences ayant surtout pour objet la *comparaison des fontes fabriquées à l'air froid et à l'air chaud;* et ces deux habiles expérimentateurs publièrent, dans deux mémoires séparés, au même volume de l'*Association britannique pour l'avancement des sciences* (2), les résultats que chacun avait plus particulièrement recueillis. Ces expériences furent suivies d'autres non moins précieuses, dues à M. Hodgkinson, sur la résistance des colonnes (*pillars*) de fonte, et qui donnèrent lieu à la présentation d'un mémoire du 22 avril, lu le 14 mai 1840 devant la Société royale de Londres, et inséré au volume de la même année 1840 des *Philosophical Transactions* (3), p. 385.

Les divers mémoires dont nous venons de parler furent réunis de manière à former la matière d'un supplément à une nouvelle édition du *Cast Iron* de Tredgold, supplément publié à part en 1846.

Cet ouvrage plein de faits, dont M. Combe avait donné quelque idée dès 1844 en publiant le premier volume de son

---

(1) *Memoirs of litterary and philosophical Society of Manchester*, vol. V, 1831, p. 407-544.

(2) *Report of the seventh meeting of the British association for the advancement of Science, held at Liverpool*, sept. 1837, vol. VI. Page 337, On the relative strength and other mecanical Properties of cast Iron obtained by hot and cold blast by Eaton Hogdkinson. Page 377, On the strength and other Properties from the hot and cold blast, by W. Fairbairn.

(3) *Experimental researches of the strength of Pillars of cast iron and other materials.*

Traité de l'exploitation des Mines, a été traduit presque entièrement en français vers 1850 et inséré aux Annales des ponts et chaussées seulement en 1855 (1), par M. Pirel, à qui il avait été prêté à Bordeaux par un ingénieur suédois.

Les expériences de M. Hodgkinson sur la fonte fabriquée tant à l'air chaud qu'à l'air froid, portent d'abord sur la résistance à l'extension de pièces de fonte à section en croix d'équerre, et en opérant quelquefois la traction dans une direction qui n'était pas suivant l'axe mais suivant une arête; dans ce dernier cas la résistance était réduite au tiers. Il en a fait beaucoup aussi sur la résistance à la flexion et à la rupture par flexion des poutres en fonte.

Celles de M. Fairbairn (même ouvrage traduit, et tirées du même volume VI de l'*Association britannique*) sont relatives en grande partie à des *pressions longtemps continuées*, transversalement et au milieu, et voisines de celles de rupture, faites sur des barres de fonte. Trois de ces neuf barres furent trouvées rompues au bout de cinq ans. D'autres expériences de M. Fairbairn sont relatives aux flèches non permanentes ou permanentes, etc., et ont porté sur des fontes de tous les fourneaux de la Grande-Bretagne. Beaucoup furent faites sur des poutres à section transversales en T et à section longitudinale doublement parabolique comme celle des pièces qui sont d'égale résistance pour une largeur constante. La séparation d'une sorte de coin du côté devenu concave a été plusieurs fois observée lors de la rupture.

Les nombreuses expériences (*idem*, tirées des *Trans. phil.* 1840)

---

(1) *Recherches sur la résistance et les diverses propriétés de la fonte de fer*, par Eaton Hodgkinson, traduites par M. Pirel (1er semestre, page 1).

Les figures 53 et 54 de la planche 71 des Annales, jointes à cette traduction de M. Pirel, ont été copiées sur des figures dans le texte avec traits épais, qui ont fait juger à tort au dessinateur qu'elles représentaient des pièces creuses, tandis que ce sont des pièces pleines, ayant même d'autres proportions.

M. Pirel n'a pas traduit le dernier article (sur la torsion) qui, en effet, n'offre pas d'intérêt, et l'avant-dernier intitulé *Theoretical inquiries with regard to the strength of Beams*, où il m'a paru qu'il y avait une idée propre à résoudre approximativement le problème de la *résistance à la rupture immédiate*. C'est cette idée que j'ai développée, en la modifiant d'une manière essentielle, à la note du n° 451 ci-après.

faites par M. Hodgkinson sur les résistances à la compression, portèrent d'abord sur des prismes courts (de bois, puis de fonte) qui cédaient par écrasement, en se disjoignant latéralement de diverses manières, puis de colonnes (pillars) qui cédaient d'une manière intermédiaire entre celle qui consiste à s'écraser et celle qui consiste à fléchir latéralement comme les pièces dites *debout*. M. Hodgkinson représente empiriquement les résultats par une formule comme celle d'Euler, relative à celles-ci (n° XII) excepté qu'au lieu de la puissance 4 du diamètre il y a au numérateur une puissance 3,6, et qu'au lieu de la puissance 2 de la longueur il y a au dénominateur la puissance 1,7 [1].

Enfin les expériences de 1830 de M. Hodgkinson, pour déterminer la meilleure forme à donner à la section des poutres en fonte, sont fort nombreuses. Cette forme à double T est, suivant lui, celle où la semelle inférieure a une superficie qui est à celle de la semelle supérieure dans le rapport de 6 à 1 des résistances à l'écrasement des pièces courtes, et à la rupture par extension. En supposant cette conclusion exacte pour la rupture immédiate, rien ne dit qu'on doive l'adopter pour la rupture éloignée; aussi les constructeurs s'accordent-ils généralement à préférer les semelles égales. (*Voyez* les discussions aux §§ 13 et 17, 18 des Notes des n°s 113 et 120, p. 108 et 146.)

---

[1] M. Love, que nous citerons de nouveau tout à l'heure, a représenté les mêmes expériences par une formule plus facile à calculer et qui donne en même temps des résultats plus rapprochés, où la 4e puissance du diamètre est laissée au numérateur, mais où il y a, au dénominateur, deux termes, savoir un affecté de la puissance 2 de la longueur, et un affecté de la puissance 2 du diamètre. Ces deux formules ne satisfont point aux deux cas extrêmes de pièces très-courtes, où la force qui fait rompre est simplement proportionnelle au carré du diamètre et à peu près indépendante de la longueur, et de pièces ayant des longueurs pour lesquelles Duleau a reconnu que la formule d'Euler s'observait. Une formule telle que $\left(\frac{1}{P}\right)^n = \left(\frac{1}{R'\omega}\right)^n + \left(\frac{l^2}{\pi^2 EI}\right)^n$ aurait l'avantage de donner, pour la force qui fait rompre, $P =$ la formule d'écrasement $R'\omega$ (ω étant l'aire de la section) quand la longueur l est extrêmement petite, et $P =$ l'expression d'Euler quand la longueur est extrêmement grande. Il n'y aurait qu'à déterminer l'exposant n de manière à satisfaire le mieux possible aux intermédiaires.

M. Hodgkinson renvoie, pour les résistances au choc et aux vibrations, à son *cinquième rapport*, inséré aux Mémoires de l'association britannique en 1835.

Il cite aussi des expériences inédites d'autres auteurs, entre autres de M. Bramah et de M. Thomas Cubbitt, que nous allons retrouver membre d'une commission célèbre; expériences dont quelques-unes avaient été faites en commun avec M. Henri de la Bèche pour s'acquitter d'une mission du gouvernement ayant pour objet de rechercher les causes de la chute de deux bâtiments d'usines; elles portent sur diverses longues poutres en double T.

On trouve aussi, dans un ouvrage plus récent de M. Fairbairn, intitulé *De l'application de la fonte, du fer et de la tôle dans les constructions*, traduit en 1857 par E. Perret-Porta, et réuni en un même volume avec la traduction ci-dessus de M. Pirel, quelques expériences sur les poutres en T et à double T, et, aussi, sur les poutres en treillis; mais, surtout, un grand nombre de conseils et d'indications pour leur emploi dans des planchers, et la construction « d'entrepôts incombustibles. »

LXII. **Suite des expériences.** — Mais, en 1845, l'illustre ingénieur Stephenson, chargé de la construction du chemin de fer qui aujourd'hui longe la côte nord du pays de Galles en se prolongeant à travers l'île d'Anglesey jusqu'au port le plus rapproché de l'Irlande, s'étant décidé, afin de satisfaire aux exigences de l'amirauté, à construire sur de très-hautes culées, pour la traversée du détroit de Menai et pour celle de la baie de l'embouchure de la rivière de Conway, des ponts composés de poutres droites et creuses d'une grande portée, dans l'intérieur desquelles les trains pussent passer, pria M. Fairbairn d'entreprendre une suite d'expériences sur la force de la tôle, matière dont il se proposait de construire ces ponts *tubulaires*, d'un genre aussi hardi que nouveau.

Les expériences à ce sujet ont été publiées, ainsi que tout ce qui se rapporte à la construction de ces deux grands ponts, et aux incidents instructifs qui s'y sont passés, dans

un ouvrage de son collaborateur M. Edwin Clarke [1], qui a été traduit en partie par M. Yvert [2].

Les expériences consistèrent d'abord à soumettre à la rupture par flexion, au moyen d'un poids suspendu au milieu, divers tuyaux de tôle rivée, posés horizontalement sur deux appuis. On reconnut qu'une section elliptique posée de champ était préférable à une section circulaire, et qu'une section rectangulaire, plus haute que large, valait encore mieux. Et comme on aperçut que la rupture avait presque toujours lieu par l'écrasement ou plutôt le ploiement ou le *soulèvement* de la partie devenue concave, c'est-à-dire de la partie supérieure, sous l'effort de compression longitudinale qu'elle avait à supporter, on se décida à donner à cette partie supérieure une coupe transversale *cellulaire*, ou à la composer, dans un premier essai, de deux tuyaux ovoïdes, puis ensuite d'un plus grand nombre de tuyaux, à section rectangle et juxtaposés. On fit quelques expériences sur la résistance, à la compression longitudinale, d'un tuyau de cette forme rectangle; puis les expériences portèrent sur un modèle, au sixième, du grand tube projeté en tôle. Ce modèle avait environ 23 mètres de portée, et sa partie supérieure était, en coupe transversale, divisée en six cellules rectangles. Chaque fois qu'il a été rompu, ce qui a eu lieu désormais par déchirement de la partie inférieure, on le réparait en renforçant cette partie; on a reconnu aussi par expérience le rapport à donner aux forces respectives des deux parties. Puis, comme le pont devait être un grand ouvrage de chaudronnerie, on s'est livré à plusieurs séries d'expériences sur la résistance, à la traction, des tôles simples ou assemblées, et de leurs rivets d'assemblages, placés de diverses manières et unissant deux, trois, quatre feuilles, et sur la part

---

(1) *The Britannia and Conway tubular Bridge, with general Inquiries of Beams and on the Properties of material used in Construction.* London, 1850, published with the sanction and under the supervision of Robert Stephenson. 2 vol. in-8° and Atlas in-8°.

On peut consulter aussi : *On Account of the Construction of the Britannia and Conway Bridge*, by Stephenson.

(2) *Notice sur les ponts avec poutres tubulaires en tôle*, par L. Yvert, avec une introduction par E. Flachat, et un atlas très-détaillé.

d'influence du frottement mutuel des feuilles dans les résistances.

Dans les dernières expériences on mesura les flèches ou flexions prises sous diverses charges graduées.

La mise au levage des immenses tubes, la liaison ensemble des quatre de Menai, au-dessus de trois piles (dont l'une était fondée sur le rocher BRITANNIA qui se trouve à peu près au milieu du détroit), de manière à ne former qu'une seule poutre, donnèrent lieu à d'autres observations curieuses; et un accident, qui heureusement n'eut pas de suites fâcheuses, donna lieu à d'autres remarques sur les forts cylindres de presses hydrauliques et sur ce qu'il y a de mieux à observer en les fabriquant.

Mais une autre circonstance, vers le même temps et dans le même royaume, fut l'occasion d'expériences précises, plus nombreuses et plus variées, et de la réunion d'un grand nombre de documents et d'avis, résumant le savoir pratique de ses constructeurs les plus distingués. Un accident grave étant survenu, en 1847, par la rupture d'une poutre en fonte d'un pont de chemin de fer, une commission fut nommée par la Reine, le 27 août de cette même année, pour faire une enquête sur l'emploi du fer et de la fonte dans les constructions dépendant des chemins de fer, surtout dans les parties exposées à des secousses et à des vibrations. Le rapport de la commission, du 26 juillet 1849, a été imprimé avec des *Appendix* étendus contenant tout le détail des expériences, et les procès-verbaux de l'audition des personnes appelées à lui donner des renseignements, ainsi que les calculs qui ont été faits par M. Willis, de l'université de Cambridge, l'un des membres de la commission, secondé par M. Stokes, membre éminent du Collége de Pembroke de la même ville [1].

---

[1] *Report of the Commissionners appointed to inquire into the Application of Iron to Railways structures;* signé : lord Wrotesley, Willis, Henri James, Rennie, Cubbitt, Hodgkinson, Douglas Galton (lieutenant du génie, secrétaire), 1849.

Ce rapport, sans les appendices ni les planches, a été traduit par M. Busche, et inséré aux *Annales des ponts et chaussées*, 1851, 1er semestre, p. 193.

Les dépositions, quoique pas toujours concordantes, de divers constructeurs, ont paru cependant établir que les pièces de fer exposées à des vibrations se rompent souvent après un long usage et présentent alors une structure cristalline. C'est aussi l'état auquel le filetage amène souvent le fer fibreux, au moins dans la partie filetée, à cause de l'ébranlement qui accompagne toujours cette opération.

Les expériences sur les barres de fonte ont été de divers genres. Les unes ont été soumises jusqu'à 4,000 fois au *choc horizontal* d'un boulet suspendu au bout d'un fil comme un pendule; les autres jusqu'à 100,000 fois à la flexion intermittente produite par une came tournante; d'autres barres horizontales ont été heurtées *verticalement*. Elles ne se brisaient que lorsque la flexion, répétée ainsi un grand nombre de fois, excédait sensiblement le tiers de celle de rupture sous une charge statique.

D'autres barres ont été soumises à l'action lente et continue d'un poids presque égal à celui de rupture statique, promené d'un bout à l'autre alternativement en avant et en arrière jusqu'à 96000 mille fois.

Ces expériences ont confirmé divers résultats de la théorie; elles ont montré par exemple, que la flèche dynamique est à peu près proportionnelle à la vitesse d'impulsion (n^os L, LI, LVI); qu'il faut un choc de même force pour rompre une barre rectangulaire et même plate soit qu'on la frappe sur le plus grand côté ou sur le plus petit, et qu'une barre carrée de même *volume* rompt sous le même choc (*idem*); que des poids additionnels, également répartis sur une barre, de manière à augmenter la masse à mouvoir sans augmenter la résistance statique, la rendent capable de résister à des chocs plus forts (*idem*). Les flèches sont alors assez exactement représentées par la formule où l'on tient compte (*idem*) du partage de la vitesse entre la masse heurtante et la masse heurtée réduite aux 17/35 environ.

A Portsmouth, des chariots ont été abandonnés à leur poids au sommet de plans inclinés de manière à passer, avec diverses vitesses acquises, sur des barres faisant rails au bas : on mesurait les flèches dynamiques, etc.; et, comme nous avons déjà eu

occasion de le dire (n° LVII), on disposait, dans des expériences plus en petit, un appareil pour augmenter artificiellement à volonté l'inertie de la barre.

Deux expériences de charge voyageuse en grand ont été aussi exécutées en faisant passer rapidement une locomotive et son tender sur les ponts d'Ewel et de Godstone, et les flexions ou dépressions en divers points des poutres ont été observées au moyen de styles faisant leurs traces sur une planchette fixe, appuyée de part et d'autre sur les culées.

Enfin, des expériences d'effets statiques ont été faites avec précision et en grand pour connaître les allongements et les accourcissements de longues barres de fonte ou de fer tirées ou pressées longitudinalement. Les effets, passé une certaine grandeur, ont crû plus rapidement que les causes, en sorte que M. Hodgkinson, auteur de ces expériences, les représente en égalant la charge à une expression binôme dont le premier terme, positif, est proportionnel à la dilatation ou à la contraction, et le second, négatif, est proportionnel à son carré. M. Hodgkinson fait le coefficient du premier terme moindre d'un quatorzième dans la formule des pressions que dans la formule des tractions; mais les chiffres même fournis par les expériences prouvent pour le principe de l'égalité des extensions et des compressions produites par des charges égales suffisamment petites, surtout si l'on défalque les petits effets permanents, attribuables à un léger écrouissage.

Le même expérimentateur a fait à cette occasion de nouvelles expériences d'écrasement des prismes courts.

Des barres ont été aussi soumises, à Portsmouth, en grand nombre, à des flexions transversales statiques.

Les *Appendix* du même ouvrage reproduisent, en en faisant connaître de nouvelles, des résultats d'expériences précédemment exécutées; celles par exemple qui l'ont été sous la direction de M. Stephenson sur la résistance des poteaux creux en tôle; des détails nouveaux sur les ponts de Conway et de Menai (ou Britannia); celles de M. Fairbairn, etc. Parmi le grand nombre d'ingénieurs dont les interrogatoires détaillés figurent à l'enquête, plusieurs ont inséré des tableaux d'expériences qui

leur sont propres : ce sont MM. Barlow, Rastrick, Stephenson et Hosking, W. Fairbairn, Hawkskaw, Gooch, Moris Stirling : elles portent principalement sur des fontes et sur les divers mélanges qu'on en opère pour compenser mutuellement leurs défauts ou augmenter leurs qualités.

D'utiles et intelligents extraits ont été faits des résultats de ces diverses expériences par M. Love, dont l'écrit de 1852 (1), réédité avec des additions considérables en 1859, contient, avec quelques accusations non fondées contre la théorie, un grand nombre de vues utiles. La deuxième édition (2) relate un grand nombre d'expériences encore peu connues. Telles sont celles de M. Brottier, de M. Faure, de M. Houlbrat, sur la traction des fontes ; de MM. Ernest Gouin et Lavalley sur la tôle d'acier fondu, sur les fers spéciaux de la Moselle, etc. ; du même M. Lavalley sur des fontes de mélange, sur les tôles d'Imphy et de la Moselle, et sur le cisaillement des rivets ; de M. Tenbrink (chef des ateliers de Montigny-lès-Metz, chemin de fer de l'Est) sur l'allongement des barreaux du même métal, etc. ; de M. Delaporte sur les fontes de Mazières (Cher); de M. Lainé sur les fontes de Torteron (au bois et au coke) ; de M. Faure sur les fers dont on fait les boulons et les rivets, etc. Plusieurs des faits nouveaux cités par M. Love paraissent de nature à amener des économies notables dans les poids de métal à donner aux conduites d'eau et aux chaudières à vapeur.

Ces résultats divers se trouvent aussi résumés dans ce qu'ils ont de plus propre à éclairer la pratique, et discutés de manière à fournir les coefficients numériques de ses formules, dans les *Leçons sur la résistance des matériaux* de M. le général Morin, où l'on trouve aussi des expériences récentes et nombreuses de M. Fairbairn sur l'écrasement des tubes en tôle par pression

---

(1) *Mémoire sur la résistance du fer et de la fonte*, 1852, in-8°.

(2) *Des diverses résistances et autres propriétés de la fonte, du fer et de l'acier*, 1859, in-8°.

extérieure sur leur surface latérale; une expérience analogue faite à Montluçon; des expériences inédites de M. Pronier sur les bandages en fer et en acier, de M. Guettier sur des poutres en fonte à T, de MM. Hick sur la résistance au *découpage*; de M. Carillion et de la Société de l'Expansion de Mulhouse sur la torsion des cylindres de fonte. Mais la dernière édition [1] contient en outre les résultats d'un grand nombre d'expériences nouvelles faites par lui ou bien sous ses yeux au Conservatoire des Arts et Métiers, surtout par M. Tresca, sous-directeur, ancien élève de l'école polytechnique et de l'école des ponts et chaussées. Ces diverses expériences, comparables à celles des constructeurs quant à l'échelle, ou à la dimension des pièces sur lesquelles elles portent, le sont à celles des physiciens quant aux précautions dont elles sont entourées, et à la précision des résultats, obtenus avec des cathétomètres très-sensibles. Plusieurs ont eu pour objet, et ont aussi eu pour conséquences, de confirmer les formules de la théorie, attaquées par divers expérimentateurs, parmi lesquels se sont trouvés quelquefois des savants qui ne s'étaient pas suffisamment pénétrés de leur vrai sens. Ainsi, elles ont prouvé que les allongements et accourcissements permanents qui empêchaient M. Hodgkinson de souscrire au principe de proportionnalité des petits effets aux efforts, étaient extrêmement faibles, comparables aux changements de longueur produits par de petits changements de température, et attribuables d'ailleurs à des circonstances de l'opération, etc.; que la proportionnalité et les autres lois admises s'observaient aussi dans les flexions, etc. D'autres, dont nous parlons ailleurs (Appendice complémentaire, n° 78, p. 766), ont eu rapport aux poutres en fer à double T des planchers, et à leurs assemblages. D'autres ont été faites sur des barreaux de bronze, sur des rails de chemin de fer de diverses formes et provenances; d'autres l'ont été sur des fermes en fer et ont confirmé à peu près les formules établies comme nous avons dit au n° XLIX, p. ccx, ccxj. D'autres,

---

(1) *Cours de Mécanique pratique. Résistance des matériaux.* 3e édit., 2 vol.

en grand nombre, l'ont été sur l'acier et sur ses tôles, qui fixent de plus en plus l'attention depuis que la métallurgie est parvenue à les donner à un plus bas prix, etc.

Espérons que grâce à ces observations multipliées, faites dans un esprit à la fois scientifique et pratique, les points encore incertains pourront s'éclaircir, et que, la théorie ne restant point en arrière de l'expérience, mais, au contraire, fournissant des formules pour des problèmes qui se sont longtemps soustraits à ses calculs, on pourra un jour donner des règles et des chiffres plus sûrs et plus propres à faire remplir aux constructions la double condition de solidité et d'économie, surtout si des expériences prolongées, ou dans les résultats desquels le temps entre comme élément, permettent d'arriver à ces nombres et à ces *proportions de réduction* des résultats de rupture immédiate, que jusqu'à présent on ne fait presque que conjecturer. (*V.* n° XLIX.)

FIN DE L'HISTORIQUE.

RÉSUMÉ DES LEÇONS

DONNÉES

A L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

SUR

L'APPLICATION DE LA MÉCANIQUE

A L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS

ET DES MACHINES.

PREMIÈRE PARTIE.

CONTENANT LES LEÇONS SUR LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX ET SUR L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS.

PREMIÈRE SECTION.

De la résistance des corps solides.

---

1. Un corps solide oppose de la résistance à un effort qui tend à le fléchir ou à le rompre. En recherchant les lois auxquelles cette propriété est assujettie, on peut se proposer deux objets principaux : 1° étant donnés la figure d'un corps et les efforts qu'il doit supporter, reconnaître si ce corps doit fléchir (*), et de quelle quantité, ou s'il doit rompre; 2° déterminer la

---

(*) Dans l'acception générale que Navier donne ici au mot *fléchir*, on peut dire que le corps *fléchit* toujours; car, dans la nature, tout corps, quelle qu'en soit la rigidité, *cède* ou change un peu de figure sous tout effort, même minime.

figure d'un corps de manière qu'il présente sous le moindre volume la plus grande résistance possible à un effort donné.

Les corps paraissent être composés de parties ou molécules, maintenues à certaines distances les unes des autres par des forces opposées qui se font mutuellement équilibre. L'une de ces forces est une attraction propre aux molécules des corps; l'autre est une force de répulsion due au principe de la chaleur (*). Le jeu de ces forces d'attraction et de répulsion rend raison des principaux phénomènes qui ont lieu quand on entreprend de changer la figure d'un corps. C'est évidemment dans la considération des forces dont il s'agit qu'il faut chercher la solution directe des problèmes relatifs à la résistance des solides.

Les recherches générales, fondées sur ces notions, sont trop compliquées pour qu'on puisse les présenter dans un cours élémentaire. On se bornera à déduire des résultats simples et applicables, d'hypothèses dont la justesse ait été vérifiée par des comparaisons nombreuses avec les effets naturels (**).

(*) Ampère objecte (*Bibliot. univ. de Genève*, 1832, p. 225) que si toute répulsion était due *à la chaleur*, il faudrait renoncer à expliquer la chaleur par des vibrations, comme on explique si bien la lumière, car les vibrations supposent des actions répulsives. La répulsion mutuelle est une propriété probablement aussi primitive et inhérente aux molécules, si ce n'est plus, que l'attraction.

(**) § 1. *Recherches générales dont parle l'auteur.* — Ces recherches de mécanique dite *moléculaire*, dont la première idée lui appartient (1), se trouvent résumées d'une manière élémentaire dans les premières *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*, de M. Lamé, 1852, et aussi au commencement de deux mémoires que nous avons publiés, l'un sur la *Torsion des prismes* (1855, in-4°, ou Savants étrangers, t. XIV), l'autre sur leur *Flexion* (*Journal de mathématiques de M. Liouville*, 1856).

§ 2. *Hypothèses citées. Possibilité de s'en passer.* — Quant aux

(1) *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des solides élastiques*, lu à l'Académie le 14 mai 1821, t. VII (1827) des Mémoires de l'Institut.

(Du n° 1).

hypothèses auxquelles Navier fait aussi allusion, et qui consistent principalement à admettre que les sections transversales des prismes restent planes après la flexion, l'extension ou la torsion de ceux-ci, et que leurs *fibres* longitudinales résistent tout à fait indépendamment les unes des autres, elles ont été reconnues inexactes et conduisant à plusieurs résultats ou faux ou incomplets. Nous montrerons dans les notes qu'on peut s'en passer sans cesser de raisonner d'une manière élémentaire.

§ 3. *Principe des actions attractives et répulsives, fonctions continues des distances moléculaires.* — C'est uniquement sur ce principe que nous nous appuierons pour cela. Il consiste en ce que les actions mutuelles entre molécules, ou entre points matériels, dépendent de leurs distances; qu'elles en sont fonctions *continues*, en sorte que leurs variations très-petites sont proportionnelles aux variations des distances supposées très-petites aussi; et que ces actions, répulsives pour les distances les moindres, et indéfiniment croissantes à mesure que celles-ci diminuent (ce qui remplace l'*impénétrabilité* des anciens), changent de signe et deviennent attractives pour des distances plus grandes, en croissant d'abord avec ces distances, mais pour décroître bientôt en sorte qu'elles n'ont plus qu'une intensité relativement insensible dès que les distances deviennent perceptibles.

§ 4. *Premières conséquences. Élasticité.* — Il en résulte immédiatement que les molécules d'un corps solide se maintiennent naturellement les unes relativement aux autres dans un état d'équilibre stable; que lorsqu'une action extérieure les en dérange très-peu, le changement des distances fait naître des actions nouvelles qui s'opposent plus ou moins énergiquement à la continuation des déplacements commencés, et qui font revenir les molécules à leurs premières positions relatives lorsque la force extérieure a cessé d'agir; ce qui constitue le ressort ou l'*élasticité*.

§ 5. *Vibrations. Ébranlements. Effets de l'inertie.* — Lorsque le retour est prompt, il est aussitôt outre-passé en vertu des vitesses acquises, et c'est après plusieurs oscillations et l'extinction de ces vitesses par communication aux corps environnants que l'équilibre se

2. Nous considérerons, pour fixer les idées, un corps prismatique. Ce corps peut être soumis à divers efforts, parmi lesquels on distingue principalement :

1° Un effort dirigé dans le sens de la longueur du solide, de manière à le comprimer. Le solide peut céder en s'écrasant, ou bien en pliant et en se rompant, si la longueur est suffisamment grande par rapport aux dimensions de la section transversale.

2° Un effort dirigé dans le sens de la longueur du solide, de manière à l'étendre. Le corps peut céder en s'allongeant et en se rompant, par la séparation des parties dans une des sections transversales.

3° Un effort dirigé perpendiculairement à la longueur du corps. Le corps cède en pliant, de manière que les parties voisines de la face convexe sont étendues et les parties voisines de la face concave comprimées. La rupture a lieu si l'extension ou la compression est assez grande pour déterminer la séparation ou l'écrasement des parties.

---

rétablit. Toute action intermittente ou seulement variable engendre aussi des oscillations; tout choc ou ébranlement, en donnant de la vitesse à certains points du corps relativement à d'autres, produit des flexions ou autres déformations comme les efforts statiques ou pressions; ce qu'on exprime en mettant l'*inertie* au nombre des forces capables de déformer un système moléculaire.

§ 6. *Écrouissage. Énervation. Rupture.*—Si les écartements ou rapprochements moléculaires produits par l'action constante ou variable des forces ont été jusqu'à franchir les limites de stabilité des arrangements primitifs, le corps ne peut plus revenir de lui-même à son premier état, et les molécules prennent d'autres arrangements, *persistants* comme les premiers. Ces arrangements nouveaux sont d'abord ordinairement plus stables que les arrangements primitifs, ce qui constitue l'*écrouissage*. Mais si les efforts croissent, les arrangements deviennent moins stables, ce qui produit l'*énervation* qui est suivie finalement d'une désagrégation et d'une *rupture*. On y reviendra aux notes des n°s 3, 21, 113.

4° Un effort qui tend à tordre le corps (*).

ARTICLE PREMIER.

DE LA RÉSISTANCE DES CORPS A UN EFFORT QUI TEND A PRODUIRE L'ÉCRASEMENT.

3. Les notions que l'on peut présenter sur cette matière consistent principalement dans l'exposition des résultats des expériences faites sur divers corps. Les résultats suivants conviennent seulement aux corps dont la longueur est trop petite, par rapport aux dimensions de la section transversale, pour qu'ils puissent céder en pliant (**).

(*) On considère aujourd'hui (voyez notes des nos 152 à 155) une cinquième sorte d'effort, qui tend à faire *glisser* les parties les unes devant les autres. Ce *glissement* est à la torsion ce que l'extension est au *ploiement;* mais le glissement a quelquefois lieu sans torsion, par exemple dans le *cisaillement* d'une pièce solide sous l'action d'une force transversale s'exerçant parallèlement au plan où la séparation s'opère.

(**) § 1. *Théorie de l'écrasement ou de la rupture des prismes courts par compression.*— Les recherches faites depuis 1833 permettent d'en établir une qui peut être utile dans plusieurs circonstances. En général une théorie, si elle est judicieuse, sert tout au moins à combler les lacunes des expériences, qui ne peuvent jamais embrasser tous les cas.

Celle qu'on va donner est très-simple, puisqu'elle se réduit, comme on verra, à ramener en définitive la rupture par compression longitudinale à la rupture *par extension transversale*, supposée déjà étudiée expérimentalement (note du n° 21 ci-après). Mais nous devrons montrer d'abord comment cette extension est une suite nécessaire de la compression quand les faces latérales sont libres; indiquer déjà la méthode générale d'établissement des conditions de *non-rupture* ou de stabilité de la cohésion des solides, et

d'influence du frottement mutuel des feuilles dans les résistances.

Dans les dernières expériences on mesura les flèches ou flexions prises sous diverses charges graduées.

La mise au levage des immenses tubes, la liaison ensemble des quatre de Menai, au-dessus de trois piles (dont l'une était fondée sur le rocher BRITANNIA qui se trouve à peu près au milieu du détroit), de manière à ne former qu'une seule poutre, donnèrent lieu à d'autres observations curieuses; et un accident, qui heureusement n'eut pas de suites fâcheuses, donna lieu à d'autres remarques sur les forts cylindres de presses hydrauliques et sur ce qu'il y a de mieux à observer en les fabriquant.

Mais une autre circonstance, vers le même temps et dans le même royaume, fut l'occasion d'expériences précises, plus nombreuses et plus variées, et de la réunion d'un grand nombre de documents et d'avis, résumant le savoir pratique de ses constructeurs les plus distingués. Un accident grave étant survenu, en 1847, par la rupture d'une poutre en fonte d'un pont de chemin de fer, une commission fut nommée par la Reine, le 27 août de cette même année, pour faire une enquête sur l'emploi du fer et de la fonte dans les constructions dépendant des chemins de fer, surtout dans les parties exposées à des secousses et à des vibrations. Le rapport de la commission, du 26 juillet 1849, a été imprimé avec des *Appendix* étendus contenant tout le détail des expériences, et les procès-verbaux de l'audition des personnes appelées à lui donner des renseignements, ainsi que les calculs qui ont été faits par M. Willis, de l'université de Cambridge, l'un des membres de la commission, secondé par M. Stokes, membre éminent du Collége de Pembroke de la même ville [1].

---

[1] *Report of the Commissionners appointed to inquire into the Application of Iron to Railways structures;* signé : lord Wrotesley, Willis, Henri James, Rennie, Cubbitt, Hodgkinson, Douglas Galton (lieutenant du génie, secrétaire), 1849.

Ce rapport, sans les appendices ni les planches, a été traduit par M. Busche, et inséré aux *Annales des ponts et chaussées*, 1851, 1er semestre, p. 193.

Les dépositions, quoique pas toujours concordantes, de divers constructeurs, ont paru cependant établir que les pièces de fer exposées à des vibrations se rompent souvent après un long usage et présentent alors une structure cristalline. C'est aussi l'état auquel le filetage amène souvent le fer fibreux, au moins dans la partie filetée, à cause de l'ébranlement qui accompagne toujours cette opération.

Les expériences sur les barres de fonte ont été de divers genres. Les unes ont été soumises jusqu'à 4,000 fois au *choc horizontal* d'un boulet suspendu au bout d'un fil comme un pendule; les autres jusqu'à 100,000 fois à la flexion intermittente produite par une came tournante; d'autres barres horizontales ont été heurtées *verticalement*. Elles ne se brisaient que lorsque la flexion, répétée ainsi un grand nombre de fois, excédait sensiblement le tiers de celle de rupture sous une charge statique.

D'autres barres ont été soumises à l'action lente et continue d'un poids presque égal à celui de rupture statique, promené d'un bout à l'autre alternativement en avant et en arrière jusqu'à 96000 mille fois.

Ces expériences ont confirmé divers résultats de la théorie; elles ont montré par exemple, que la flèche dynamique est à peu près proportionnelle à la vitesse d'impulsion (nos L, LI, LVI); qu'il faut un choc de même force pour rompre une barre rectangulaire et même plate soit qu'on la frappe sur le plus grand côté ou sur le plus petit, et qu'une barre carrée de même *volume* rompt sous le même choc (*idem*); que des poids additionnels, également répartis sur une barre, de manière à augmenter la masse à mouvoir sans augmenter la résistance statique, la rendent capable de résister à des chocs plus forts (*idem*). Les flèches sont alors assez exactement représentées par la formule où l'on tient compte (*idem*) du partage de la vitesse entre la masse heurtante et la masse heurtée réduite aux 17/35 environ.

A Portsmouth, des chariots ont été abandonnés à leur poids au sommet de plans inclinés de manière à passer, avec diverses vitesses acquises, sur des barres faisant rails au bas : on mesurait les flèches dynamiques, etc.; et, comme nous avons déjà eu

occasion de le dire (n° LVII), on disposait, dans des expériences plus en petit, un appareil pour augmenter artificiellement à volonté l'inertie de la barre.

Deux expériences de charge voyageuse en grand ont été aussi exécutées en faisant passer rapidement une locomotive et son tender sur les ponts d'Ewel et de Godstone, et les flexions ou dépressions en divers points des poutres ont été observées au moyen de styles faisant leurs traces sur une planchette fixe, appuyée de part et d'autre sur les culées.

Enfin, des expériences d'effets statiques ont été faites avec précision et en grand pour connaître les allongements et les accourcissements de longues barres de fonte ou de fer tirées ou pressées longitudinalement. Les effets, passé une certaine grandeur, ont crû plus rapidement que les causes, en sorte que M. Hodgkinson, auteur de ces expériences, les représente en égalant la charge à une expression binôme dont le premier terme, positif, est proportionnel à la dilatation ou à la contraction, et le second, négatif, est proportionnel à son carré. M. Hodgkinson fait le coefficient du premier terme moindre d'un quatorzième dans la formule des pressions que dans la formule des tractions; mais les chiffres même fournis par les expériences prouvent pour le principe de l'égalité des extensions et des compressions produites par des charges égales suffisamment petites, surtout si l'on défalque les petits effets permanents, attribuables à un léger écrouissage.

Le même expérimentateur a fait à cette occasion de nouvelles expériences d'écrasement des prismes courts.

Des barres ont été aussi soumises, à Portsmouth, en grand nombre, à des flexions transversales statiques.

Les *Appendix* du même ouvrage reproduisent, en en faisant connaître de nouvelles, des résultats d'expériences précédemment exécutées; celles par exemple qui l'ont été sous la direction de M. Stephenson sur la résistance des poteaux creux en tôle; des détails nouveaux sur les ponts de Conway et de Menai (ou Britannia); celles de M. Fairbairn, etc. Parmi le grand nombre d'ingénieurs dont les interrogatoires détaillés figurent à l'enquête, plusieurs ont inséré des tableaux d'expériences qui

leur sont propres : ce sont MM. Barlow, Rastrick, Stephenson et Hosking, W. Fairbairn, Hawkskaw, Gooch, Moris Stirling : elles portent principalement sur des fontes et sur les divers mélanges qu'on en opère pour compenser mutuellement leurs défauts ou augmenter leurs qualités.

D'utiles et intelligents extraits ont été faits des résultats de ces diverses expériences par M. Love, dont l'écrit de 1852 (1), réédité avec des additions considérables en 1859, contient, avec quelques accusations non fondées contre la théorie, un grand nombre de vues utiles. La deuxième édition (2) relate un grand nombre d'expériences encore peu connues. Telles sont celles de M. Brottier, de M. Faure, de M. Houlbrat, sur la traction des fontes ; de MM. Ernest Gouin et Lavalley sur la tôle d'acier fondu, sur les fers spéciaux de la Moselle, etc. ; du même M. Lavalley sur des fontes de mélange, sur les tôles d'Imphy et de la Moselle, et sur le cisaillement des rivets ; de M. Tenbrink (chef des ateliers de Montigny-lès-Metz, chemin de fer de l'Est) sur l'allongement des barreaux du même métal, etc. ; de M. Delaporte sur les fontes de Mazières (Cher); de M. Lainé sur les fontes de Torteron (au bois et au coke) ; de M. Faure sur les fers dont on fait les boulons et les rivets, etc. Plusieurs des faits nouveaux cités par M. Love paraissent de nature à amener des économies notables dans les poids de métal à donner aux conduites d'eau et aux chaudières à vapeur.

Ces résultats divers se trouvent aussi résumés dans ce qu'ils ont de plus propre à éclairer la pratique, et discutés de manière à fournir les coefficients numériques de ses formules, dans les *Leçons sur la résistance des matériaux* de M. le général Morin, où l'on trouve aussi des expériences récentes et nombreuses de M. Fairbairn sur l'écrasement des tubes en tôle par pression

---

(1) *Mémoire sur la résistance du fer et de la fonte*, 1852, in-8°.

(2) *Des diverses résistances et autres propriétés de la fonte, du fer et de l'acier*, 1859, in-8°.

extérieure sur leur surface latérale; une expérience analogue faite à Montluçon; des expériences inédites de M. Pronier sur les bandages en fer et en acier, de M. Guettier sur des poutres en fonte à T, de MM. Hick sur la résistance au *découpage*; de M. Carillion et de la Société de l'Expansion de Mulhouse sur la torsion des cylindres de fonte. Mais la dernière édition [1] contient en outre les résultats d'un grand nombre d'expériences nouvelles faites par lui ou bien sous ses yeux au Conservatoire des Arts et Métiers, surtout par M. Tresca, sous-directeur, ancien élève de l'école polytechnique et de l'école des ponts et chaussées. Ces diverses expériences, comparables à celles des constructeurs quant à l'échelle, ou à la dimension des pièces sur lesquelles elles portent, le sont à celles des physiciens quant aux précautions dont elles sont entourées, et à la précision des résultats, obtenus avec des cathétomètres très-sensibles. Plusieurs ont eu pour objet, et ont aussi eu pour conséquences, de confirmer les formules de la théorie, attaquées par divers expérimentateurs, parmi lesquels se sont trouvés quelquefois des savants qui ne s'étaient pas suffisamment pénétrés de leur vrai sens. Ainsi, elles ont prouvé que les allongements et accourcissements permanents qui empêchaient M. Hodgkinson de souscrire au principe de proportionnalité des petits effets aux efforts, étaient extrêmement faibles, comparables aux changements de longueur produits par de petits changements de température, et attribuables d'ailleurs à des circonstances de l'opération, etc.; que la proportionnalité et les autres lois admises s'observaient aussi dans les flexions, etc. D'autres, dont nous parlons ailleurs (Appendice complémentaire, n° 78, p. 766), ont eu rapport aux poutres en fer à double T des planchers, et à leurs assemblages. D'autres ont été faites sur des barreaux de bronze, sur des rails de chemin de fer de diverses formes et provenances; d'autres l'ont été sur des fermes en fer et ont confirmé à peu près les formules établies comme nous avons dit au n° XLIX, p. ccx, ccxj. D'autres,

---

[1] *Cours de Mécanique pratique. Résistance des matériaux.* 3e édit., 2 vol.

en grand nombre, l'ont été sur l'acier et sur ses tôles, qui fixent de plus en plus l'attention depuis que la métallurgie est parvenue à les donner à un plus bas prix, etc.

Espérons que grâce à ces observations multipliées, faites dans un esprit à la fois scientifique et pratique, les points encore incertains pourront s'éclaircir, et que, la théorie ne restant point en arrière de l'expérience, mais, au contraire, fournissant des formules pour des problèmes qui se sont longtemps soustraits à ses calculs, on pourra un jour donner des règles et des chiffres plus sûrs et plus propres à faire remplir aux constructions la double condition de solidité et d'économie, surtout si des expériences prolongées, ou dans les résultats desquels le temps entre comme élément, permettent d'arriver à ces nombres et à ces *proportions de réduction* des résultats de rupture immédiate, que jusqu'à présent on ne fait presque que conjecturer. (V. n° XLIX.)

FIN DE L'HISTORIQUE.

RÉSUMÉ DES LEÇONS

DONNÉES

A L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

SUR

L'APPLICATION DE LA MÉCANIQUE

A L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS

ET DES MACHINES.

PREMIÈRE PARTIE.

CONTENANT LES LEÇONS SUR LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX ET SUR L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS.

PREMIÈRE SECTION.

De la résistance des corps solides.

---

1. Un corps solide oppose de la résistance à un effort qui tend à le fléchir ou à le rompre. En recherchant les lois auxquelles cette propriété est assujettie, on peut se proposer deux objets principaux : 1° étant donnés la figure d'un corps et les efforts qu'il doit supporter, reconnaître si ce corps doit fléchir (*), et de quelle quantité, ou s'il doit rompre; 2° déterminer la

---

(*) Dans l'acception générale que Navier donne ici au mot *fléchir*, on peut dire que le corps *fléchit* toujours; car, dans la nature, tout corps, quelle qu'en soit la rigidité, *cède* ou change un peu de figure sous tout effort, même minime.

figure d'un corps de manière qu'il présente sous le moindre volume la plus grande résistance possible à un effort donné.

Les corps paraissent être composés de parties ou molécules, maintenues à certaines distances les unes des autres par des forces opposées qui se font mutuellement équilibre. L'une de ces forces est une attraction propre aux molécules des corps; l'autre est une force de répulsion due au principe de la chaleur (*). Le jeu de ces forces d'attraction et de répulsion rend raison des principaux phénomènes qui ont lieu quand on entreprend de changer la figure d'un corps. C'est évidemment dans la considération des forces dont il s'agit qu'il faut chercher la solution directe des problèmes relatifs à la résistance des solides.

Les recherches générales, fondées sur ces notions, sont trop compliquées pour qu'on puisse les présenter dans un cours élémentaire. On se bornera à déduire des résultats simples et applicables, d'hypothèses dont la justesse ait été vérifiée par des comparaisons nombreuses avec les effets naturels (**).

(*) Ampère objecte (*Bibliot. univ. de Genève*, 1832, p. 225) que si toute répulsion était due *à la chaleur*, il faudrait renoncer à expliquer la chaleur par des vibrations, comme on explique si bien la lumière, car les vibrations supposent des actions répulsives. La répulsion mutuelle est une propriété probablement aussi primitive et inhérente aux molécules, si ce n'est plus, que l'attraction.

(**) § 1. *Recherches générales dont parle l'auteur.* — Ces recherches de mécanique dite *moléculaire*, dont la première idée lui appartient [1], se trouvent résumées d'une manière élémentaire dans les premières *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*, de M. Lamé, 1852, et aussi au commencement de deux mémoires que nous avons publiés, l'un sur la *Torsion des prismes* (1855, in-4°, ou Savants étrangers, t. XIV), l'autre sur leur *Flexion* (*Journal de mathématiques de M. Liouville*, 1856).

§ 2. *Hypothèses citées. Possibilité de s'en passer.* — Quant aux

[1] *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des solides élastiques*, lu à l'Académie le 14 mai 1821, t. VII (1827) des Mémoires de l'Institut.

(Du n° 1).

hypothèses auxquelles Navier fait aussi allusion, et qui consistent principalement à admettre que les sections transversales des prismes restent planes après la flexion, l'extension ou la torsion de ceux-ci, et que leurs *fibres* longitudinales résistent tout à fait indépendamment les unes des autres, elles ont été reconnues inexactes et conduisant à plusieurs résultats ou faux ou incomplets. Nous montrerons dans les notes qu'on peut s'en passer sans cesser de raisonner d'une manière élémentaire.

§ 3. *Principe des actions attractives et répulsives, fonctions continues des distances moléculaires.* — C'est uniquement sur ce principe que nous nous appuierons pour cela. Il consiste en ce que les actions mutuelles entre molécules, ou entre points matériels, dépendent de leurs distances; qu'elles en sont fonctions *continues*, en sorte que leurs variations très-petites sont proportionnelles aux variations des distances supposées très-petites aussi; et que ces actions, répulsives pour les distances les moindres, et indéfiniment croissantes à mesure que celles-ci diminuent (ce qui remplace l'*impénétrabilité* des anciens), changent de signe et deviennent attractives pour des distances plus grandes, en croissant d'abord avec ces distances, mais pour décroître bientôt en sorte qu'elles n'ont plus qu'une intensité relativement insensible dès que les distances deviennent perceptibles.

§ 4. *Premières conséquences. Élasticité.* — Il en résulte immédiatement que les molécules d'un corps solide se maintiennent naturellement les unes relativement aux autres dans un état d'équilibre stable; que lorsqu'une action extérieure les en dérange très-peu, le changement des distances fait naître des actions nouvelles qui s'opposent plus ou moins énergiquement à la continuation des déplacements commencés, et qui font revenir les molécules à leurs premières positions relatives lorsque la force extérieure a cessé d'agir; ce qui constitue le ressort ou l'*élasticité*.

§ 5. *Vibrations. Ébranlements. Effets de l'inertie.* — Lorsque le retour est prompt, il est aussitôt outre-passé en vertu des vitesses acquises, et c'est après plusieurs oscillations et l'extinction de ces vitesses par communication aux corps environnants que l'équilibre se

2. Nous considérerons, pour fixer les idées, un corps prismatique. Ce corps peut être soumis à divers efforts, parmi lesquels on distingue principalement :

1° Un effort dirigé dans le sens de la longueur du solide, de manière à le comprimer. Le solide peut céder en s'écrasant, ou bien en pliant et en se rompant, si la longueur est suffisamment grande par rapport aux dimensions de la section transversale.

2° Un effort dirigé dans le sens de la longueur du solide, de manière à l'étendre. Le corps peut céder en s'allongeant et en se rompant, par la séparation des parties dans une des sections transversales.

3° Un effort dirigé perpendiculairement à la longueur du corps. Le corps cède en pliant, de manière que les parties voisines de la face convexe sont étendues et les parties voisines de la face concave comprimées. La rupture a lieu si l'extension ou la compression est assez grande pour déterminer la séparation ou l'écrasement des parties.

---

rétablit. Toute action intermittente ou seulement variable engendre aussi des oscillations ; tout choc ou ébranlement, en donnant de la vitesse à certains points du corps relativement à d'autres, produit des flexions ou autres déformations comme les efforts statiques ou pressions ; ce qu'on exprime en mettant l'*inertie* au nombre des forces capables de déformer un système moléculaire.

§ 6. *Écrouissage. Énervation. Rupture.* — Si les écartements ou rapprochements moléculaires produits par l'action constante ou variable des forces ont été jusqu'à franchir les limites de stabilité des arrangements primitifs, le corps ne peut plus revenir de lui-même à son premier état, et les molécules prennent d'autres arrangements, *persistants* comme les premiers. Ces arrangements nouveaux sont d'abord ordinairement plus stables que les arrangements primitifs, ce qui constitue l'*écrouissage*. Mais si les efforts croissent, les arrangements deviennent moins stables, ce qui produit l'*énervation* qui est suivie finalement d'une désagrégation et d'une *rupture*. On y reviendra aux notes des n°s 3, 21, 113.

4° Un effort qui tend à tordre le corps (*).

ARTICLE PREMIER.

DE LA RÉSISTANCE DES CORPS A UN EFFORT QUI TEND A PRODUIRE L'ÉCRASEMENT.

3. Les notions que l'on peut présenter sur cette matière consistent principalement dans l'exposition des résultats des expériences faites sur divers corps. Les résultats suivants conviennent seulement aux corps dont la longueur est trop petite, par rapport aux dimensions de la section transversale, pour qu'ils puissent céder en pliant (**).

(*) On considère aujourd'hui (voyez notes des nos 152 à 155) une cinquième sorte d'effort, qui tend à faire *glisser* les parties les unes devant les autres. Ce *glissement* est à la torsion ce que l'extension est au *ploiement;* mais le glissement a quelquefois lieu sans torsion, par exemple dans le *cisaillement* d'une pièce solide sous l'action d'une force transversale s'exerçant parallèlement au plan où la séparation s'opère.

(**) § 1. *Théorie de l'écrasement ou de la rupture des prismes courts par compression.*— Les recherches faites depuis 1833 permettent d'en établir une qui peut être utile dans plusieurs circonstances. En général une théorie, si elle est judicieuse, sert tout au moins à combler les lacunes des expériences, qui ne peuvent jamais embrasser tous les cas.

Celle qu'on va donner est très-simple, puisqu'elle se réduit, comme on verra, à ramener en définitive la rupture par compression longitudinale à la rupture *par extension transversale*, supposée déjà étudiée expérimentalement (note du n° 21 ci-après). Mais nous devrons montrer d'abord comment cette extension est une suite nécessaire de la compression quand les faces latérales sont libres; indiquer déjà la méthode générale d'établissement des conditions de *non-rupture* ou de stabilité de la cohésion des solides, et

(Du n° 8).

anticiper un peu sur ce que nous aurons à dire plus tard de la rupture par glissement (aux notes des n°s 152 à 155), afin de discuter ici une théorie de Coulomb, admise encore par quelques ingénieurs, et par laquelle il a essayé de ramener l'écrasement à ce dernier genre de rupture.

§ 2. *La compression toute seule n'est pas une cause de désagrégation.* — Lorsqu'un corps est comprimé, on ne voit pas au premier abord comment il se fait que ses parties puissent être disjointes; et, ainsi que le fait remarquer M. le capitaine du génie Michon dans une excellente *Instruction sur la résistance des matériaux*, rédigée en partie sur des notes de M. Poncelet et lithographiée en 1848 à l'école de l'Artillerie et du Génie de Metz, « le rapprochement des molécules ne peut être une cause d'instabilité, et il est bien évident que *si un prisme était comprimé de toute part* avec une égale force il ne se romprait jamais. »

A l'appui de cette assertion du savant officier, on peut citer les effets de la machine si remarquable de M. Blanchard, de Boston, dont un modèle a figuré à Paris, à l'exposition universelle de 1855, et qui ploie en quart de cercle d'un petit rayon des pièces de bois d'un fort équarrissage, sans rien faire perdre de leur résistance, en empêchant de s'étendre longitudinalement les fibres du côté devenant convexe, et de se séparer transversalement les fibres fortement comprimées du côté devenant concave (*Moniteur* du 13 juin 1855, et rapport de M. Mangon aux *Annales des ponts et chaussées*, novembre et décembre 1856, p. 388).

Aussi, dès le commencement du siècle dernier, Muschenbroek avançait qu'un pilier serait capable de supporter tous les fardeaux *s'il ne se courbait pas* (1).

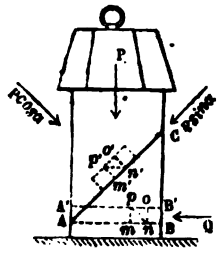
§ 3. *Essai de théorie de Coulomb.* — Coulomb a combattu cette assertion de Muschembroek dans ce qu'elle avait d'absolu (2), et tenté d'expliquer l'écrasement des massifs de maçonnerie (ci-après, 2e section, n° 197) et aussi celui des prismes solides trop

(1) *Essai de physique*, § 685, page 358 de la traduction française de Massuet.

(2) *Essai sur l'application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes relatifs à l'architecture.* Savants étrangers, 1773, volume publié en 1776.

(Du n° 3).

courts pour fléchir, en disant que leur partie supérieure peut glisser obliquement sur leur partie inférieure, ce qui est ramener la résistance à l'écrasement à cette *résistance à la rupture par glissement* transversal dont nous nous occuperons particulièrement plus loin (notes des n°s 152 à 155). Soit, par unité superficielle, T la grandeur de cette dernière résistance supposée déjà connue par des expériences spéciales et s'exerçant ici parallèlement à une face de séparation AC; et soit α l'angle inconnu de cette face avec la base ou la section droite $AB = \omega$ du prisme dont la tête est chargée d'un poids P. Comme l'aire de AC est $\frac{\omega}{\cos\alpha}$, et comme la composante de P suivant cette face inclinée est $P \sin\alpha$, Coulomb pose, pour l'instant de la rupture, l'équation $P \sin\alpha = T \frac{\omega}{\cos\alpha}$, d'où $P = \frac{2T\omega}{\sin 2\alpha}$, expression dont le minimum, répondant à α demi-droit, est $P = 2T\omega$. D'où l'illustre physicien-ingénieur concluait qu'une pression longitudinale P disjoindrait le prisme par glissement oblique si elle était seulement *double de la force* $Q = T\omega$ capable de le disjoindre suivant BA par glissement perpendiculaire à ses arêtes, ou de la *force capable de le rompre par extension*, car quelques expériences lui faisaient juger ces deux dernières forces à peu près égales. Et l'on aurait, aujourd'hui, seulement 1^fois,6 au lieu de 2 fois la force $R\omega$ rompant par extension en mettant pour T, dans $P = 2T\omega$, la valeur comparative plus approchée 0,8R qui lui sera assignée aux notes des n°s 152 à 155.



A l'appui de cette théorie ingénieuse on a cité quelquefois diverses expériences où des prismes soit de pierre, soit de fonte de fer, d'une hauteur comprise entre 1 et 3 fois la largeur, se sont partagés par la compression en pyramides ou en coins qui s'écartaient mutuellement en glissant l'un contre l'autre.

Mais les résultats qu'elle fournit sont beaucoup trop faibles, car les expériences sur l'écrasement de la fonte, par exemple, ont

(Du n° 3).

donné de 4 à 9 fois la force $R\omega$ qui rompt par extension, et non pas $1^{\text{fois}},6$.

On peut aujourd'hui reconnaître en quoi elle pèche, et en substituer une autre à la fois plus simple et plus proche des faits.

§ 4. *Cause générale assignable aux ruptures ou aux énervations. Dilatations, et limites à leur imposer.* — Disons d'abord ici, en général, que lorsque des forces appliquées à un corps et y produisant de petits écartements moléculaires viennent à le rompre, ou seulement à *énerver* sa contexture de manière à préparer une rupture prochaine ou éloignée, c'est (dernière note du n° 1) parce que les *dilatations* ou les *rapports des écartements aux distances primitives* entre molécules sont arrivés à excéder, dans un sens ou dans un autre, un certain taux qui est relatif au mode de contexture du corps dans ce sens (voyez le § 8 ci-après et le § 16 de la note du n° 113). C'est ce que l'on conçoit de suite lorsque les forces agissent par traction longitudinale sur un prisme ou un fil solide. On peut le concevoir encore facilement lorsqu'une force Q agit transversalement très-près d'une de ses sections droites, telle que BA (même figure), pour faire glisser devant elle une section B'A' très-voisine; car cette force change en losanges les petits carrés *mnop* ayant leurs côtés parallèles et perpendiculaires à sa direction, ce qui dilate nécessairement les diagonales *np;* et c'est à ces dilatations à 45 degrés qu'on doit attribuer la rupture par glissement sur BA lorsqu'elles viennent à excéder une certaine proportion, ou lorsque la force Q qui les produit vient à dépasser la valeur $T \times \omega$ pour laquelle cette proportion des dilatations obliques est atteinte.

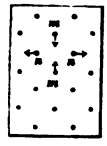
§ 5. *Effets contraires des deux composantes obliques du poids comprimant, et nécessité de renoncer au raisonnement du* § 3. — D'après cela, si la composante $P \sin\alpha$ du poids supérieur P *existait seule*, et agissait directement contre la face AC de rupture hypothétique, on comprend qu'il faudrait l'égaler, avec Coulomb, au produit $T \times AC = T \frac{\omega}{\cos\alpha}$ pour exprimer la condition de juste résistance à la rupture par glissement le long de cette face; cela reviendrait à imposer aux dilatations des diagonales *n'p'* de petits carrés

(Du n° 3).

$m'n'o'p'$, produites par un commencement de glissement, de ne pas dépasser la limite reconnue dangereuse. *Mais il y a, en outre, une composante* $P\cos\alpha$ perpendiculaire à AC, dont Coulomb ne tient pas compte; son action diminue (si même elle ne l'annule) la dilatation des petites lignes $n'p'$, due à la composante $P\sin\alpha$. On conçoit donc que le poids comprimant P ait besoin d'être beaucoup plus fort, pour amener une disjonction, que s'il était réduit à une de ses deux composantes comme dans le raisonnement du § 3.

Il convient donc d'abandonner la considération des glissements obliques, et d'imposer directement une limite aux dilatations qui peuvent accompagner la compression exercée par la force P tendant à écraser le prisme.

§ 6. *Dilatations ou contractions transversales qui accompagnent les contractions ou dilatations longitudinales des prismes lorsque leurs faces latérales sont libres.* — Ces effets transversaux résultent nécessairement du jeu des actions moléculaires répulsives et attractives, fonctions des distances, dont il a été parlé au n° 1 et à sa dernière note; car tout rapprochement de deux molécules m, m, situées sur une même parallèle aux arêtes du prisme, tend à écarter l'une de l'autre deux molécules telles que n, n, situées sur une même perpendiculaire, puisque, comme les distances de celles m à celles n diminuent, elles les repoussent plus ou les attirent moins ensuite qu'elles ne faisaient avant. Et si toutes se rapprochent longitudinalement, toutes aussi s'écarteront transversalement, en supposant que les faces latérales du prisme soient libres ou que rien ne les contienne ou ne les comprime elles-mêmes.



Il y a donc une *dilatation transversale* par suite de la *contraction longitudinale*, dont elle est une certaine fraction; fraction que nous supposerons moyennement égale à

$$1/4,$$

comme nous dirons au § 5 de la note du n° 21. De même toute dilatation longitudinale très-petite produira une contraction transversale, aussi d'*un quart* pour le même prisme.

(Du n° 8).

§ 7. *Condition théorique de la résistance à la rupture par compression, en supposant connue la résistance à la rupture par extension.* — Un prisme courra ainsi le danger de rompre par compression longitudinale lorsque sa *contraction*, ou le quotient, par sa longueur, de son accourcissement *supposé uniformément réparti d'un bout à l'autre* (voyez à cet égard la démonstration du § 3 de la note du n° 21), sera arrivé au quadruple de la dilatation reconnue dangereuse, ou sous laquelle il romprait par extension s'il est de même contexture longitudinalement et transversalement.

Donc, si les contractions et les dilatations ont un même rapport constant avec les charges qui les déterminent (même paragraphe de la note du n° 21), on voit qu'*un prisme d'égale contexture en tous sens, et dont les faces latérales sont libres, rompra par compression longitudinale*, ou éprouvera ce commencement de désagrégation qui amène la séparation et l'écrasement, *sous une charge quatre fois plus grande que celle qui le romprait par extension.*

§ 8. *Modifications à y apporter. Diminution des dilatations latérales par suite de ce que les bases pressées ne peuvent s'étendre. Influence possible de la dilatation ou contraction cubique ou de volume. Corps fibreux.*—Cette théorie fort simple, due à M. Michon, est ce qui a été proposé de plus satisfaisant sur la résistance à l'écrasement.

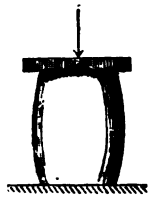
Un grand nombre d'expériences y sont favorables, car (voyez, après le n° 168, le complément de l'article I) les pierres *dures* et compactes se divisent en lames ou aiguilles verticales avant de se réduire en poussière par la compression; les fibres longitudinales des bois se désunissent, et les pièces de fonte très-courtes se gercent sur les bords de manière à prendre en s'aplatissant la forme d'une rosette; faits annonçant bien des séparations transversales, qui se manifestent aussi dans les pièces de fonte *fléchies*, puisqu'il s'en détache latéralement, comme on verra (complément de l'art. IV) une sorte de coin du côté concave qui est comprimé longitudinalement.

Les forces qui écrasent la fonte de fer et les mortiers ont été trouvées, il est vrai, moyennement 6 fois et demie et 8 ou 10 fois (au

(Du n° 8).

lieu de 4 fois) les forces qui produisent la rupture par extension.

Mais, outre que la constance du rapport entre la dilatation latérale et la contraction longitudinale ne subsiste, ainsi que la proportionnalité des accroissements ou allongements aux efforts, que pour des tractions ou pressions beaucoup au-dessous de celles qui font rompre (voyez § 8 de la note du n° 21 et § 3 de la note du n° 113), il faut remarquer, avec M. Michon, que lorsque le prisme est court et comprimé par l'intermédiaire de deux faces planes solides qui débordent ordinairement ses bases, le frottement empêche celles-ci de s'étendre, et, suivant l'observation déjà faite par M. Poncelet (1), cet empêchement diminue de proche en proche l'extension latérale du reste du prisme; en sorte que, malgré le bombement pris au milieu, la plus grande dilatation transversale ne saurait atteindre la même proportion que dans les prismes longs. Il y a lieu de penser même, avec M. Vicat (2), que la résistance d'une plaque mince à la rupture par compression, sous l'action d'une force bien également répartie sur sa surface, et sans porte-à-faux, serait bien plus grande encore, et en quelque sorte indéfinie; comme on voit par les grandes masses schisteuses.



Il est possible aussi que la limite à imposer aux dilatations longitudinales soit un peu plus petite que celle dans laquelle il faut renfermer les dilatations transversales, parce que les premières sont accompagnées d'une dilatation du volume ou d'une diminution de la densité, tandis que les secondes le sont d'une contraction de volume ou d'une augmentation de densité : on rapportera même, au § 16 de la note du n° 113, une expérience remarquable où un cylindre creux de fonte a subi à l'intérieur, sans se désagréger, une dilatation considérable dans le sens de circonférence, moyennant une forte compression éprouvée simultanément dans le sens du rayon.

(1) *Introduction à la Mécanique industrielle, physique ou expérimentale*, 1839, n° 240.

(2) *Recherches sur les phénomènes physiques qui précèdent et accompagnent la rupture ou l'affaissement d'une certaine classe de solides.* Annales des ponts et chaussées, 1833, 2e semestre, p. 204.

(Du n° 3).

D'un autre côté, dans les corps fibreux, tels que les bois, et généralement dans les corps dont la matière n'est pas d'égale contexture en tous sens, le rapport entre les dilatations transversales et les compressions longitudinales dont elles proviennent peut différer sensiblement de 1/4, sans toutefois excéder jamais 1/2 (voyez § 5 de la note du n° 21). De plus, le taux de la dilatation dangereuse ou susceptible d'amener une désagrégation peut être considérablement moindre dans un sens transversal ou perpendiculaire aux fibres que dans le sens des fibres ou de leur longueur. Il n'est donc pas étonnant que la résistance des bois à l'écrasement, ou à la disjonction latérale des fibres qui ensuite *fléchissent en détail*, soit souvent moindre que leur résistance à la rupture par extension, au lieu de surpasser celle-ci.

§ 9. *Observation des constructions éprouvées. Expériences directes d'écrasement pour établir des comparaisons. Distinction de la rupture immédiate ou prochaine et de la rupture éloignée. Usage de la théorie, au moins dans les règles de prudence qu'elle conseille.* — Aussi, pour déterminer la résistance des *prismes courts* (voyez 4e section, nos 383 à 411, pour la compression des autres) de matières quelconques à la rupture immédiate ou prochaine produite par une compression longitudinale, il est généralemeut préférable de partir d'expériences directes d'écrasement (voyez complément de l'article I) sur des échantillons de même matière ou de matières analogues, et aussi d'une forme à peu près pareille; car on verra que c'est seulement pour des solides semblables que les résistances à l'écrasement immédiat sont proportionnelles aux sections transversales.

Et, pour assigner leur résistance à une action indéfiniment prolongée d'une force comprimante P qui ne devra jamais aller jusqu'à *énerver* la matière (3e note du n° 1), et qui pour cela restera assez petite pour ne pas cesser d'être sensiblement proportionnelle aux contractions, ainsi qu'aux superficies ω des bases, quelle que soit leur forme (démonstration du § 3 de la note du n° 21), il faudra prendre

$$P = \quad \text{ou} \quad < R'_{\circ}\omega,$$

4 à 20 (*).

R'. étant un coefficient tiré, pour quelques matières, de l'observation de constructions déjà anciennes, unissant la hardiesse à la solidité (voyez article VII, et déjà les notes des n°s 21 et 113), en se servant des expériences d'écrasement immédiat, seulement pour établir des comparaisons d'autres matières avec celles-ci (voyez *idem*).

La théorie que nous venons de présenter, et qui déduit la résistance *permanente* à la compression des prismes courts de la résistance aussi permanente à l'extension, n'en est pas moins utile, non-seulement comme explication simple des faits, mais aussi comme fournissant, pour la pratique, une limite en deçà de laquelle il convient de se tenir, quand bien même des expériences d'écrasement auraient été faites et sembleraient indiquer d'aller au delà. En effet, comme nous venons de dire, ce n'est pas une rupture immédiate ou prochaine qu'il s'agit de prévenir en réglant les dimensions des solides à employer dans les constructions, c'est leur *rupture éloignée*, déterminée par une charge indéfiniment supportée et quelquefois intermittente, à laquelle viennent se joindre des vibrations et diverses autres causes de désagrégation (voyez § 12 de la note n° 21 et § 10 de la note du n° 113). Or, pour cela, la prudence ne prescrit pas moins d'imposer une limite fort resserrée aux dilatations latérales provenant de la compression qu'aux dilatations longitudinales provenant de l'extension, et il y aurait inconséquence à modérer les unes sans songer aux autres. Cette observation trouvera son application, surtout (note du n° 120) pour la flexion des pièces de fonte dites en T simple ou double, qui se dilatent d'un côté et se contractent de l'autre.

(*) On renvoie plus loin ces numéros de 4 à 20, contenant des résultats d'expériences auxquels on joindra ceux, fort nombreux, qui ont été obtenus depuis 1833, tant pour la rupture par écrasement que pour les petites *compressions sans rupture* (voyez, après le n° 168, le complément des articles I à VI).

De cette manière, la suite des raisonnements de la *partie théorique*, dont nous nous occupons ici, ne sera pas interrompue, et

ARTICLE II.

DE LA RÉSISTANCE DES CORPS A UN EFFORT DIRIGÉ DANS LE SENS DE LA LONGUEUR, QUI TEND A PRODUIRE L'EXTENSION ET LA RUPTURE.

21. En considérant un corps tiré dans le sens de la longueur, on peut se demander de connaître deux choses : 1° la quantité dont ce corps s'allongera pour un effort donné; 2° l'effort nécessaire pour séparer les parties et opérer la rupture. Il existe peu d'expériences directes, faites dans la vue de déterminer la quantité dont un corps s'allonge sous un effort donné; mais, comme on le verra dans la suite, cette détermination peut être conclue des expériences faites sur la flexion. La résistance à la rupture des corps tirés dans le sens de la longueur est l'objet dont on s'est le plus occupé, et le seul dont il s'agira dans cet article. Les notions que nous présenterons sur ce sujet se bornent encore ici à l'exposition des résultats obtenus par l'expérience (*).

---

les tableaux d'expériences propres à fixer les valeurs numériques des coefficients des formules seront présentés immédiatement avant l'article VII, où Navier propose les nombres à adopter pour ces coefficients, et les règles pratiques qui en découlent.

(*) § 1. *Résultats généraux des expériences.* — Elles ont appris que les efforts capables de rompre les prismes par traction sont sensiblement proportionnels aux superficies de leurs sections transversales pour même matière.

Elles ont aussi montré (car il en a été fait beaucoup depuis 1833, sur les allongements ou accourcissements sans rupture) que les dilatations extrêmement faibles, ou les allongements très-petits par unité de longueur des prismes, sont constants d'un bout à l'autre et proportionnels aux forces de traction par unité superficielle des sections; qu'une même force, appliquée successivement comme traction et comme pression, produit le même changement de longueur, pourvu toujours qu'il soit fort petit; enfin que toute dila-

(Du n° 21).

tation longitudinale est accompagnée de contractions latérales d'une proportion moindre, ce qui est analogue à ce que nous avons vu pour les contractions longitudinales au § 6 de la note du n° 3.

Pour nous préparer surtout à reconnaître rationnellement une loi analogue dans un cas plus composé (celui de la flexion), et à préciser la condition sous laquelle elle est tout à fait exacte, nous allons montrer comment on peut déduire théoriquement celle-ci du seul principe (dernière note du n° 1) des actions attractives et répulsives fonctions *continues* des distances entre molécules très-proches.

§ 2. *Proportionnalité des efforts aux effets très-petits, obtenus également dans deux sens opposés. Théorème de superposition ou de composition géométrique correspondante des forces et des petits déplacements qu'elles engendrent.*— Considérons pour cela qu'il résulte d'abord, de cette *continuité* des fonctions, que lorsqu'on augmente très-peu les distances, les molécules exercent les unes sur les autres, en sus de leurs actions primitives se faisant équilibre sur chacune, des actions nouvelles *proportionnelles à ces petites augmentations*, et que d'égales diminutions des distances développent des actions égales, mais de sens opposé. Comme les forces extérieures, dont l'application a modifié les distances, font équilibre aux résultantes des actions intérieures ainsi développées, il est facile de conclure immédiatement :

1° Que les dilatations, flexions, torsions très-petites, par lesquelles se manifestent les changements des distances, sont proportionnelles aux forces extérieures qui les amènent ;

2° Que des forces extérieures qui ne diffèrent que par le sens de l'action amènent des modifications égales et opposées, comme par exemple des contractions au lieu de dilatations de même grandeur ;

3° Que si des déplacements très-petits sont *résultants* géométriques de plusieurs autres, ou ont, sur les lignes de jonction des molécules, des projections sommes algébriques des projections de ceux-ci, ils développent des actions intérieures dont chacune est aussi somme algébrique de celles que développeraient les déplacements composants, puisque ces projections donnent les petits chan-

(Du n° 21).

gements de longueur dont dépendent les actions développées. Par suite, réciproquement, *les petits déplacements dus à diverses forces extérieures se* superposent, *ou se composent géométriquement ensemble lorsque ces forces s'exercent simultanément sur un corps.*

§ 3. *Démonstration de la proportionnalité des forces de traction longitudinale aux superficies des bases des prismes ainsi qu'aux dilatations, et de l'égalité de celles-ci dans toute l'étendue du prisme quand les forces sont appliquées et également réparties sur les bases. Contractions transversales aussi égales partout dans chaque sens.*—Soit maintenant un corps prismatique. Partageons-le en *fibres* très-minces et égales par deux systèmes de plans orthogonaux parallèles à ses arêtes, puis ces fibres en éléments parallélipipèdes par des plans transversaux équidistants. Si l'on étend tous ces éléments dans le sens longitudinal AB, les molécules m, m de chacun d'eux s'éloigneront de celles m', m' des éléments qui les touchent par leurs bases, ce qui, en augmentant les attractions et diminuant les répulsions, engendrera des actions attractives totales d'un élément sur l'autre à travers ces bases. Les molécules m, m s'éloigneront aussi, *mais moins*, de celles n, n des éléments latéralement contigus, ce qui développera à travers les faces latérales des actions résultantes aussi attractives, mais moindres. D'où il suit immédiatement que pour que les éléments dilatés longitudinalement n'exercent transversalement l'un sur l'autre aucune action, *il faut que leurs dimensions transversales se contractent, mais moins que leur longueur n'a été dilatée.*

Ceci établi, supposons que tous les éléments aient éprouvé ainsi la même déformation ou les mêmes altérations de dimensions, dans des proportions telles que leurs actions les unes sur les autres soient nulles à travers leurs faces latérales, tandis qu'à travers leurs bases les actions mutuelles résultantes, dirigées longitudinalement, soient mesurées par les superficies très-petites de ces bases multipliées par une constante p. L'ensemble sera en équilibre si, les faces latérales du prisme n'éprouvant aucune action extérieure, ses deux bases extrêmes sont soumises à des tractions

opposées $p\omega$, également réparties sur les divers éléments de leurs superficies ω.

Or un système de points matériels ne peut se comporter que d'une seule manière sous l'action de forces qu'on y applique; et le problème de ses petits déplacements est tout à fait déterminé lorsque ces forces sont données. Donc, réciproquement, *tout prisme homogène dont les faces latérales sont libres et dont les bases sont tirées, en sens opposé, par des forces normales, égales et également réparties sur leurs superficies, éprouvera, dans toutes ses fibres et dans toutes les parties de chacune d'elles, des dilatations égales*, et en même temps des contractions transversales moindres et dans un rapport déterminé avec les dilatations longitudinales. Et ces dilatations seront proportionnelles aux forces par unité des bases, *même lorsqu'elles changeront de signe et deviendront des contractions*, sous l'action de forces pressant les bases au lieu de les tirer.

§ 4. *Expression de cette loi.* — Il en résulte que si :

ω est l'aire de la section ou base de prisme;

L sa longueur;

l l'augmentation *positive* ou *négative* que cette longueur a subie;

$i = \frac{l}{L}$ l'allongement proportionnel supposé très-petit, que nous avons aussi appelé la *dilatation* positive ou négative ($-i$ étant ce qu'on appelle aussi la *contraction*);

P la force qui aura produit l'extension l (ou la compression $-l$), et qui est supposée appliquée longitudinalement et uniformément répartie sur chacune des deux bases;

E, η, η' des coefficients qui dépendent de la matière du prisme et de sa contexture en divers sens;

L'allongement l sera proportionnel à la longueur L et à l'effort $\frac{P}{\omega}$ par unité superficielle de la section ω, ce qui s'exprime par l'égalité

$$P = E\omega \frac{l}{L} = E\omega i, \quad \text{d'où} \quad i = \frac{P}{E\omega}.$$

Et les contractions latérales, aussi positives ou négatives, pourront être représentées, dans deux sens transversaux rectangulaires, par

(Du n° 21).

$$\eta i, \eta' i \quad \text{ou} \quad \eta \frac{P}{E\omega}, \quad \eta' \frac{P}{E\omega}.$$

§ 5. *Coefficient ou module d'élasticité* E. *Rapports* η, η' *des contractions latérales aux dilatations longitudinales.*—La constante E, rapport de l'effort $\frac{P}{\omega}$ exercé sur l'unité de surface des bases du prisme, à l'allongement ou raccourcissement $i = \frac{l}{L}$ par unité de longueur, est ce qu'on appelle le *Coefficient ou Module d'élasticité* d'extension de la matière du prisme, pour la direction où elle se trouve sollicitée [1]. On en verra, au n° 77, une autre définition qui y est équivalente. Son unité est le quotient d'une force (soit le kilogramme) par une surface (soit le mètre carré, et quelquefois le centimètre ou le millimètre carré).

Quant aux deux constantes η, η', qui sont des fractions purement numériques, elles sont égales entre elles quand la contexture de la matière est la même dans tous les sens *transversaux*, comme il arrive ordinairement, par exemple, dans les barres métalliques rondes. Nous donnerons aux notes des n°s 152 et 153 les considérations théoriques qui ont porté à adopter

$$\eta = 1/4$$

quand cette contexture est égale dans tous les sens, même le sens longitudinal ou les sens obliques. Des expériences de M. Wertheim ont donné à peu près 1/3, mais pour des tiges de métal qui pouvaient ne pas remplir tout à fait cette condition d'égalité. En tous cas, et quelle que soit la contexture, ces coefficients η, η' ne sauraient atteindre 1/2; on peut remarquer déjà ici que le volume

[1] Thomas Young, qui a, le premier, considéré le module d'élasticité (*A course of Lectures on natural Philosophy and the Mechanical arts*, London, 1807, vol. I, p. 137, et vol. II, p. 46, art. 349), le définit : « Une colonne ayant un poids qui soit au poids capable de donner une certaine compression à un prisme de même matière et de même base (prise pour unité) comme la longueur de ce dernier prisme est à la diminution de sa longueur. »

La *hauteur du module* revient évidemment, d'après cela, au quotient de notre coefficient E par le poids de l'unité de volume de la matière; quotient qui varie bien moins que le nombre E, car celui-ci, pour diverses variétés d'une même matière, augmente avec la densité.

(Du n° 21).

ancien est au volume nouveau du prisme dilaté longitudinalement dans la proportion i, comme 1 est à $(1+i)(1-\eta i)(1-\eta' i) = 1 + (1-\eta-\eta')i$ à peu près, en sorte que si l'on avait η et η' supérieurs à 1/2, une traction longitudinale diminuerait le volume, ce qui n'est pas supposable.

§ 6. *Conditions de la parfaite exactitude de la formule de l'extension. Observations sur le mode d'application et de répartition des actions longitudinales exercées.* — La démonstration précédente (§ 3) de la formule fondamentale $i = \frac{P}{E\omega}$ de l'extension des prismes exige que les forces P s'exercent *sur leurs bases même*, qu'elles y soient également réparties et qu'elles y agissent normalement partout. *C'est qu'en effet elle n'est tout à fait exacte qu'à ces conditions.* L'analyse n'a encore pu déterminer jusqu'à quel degré la formule est approchée lorsqu'elles ne sont pas remplies.

Mais des faits nombreux prouvent que la manière dont des forces sont appliquées et distribuées à chaque extrémité de prismes d'une certaine longueur n'influe que dans une étendue fort petite sur leur extension, ou sur leur flexion ou leur torsion, qui ne dépendent, ainsi, dans tout le reste des solides, que des résultantes et des moments résultants de ces mêmes forces. Des expériences spéciales prouvent même que les forces qui sont en équilibre sur de petites portions des corps, et dont l'addition peut ramener les uns aux autres les systèmes ayant même résultante et même moment, ne produisent pas d'impressions sensibles au delà de ces petites portions. Les formules ci-dessus peuvent donc servir avec toute l'approximation désirable pour la pratique, quel que soit le mode d'application et de distribution des forces de traction, par exemple lorsqu'elles agissent, comme à l'ordinaire, latéralement auprès des extrémités, *pourvu que leur résultante soit parallèle aux arêtes et passe bien par le centre de gravité de chaque base;* car, autrement, il y aurait un couple et une petite flexion qu'on apprendra à calculer à la section IV, n° 409.

Cette démonstration s'étend, au reste, au cas où la matière homogène du prisme offrirait, en chaque point, une contexture non

symétrique par rapport aux plans de sa division en éléments rectangles (comme lorsqu'elle a, par exemple, des clivages obliques aux arêtes), car on pourra toujours, en supposant leurs angles légèrement altérés en même temps que leurs dimensions, faire en sorte que les faces latérales ne supportent rien et que les bases soient sollicitées longitudinalement ou parallèlement aux arêtes de ces parallélipipèdes devenus légèrement obliquangles.

§ 7. *Cas où la matière n'est pas de même nature dans l'étendue d'une même section. Conditions pour que les formules s'y appliquent en faisant simplement varier* E. — Quand la matière du prisme varie de nature d'une fibre à l'autre, M. l'ingénieur Bresse, professeur à l'École des ponts et chaussées, pose [1], au lieu de $P = i.E\omega$, une équation

$$P = i\int E d\omega,$$

l'intégrale étant prise pour tous les éléments $d\omega$ de la section ω. La démonstration précédente peut facilement s'étendre à ce cas; mais les E ne peuvent représenter, dans cette équation, les *coefficients d'élasticité d'extension* (§ 5) des diverses fibres supposées extraites de la masse et étendues séparément, qu'autant que les fractions que nous avons appelées η et η' soient les mêmes pour toutes; car si ces fibres, isolées et dilatées toutes également, se contractent inégalement dans le sens latéral, elles ne peuvent pas rester contiguës. Il faut aussi, pour que l'équation $P = i\int E d\omega$ ait lieu exactement, que les tractions P soient distribuées sur les éléments $d\omega$ des bases, non pas également, mais proportionnellement aux nombres E relatifs à chacun.

Il résulte des expériences de la commission anglaise d'enquête sur l'emploi du fer et de la fonte [2], et aussi des observations et essais faits en France par MM. les ingénieurs Collet-Meygret et Des-

[1] *Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes*, 1854, chap. I.

[2] *Report of the Commissioners appointed to inquire into the application of iron to Railway structures*. London, 1849. Une traduction française du *Rapport*, faite par M. l'inspecteur général Busche, sans les Appendices qui contiennent le détail des expériences (voyez ci-après le *Complément* des articles I à VI), a paru aux *Annales des ponts et chaussées*, 1854, 1er semestre, p. 193.

(Du n° 21).

places [1] que, pour les métaux coulés ou laminés, c'est tout auprès des faces latérales que la contexture varie d'une manière notable [2]. Il convient donc, pour ces sortes de matériaux, de réduire l'équation précédente à :

$$P = i\,(E_0\omega + e\chi)$$

χ étant le périmètre de la section supposée diminuée d'un à deux millimètres tout autour, afin de représenter le développement moyen de la croûte douée généralement de plus de roideur et de nerf que le reste; et E_0 et e étant deux coefficients à déterminer par les méthodes connues de compensations d'anomalies (voyez ci-après § 7 de la note du n° 80 et § 15 de la note 113) en faisant des expériences d'extension sur des barres ayant des grosseurs ou des formes sensiblement différentes. Cette formule pourra évaluer utilement l'effet des tractions de barres ayant des formes ou des dimensions intermédiaires.

§ 8. *Dilatations qui ne sont pas très-petites. Déformations permanentes. L'élasticité subsiste malgré ces déformations.* — Lorsque les dilatations i dépassent une certaine proportion généralement fort petite, les considérations théoriques précédentes cessent de s'appliquer exactement; car ces dilatations ne sont plus proportionnelles aux efforts. Elles croissent en général dans un rapport plus grand que ceux-ci (voy. les expériences au Complément des art. I à VI), parce qu'ordinairement les molécules prennent entre elles de nouveaux arrangements stables (fin de la dernière note du n° 1). En sorte que les dilatations ont, avec la partie *élastique* ou *temporaire*, une partie *persistante* ou *permanente*, qui croît bien plus rapidement que la charge.

(1) *Rapport sur les épreuves du viaduc de Tarascon*, aux *Annales des ponts et chaussées*, 1854, 1er semestre, pages 329 et 340-341).

(2) Cela se déduit également de diverses expériences antérieures de M. Eaton Hodgkinson sur les résistances comparées de barres de fonte de diverses grosseurs, nonobstant le résultat non confirmatif qu'a donné une expérience spéciale, mais unique (voyez pages 75-76 de la traduction libre, faite par M. l'ingénieur Pirel, et insérée aux *Annales des ponts et chaussées*, 1855, 1er semestre, des *Recherches expérimentales sur la résistance et les autres propriétés de la fonte de fer*, par M. Hodgkinson, 1846).

(Du n° 21).

M. Tredgold et d'autres auteurs disent que le corps a éprouvé alors une *perte d'élasticité*, ou que cette propriété a été amoindrie, *altérée*, en partie détruite. Il est bien vrai que le corps ne reprend pas tout à fait la même force de ressort en repassant par les mêmes longueurs [1]. Mais, malgré cela, il est de fait que *son élasticité subsiste entière*, il y a eu seulement *changement du point à partir duquel ses effets doivent être comptés*, et, en même temps, augmentation légère de son coefficient E; car le corps revient à sa nouvelle forme lorsque d'autres efforts l'en ont dérangé dans certaines limites. M. de Gertsner a même observé sur des fils de fer que, dans ces limites, il y a proportionnalité des effets aux efforts; ce qui a été reconnu aussi pour l'allongement des tringles de bois [2]. Déjà Coulomb l'avait remarqué pour la torsion des fils métalliques et la flexion des lames [3]. Nous dirons donc simplement qu'alors *la contexture a été modifiée*.

§ 9. *Caractères de l'écrouissage et de l'énervation. Cause présumable de celle-ci. Rupture finale par traction ou extension.* — Lorsque les allongements cessent de s'accroître sous l'action continue et prolongée de la même charge, en sorte qu'il faille ensuite des efforts plus considérables pour produire, *dans le même sens*, des modifications permanentes nouvelles, le nouvel état moléculaire doit être regardé comme plus stable que le premier, et l'on peut dire (d'après ce qu'on a vu à la fin de la note du n° 1) que le corps a été *écroui dans ce sens*. Mais lorsque les allongements continuent de s'opérer, même sous une charge moindre, l'état est devenu moins stable, et le corps a été *énervé* ou sa cohésion a diminué.

L'énervation tient, probablement, à une désagrégation partielle et latente, ou à une multitude de disjonctions intérieures et non apparentes qui ouvrent des pores et diminuent la superficie de la section résistante réelle.

(1) M. Poncelet, *Introduction à la Mécanique industrielle*, art. 17, p. 13.

(2) Mémoire de MM. Chevandier et Wertheim *Sur les propriétés mécaniques des bois* (4e partie, p. 43). Ces habiles expérimentateurs citent (1re partie, p. 11-12) des travaux de MM. Pacinotti et Peri, qui ont donné la même loi de proportionnalité en défalquant les parties permanentes des allongements (*Ann. de chimie et de physique*, 1848).

(3) *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1784, p. 229.

(Du n° 21).

Si, lorsqu'elle est commencée, les mêmes forces extérieures continuent d'agir, elles finiront par amener une rupture apparente et totale, qui est précédée de déformations permanentes, tantôt considérables comme dans les corps très-ductibles, tantôt à peine sensibles (mais jamais nulles) comme dans les corps rigides et *aigres*.

§ 10. *Les déformations persistantes n'accompagnent pas toujours les déformations élastiques ou temporaires.* — A l'opinion abandonnée que toute déformation permanente dénote une énervation et équivaut à un commencement de rupture (1) a succédé depuis peu une opinion tout opposée (2), consistant à penser que toute dilatation ou contraction, quelque petite qu'elle soit, a une partie persistante. Je suppose un instant (quoique rien ne le prouve) que cela soit vrai de tous les corps dans l'état où ils se trouvent naturellement après leur solidification ; toujours est-il que ces effets permanents de petits efforts extérieurs n'ont plus lieu *lorsqu'on on en a exercé pendant quelque temps dans le même sens*, ou, si l'on veut, lorsque la matière a été écrouie dans ce sens. M. Poncelet cite judicieusement à l'appui, avec quelques expériences spéciales, l'exemple des constructions anciennes qui supportent une même charge depuis des siècles et qui restent cependant dans le même état (3) ; à quoi l'on pourrait ajouter l'exemple non moins évident des roches et autres masses minérales grandes ou petites, qui finiraient par s'affaisser sous leur propre poids, et par prendre un même niveau comme un fluide, indépendamment de toute dégradation de leur surface, si l'action continuée de toute force devait changer indéfiniment l'arrangement intérieur de leurs parties.

§ 11. *Le calcul théorique est toujours applicable pour limiter*

(1) Young ne dirait probablement plus aujourd'hui « une altération permanente de forme limite la force des matériaux, en ce qui a rapport à leur emploi dans la pratique, presque autant que la fracture, puisque la force qui est capable de produire cet effet est en général suffisante, avec une légère addition, pour l'accroître jusqu'au point où la fracture arrivera. » (*Lectures of natural Philosophy*, London, 1807, vol. I, *On passive Strength*, p. 141).

(2) Surtout depuis les expériences de M. Hodgkinson sur la fonte, et les expériences de MM. Wertheim et Chevandier sur les bois (citées ci-dessus), ainsi que sur les métaux, le verre, etc. (*Ann. de chim. et de phys.*, 1843 à 1846).

(3) *Introduction à la Mécanique industrielle*, n° 251, p. 297-298.

(Du n° 21).

les dilatations et établir les conditions de résistance à la rupture éloignée. — Quoi qu'il en soit, quand les déformations sont très-faibles, les parties persistantes sont négligeables devant les parties *élastiques* ou non persistantes, en sorte que la théorie de l'élasticité, dont ce qui précède est comme un premier chapitre, est applicable, avec toute l'approximation désirable, à la détermination des plus grandes dilatations, dans les limites que la prudence conseille d'y imposer.

Cette observation trouvera son application dans toute la suite du livre, pour l'établissement des conditions de stabilité de la cohésion, ou de résistance des matériaux à la *rupture éloignée.*

§ 12. *Condition de la résistance à la rupture par extension, immédiate ou éloignée. Expériences désirables du point qui sépare l'écrouissage de l'énervation pour diverses matières. Circonstances accidentelles auxquelles on fait une part en bloc. Double effet des vibrations ou des intermittences d'action.* — Dans le cas simple que nous considérons ici, la condition de résistance est exprimée, si l'on veut seulement prévenir la rupture immédiate ou prochaine, comme dans le cas d'une construction temporaire et bien surveillée, telle qu'un échafaudage, par (§ 1) :

$$P = \text{ou} < R\omega$$

où ω est la section du prisme, P la traction longitudinale résultant de forces dirigées suivant l'axe ou passant par les centres de gravité des sections, comme on a dit (§ 6), et où le coefficient R sera fourni par les expériences où cette rupture aura été opérée, en se tenant un peu au-dessous.

Mais si l'on veut prévenir même la *rupture éloignée* (fin du § 9 de la note du n° 3) d'une construction destinée à durer indéfiniment, la condition sera

$$P = \text{ou} < R_0\omega, \text{ ou } P = \text{ou} < E\omega i';$$

dans laquelle le coefficient R_0, beaucoup moindre que R, ou bien la petite dilatation $i' = \frac{R_0}{E}$, limite de celles qui n'offrent aucun danger, même après un temps considérable, devrait se déterminer par des

(Du n° 21).

expériences d'une longue durée, faites non pas sur le point où l'élasticité est, comme on dit, altérée (§ 8 et 10), et où il y a des allongements permanents, mais sur le point où la matière cesse de s'écrouir et commence à s'énerver, ce qui se manifeste (§ 9) par la marche des allongements persistants.

Et il conviendra, même si ces expériences désirables et difficiles sont faites, de rester encore bien en deçà de leur résultat (voyez art. VII, et, déjà au § 11 de la note 113 relative à la rupture par flexion), afin de faire largement une part en bloc aux causes accidentelles de désagrégation, telles que les ébranlements non calculables, les altérations physiques et chimiques, les différences de qualité, les défauts cachés, ainsi que les porte-à-faux et autres malfaçons difficiles à prévenir.

A cet égard, il est bon d'observer que les vibrations, qui sont inévitables, ont deux effets bien distincts; l'un, pouvant jusqu'à un certain point être calculé, et susceptible d'être assimilé aux effets statiques, consiste à accroître périodiquement le degré des dilatations et compressions des solides à la fois chargés et ébranlés. L'autre effet, sur la nature duquel tous les praticiens ne sont pas d'accord; serait de changer peu à peu l'état d'agrégation et de groupement des molécules en les présentant l'une à l'autre dans des situations diverses comme ferait une fusion ou plutôt un *recuit*. C'est ainsi que des ébranlements longtemps répétés font perdre aux barres de fer, suivant la plupart des ingénieurs, leur nerf ou l'état d'enchevêtrement fibreux dû au laminage, et leur font reprendre, d'après eux, l'état cristallin où chaque petit groupe peut être plus stable, mais où l'ensemble l'est beaucoup moins.

Il suffit même de simples intermittences ou alternatives d'action pour amener des désagrégations, en produisant, sans doute, à chaque extension, des arrangements moléculaires un peu différents. Tout le monde sait que l'on rompt facilement un fil de fer en le ployant successivement plusieurs fois en des sens opposés, et, comme disent quelquefois les ouvriers, « les ressorts les plus parfaits sont susceptibles de se fatiguer à la longue [1] ». On

[1] M. Poncelet, *Introd. à la Méc. ind.*, n° 249, p. 295.

22 à 75 (*).

---

a vu des poutres en fonte rompre par cela seul qu'un réservoir d'eau qu'elles supportaient était alternativement plein et vide (1). M. Fairbairn a été même jusqu'à avancer qu'une charge constante purement statique ne produirait à la longue aucun accroissement d'allongement ou de flexion, même si elle était rapprochée de la charge de rupture (2); mais qu'une charge si faible qu'elle soit, qui produirait une déformation permanente, « finirait par rompre si on l'enlevait et la replaçait un nombre de fois suffisant ». Les expériences entreprises par la commission d'enquête anglaise, citée au § 7, prouveraient qu'il faut pour cela que l'extension ou la flexion atteigne au moins le tiers de celle qui précède la rupture. On conçoit que les variations de température peuvent avoir une influence de ce genre sur toute espèce de construction.

Il en résulte que pour déterminer la valeur de R_0 relative à une matière, il faut, ou soumettre les pièces à de longues épreuves statiques et dynamiques, ou bien (§ 9 de la note du n° 3) se servir de l'examen des constructions anciennes et hardies soumises aux mêmes ébranlements et aux mêmes autres circonstances que les édifices qu'on veut ériger.

Et on ne consultera les expériences de rupture immédiate que pour établir approximativement des rapports entre les diverses variétés d'une même espèce de matière (ci-après § 12 de la note du n° 113).

(*) Par la même raison qu'à la note des n°s 4 à 20, on renvoie après le n° 168, au Complément des art. I à VI, ces numéros de 22 à 75, contenant des résultats d'expériences, auxquels on joindra ceux fort nombreux obtenus depuis 1833, tant sur la rupture par extension que sur les dilatations longitudinales produites par des tractions plus faibles que celles qui font rompre.

(1) Note de M. Braitwaite au *Journal of Arts*. London, 1854.

(2) Page 72 de la traduction française faite par M. Perret-Porta, en 1857, du mémoire de M. Fairbairn, *De l'application de la fonte, du fer et de la tôle aux constructions*.

ARTICLE III.

DE LA RÉSISTANCE D'UN CORPS PRISMATIQUE A LA FLEXION PRODUITE PAR UN EFFORT DIRIGÉ PERPENDICULAIREMENT A LA LONGUEUR DE CE CORPS.

76. Quand un corps prismatique est tiré dans le sens de la longueur, tous les éléments longitudinaux, ou fibres, s'allongent. Si le même corps est comprimé, et qu'il ne puisse céder en pliant, les fibres s'accourcissent. Lorsque les allongements ou accourcissements sont très-petits, ils sont proportionnels à l'effort qui les produit. La variation de longueur d'un corps, pour un effort donné, est d'ailleurs évidemment proportionnelle à la longueur de ce corps (*).

77. Quand un corps prismatique est fléchi, les fibres situées du côté de la face convexe sont allongées; les fibres situées du côté de la face concave sont accourcies; certaines fibres, situées dans l'intérieur du corps, conservent une longueur invariable. En admettant, conformément à ce qui a été dit ci-dessus, que les fibres opposent à l'allongement et à l'accourcissement des résistances proportionnelles aux quantités dont les longueurs de ces fibres varient, on peut se rendre compte de la manière dont un corps résiste à la flexion.

Soit un solide prismatique droit (fig. 1 des planches à la fin du volume) encastré horizontalement à l'extrémité A, et fléchi par l'action d'un poids P suspendu à l'autre extrémité B. Considérons une section transversale quelconque *mana'*. Soit *aa'* la ligne horizontale qui est la section des fibres dont la longueur n'a pas varié (**). Il est nécessaire, pour l'équilibre de la partie

---

(*) Ces principes ont été déduits mathématiquement, à la note du n° 21, de celui des actions moléculaires fonctions continues des distances.

(**) L'auteur suppose cette ligne *aa'* perpendiculaire au plan

du corps située à droite de *mana'* : 1° que les extensions et compressions des fibres aient fait naître, dans cette section, des forces verticales dont la somme égale le poids P (*) ; 2° que la somme des forces horizontales produites par ces extensions et compressions soit nulle; 3° que la somme des moments des forces verticales et horizontales dont il s'agit, et du poids P, pris par rapport à l'axe fixe *aa'*, soit nulle.

On nommera

E la force nécessaire pour allonger ou pour accourcir un prisme dont la section transversale est l'unité superficielle, d'une quantité égale à la longueur de ce prisme.

ρ le rayon du cercle osculateur de la courbe du solide, au point où est faite la section transversale *mana'*.

u l'abscisse d'un point quelconque de la section *ama'n*, comptée sur *aa'*.

v l'ordonnée d'un point quelconque de cette section, prise perpendiculairement à *aa'*.

b la plus grande valeur de u.

f_1u l'ordonnée *pm* de la courbe qui termine la partie de la section transversale où les fibres s'allongent.

f_2u l'ordonnée *pn* de la courbe qui termine la partie où les fibres s'accourcissent.

x la distance de la section transversale *ama'n* à l'extrémité encastrée.

a la distance du point d'application du poids P à l'extrémité

---

vertical de *sollicitation* ABP. Cela n'a pas toujours lieu. (Voyez ci-après la note du n° 83).

(*) On montrera, aux notes des n°s 152 à 155, que ce ne sont pas les extensions et compressions des fibres longitudinales, mais l'inclinaison qu'elles prennent sur la section, ou ce qu'on a déjà appelé le *glissement* (note du n° 3) qui fait naître les forces transversales ou verticales dont la somme égale le poids P.

encastrée, qui ne diffère pas sensiblement de la longueur AB du solide.

Dans l'état naturel du corps, dx est la longueur de la portion infiniment petite de la fibre dont les coordonnées sont u, v. Après la flexion, cette longueur a augmenté de $\frac{dx}{\rho}v$, parce que l'angle des deux normales consécutives est $\frac{dx}{\rho}$. La proportion suivant laquelle cette fibre s'est allongée est donc

$$\frac{\frac{dx}{\rho}v}{dx}, \quad \text{ou} \quad \frac{v}{\rho}.$$

L'aire de la section transversale de la fibre étant $dudv$, la résistance qu'elle oppose à l'allongement est

$$\mathrm{E}\,.\,dudv\,.\,\frac{v}{\rho};$$

et le moment de cette résistance, pris par rapport à l'axe aa', est

$$\mathrm{E}\,.\,dudv\,.\,\frac{v^2}{\rho}.$$

Par conséquent les sommes des résistances des fibres étendues et comprimées sont respectivement

$$\frac{\mathrm{E}}{\rho}\int_0^b du\int_0^{f_1 u} dv\,.\,v, \quad \frac{\mathrm{E}}{\rho}\int_0^b du\int_0^{f_2 u} dv\,.\,v,$$

et la somme des moments de ces résistances, pris par rapport à l'axe aa', est

$$\frac{\mathrm{E}}{\rho}\left(\int_0^b du\int_0^{f_1 u} dv\,.\,v^2+\int_0^b du\int_0^{f_2 u} dv\,.\,v^2.\right)$$

78. On aura donc pour exprimer l'équilibre des forces horizontales, condition qui détermine la situation de l'axe aa',

$$\int_0^b du\int_0^{f_1 u} dv\,.\,v=\int_0^b du\int_0^{f_2 u} dv\,.\,v.$$

L'axe aa' passe par le centre de gravité de la section transversale $mana'$.

79. On aura ensuite, pour exprimer l'équilibre de rotation autour de cet axe,

$$\frac{E}{\rho}\left(\int_0^b du \int_0^{f_1 u} dv \,.\, v^2 + \int_0^b du \int_0^{f_2 u} dv \,.\, v^2\right) = P(a - x).$$

On néglige les moments des forces verticales, ce qui est permis quand l'épaisseur du corps est petite par rapport à sa longueur (*). Il est nécessaire d'ailleurs que l'épaisseur du corps soit petite par rapport à sa longueur pour que les allongements et accourcissements des fibres, et les forces intérieures qui en résultent, soient telles qu'on le suppose ici; et les résultats suivants ne peuvent être appliqués lorsque cette condition n'est pas satisfaite.

80. La quantité

$$E\left(\int_0^b du \int_0^{f_1 u} dv \,.\, v^2 + \int_0^b du \int_0^{f_2 u} dv \,.\, v^2\right)$$

a, pour chaque corps, une valeur qui dépend de la nature de ce corps et de la figure de la section transversale. Cette quantité est *le moment de la résistance à la flexion*, ou plus simplement le *moment de flexion* du corps. Nous la représenterons ci-après par la lettre ε. Quand la figure de la section peut être partagée par une ligne horizontale en deux parties symétriques, cette ligne est l'axe d'équilibre qui contient les fibres invariables, et à partir de laquelle il faut prendre la valeur de l'intégrale

$$E\int_0^b du \int_0^{f_1 u} dv \,.\, v^2,$$

(*) Ces forces verticales dont la somme, comme on a dit, égale le poids P, se compensent d'ailleurs, quant au *moment*, comme tendant à faire tourner également dans les deux sens. Il n'en faudra pas moins tenir compte (voyez notes des n°s 152 à 155), soit dans le calcul complet de la flèche ou ordonnée extrême, soit dans l'équation exprimant la condition de non-rupture, des *glissements* qui engendrent ces forces.

dont le double est alors la valeur du moment de résistance à la flexion. Dans le cas contraire, il faut déterminer d'abord la position de l'axe d'équilibre, au moyen de la condition exprimée n° **78**, et calculer ensuite séparément les valeurs des deux intégrales qui entrent dans l'expression de ce moment (*).

(*) § 1. *Notations et démonstrations plus simples. Moments d'inertie des sections.* — La quantité entre parenthèses des n°s 77, 79 et 80, ou celle ε dégagée du facteur E, n'est autre chose que le *moment d'inertie de la section ma'na* (supposée avoir l'unité de masse par unité superficielle) autour de la *ligne des fibres invariables aa'*, ainsi que l'a remarqué le premier M. Persy, dans son cours de stabilité des constructions, lithographié en 1831 à l'École de Metz. Aussi, dans les cours faits à l'École des ponts et chaussées depuis novembre 1837, on a simplifié les notations en mettant $\int_0^\omega v^2 d\omega$ ou bien une seule lettre pour ce moment d'inertie $\int_0^b du \int_0^{f_1 u} dv.v^2 + \int_0^b du \int_0^{f_2 u} dv.v^2$; $\int_0^\omega$ désignant une intégrale relative à toute la section ω. En appelant donc, comme M. Poncelet,

I ce moment d'inertie $\int v^2 d\omega$,

M le moment, autour de la même ligne des fibres invariables tracée sur la section quelconque ω, de la force ou des forces extérieures en nombre quelconque qui sollicitent le prisme *entre cette section ω et la deuxième extrémité du solide ;*

L'équation d'équilibre de rotation entre les forces extérieures et intérieures autour de cette même ligne, s'écrit simplement

$$M = \frac{E}{\rho}\int_0^\omega v^2 d\omega = \frac{EI}{\rho};$$

et celle d'équilibre de translation longitudinale du n° 78

$$\int_0^\omega v d\omega = 0,$$

où les v sont les distances positives ou négatives des diverses fibres à cette ligne.

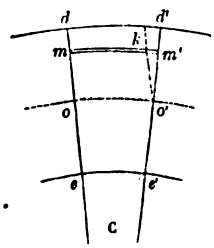
On a, ainsi, renoncé à appeler *moment d'élasticité*, comme faisait

(Du n° 80).

Navier en 1826, ce produit EI qu'il désigne par ε et qu'il propose, en 1833, d'appeler *moment de flexion ;* et l'on applique plutôt cette dernière dénomination au moment $M = \frac{EI}{\rho}$ des forces qui produisent la flexion ou des forces qui l'arrêtent, de même que nous appellerons plus loin moment de torsion le moment des forces extérieures qui produisent la torsion, ou le moment égal des forces intérieures qui résistent à ce qu'elle augmente.

On appelle aussi maintenant, d'une manière plus précise, ρ le rayon de courbure, non pas de la *courbe du solide* ou d'une quelconque de ses fibres, mais de son *axe*, ou de la fibre qui passe par les centres de gravité de ses sections, et qui est aussi, dans le présent exemple, l'une *de celles dont la longueur n'a pas varié.* On peut dire, ainsi, très-simplement et élémentairement (sans parler de l'angle infinitésimal $\frac{dx}{\rho}$ de deux normales consécutives) que l'arc de fibre invariable et l'arc de fibre quelconque, compris entre deux sections très-voisines, sont entre eux comme leurs rayons ρ et $\rho + v$, ce qui montre de suite que la proportion de l'excès du second arc sur le premier, ou la *dilatation* de la fibre, a pour mesure $\frac{v}{\rho}$.

Ou bien, pour représenter aux yeux ce qui se passe, on figure comme ci-contre, dans les cours d'Arts et métiers, la coupe *longitudinale* de la portion du prisme comprise entre deux sections *dmoe*, *d'm'o'e'*, par un plan qui contient la fibre quelconque *mkm'* et qui est perpendiculaire à la ligne *o* des fibres invariables; car si C est le point de rencontre des coupes *de*, *d'e'* des deux sections, on a $Co = Co' = \rho$, $om = o'm' = v$, en sorte que, *o'k* étant une parallèle menée à *od*, comme la longueur primitive de la fibre était $oo' = mk$, la *dilatation* qu'elle a éprouvée est $\frac{km'}{oo'}$, égal à $\frac{o'm'}{Co'} = \frac{v}{\rho}$ d'après la similitude des triangles isocèles *m'o'k*, *oCo'*.



§ 2. *Hypothèses tacitement invoquées. Elles ne sont point néces-*

(Du n° 80).

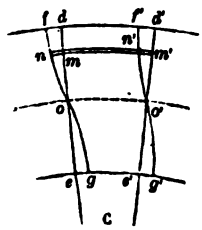
saires. — Mais cette démonstration, comme celle du texte, se fond sur deux hypothèses, savoir :

1° Que les sections primitivement planes et normales aux fibre rectilignes du prisme sont encore planes après la flexion, et normales à ces fibres devenues courbes ;

2° Que les fibres se comportent comme feraient de petits prismes isolés, ou comme si elles étaient sans action les unes sur les autres.

Or, malgré quelques expériences qui paraissent favorables à la première, on peut tenir pour certain et nous montrerons qu'elles sont toutes deux fausses, excepté dans le cas très-particulier de la *flexion égale* ou *en arc de cercle*, qui est celui où les forces agissant aux extrémités n'ont pas de composante totale transversale. Dans tout autre cas, les sections planes se changent en surfaces légèrement courbes, sur lesquelles toutes les fibres, hors celles des faces latérales, prennent une petite inclinaison, et ces fibres en *glissant* un peu l'une devant l'autre se sollicitent alors mutuellement dans le sens de la longueur par une sorte de frottement.

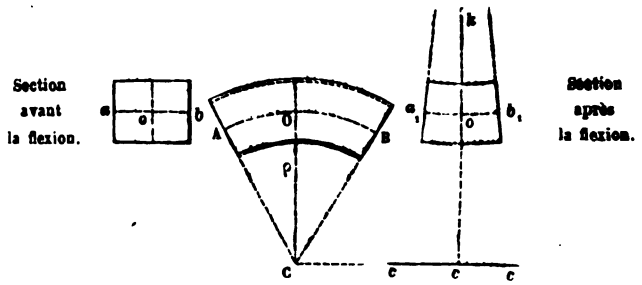
Heureusement qu'on peut obtenir les formules sans ces deux hypothèses, au moins pour les prismes dont la matière a une contexture symétrique par rapport aux sections perpendiculaires à leurs arêtes ; cela tient à ce qu'alors le glissement relatif des fibres n'influe pas sur les tensions longitudinales de chacune d'elles, et à ce que toutes les sections planes se changent, comme on verra, en une même surface courbe, de sorte que les portions de fibre nn' qu'interceptent ces sections figurées par les coupes infléchies fog, $f'o'g'$ ont les mêmes longueurs et par conséquent se sont dilatées dans les mêmes proportions $\frac{v}{\rho}$ que si les sections étaient restées planes et normales aux fibres. D'où nous pourrons conclure que les formules ci-dessus, bien qu'incomplètes ou ne donnant pas tout, sont toujours exactes dans ce qu'elles donnent, sous la condition, toutefois, comme pour la formule $P = E\omega \frac{l}{L}$ d'ex-



(Du n° 80).

tension simple (§ 6 de la note du n° 21), que les forces sollicitantes soient appliquées et distribuées d'une certaine manière sur les bases extrêmes du prisme.

§ 3. *Démonstration des formules de la flexion dans le cas où elle a lieu d'une manière égale ou en arc de cercle. Modifications transversales.* — Pour le faire voir, et démontrer ainsi exactement ces formules *en même temps que ce qui devra les compléter*, prouvons d'abord qu'elles sont vraies dans le cas le plus simple, celui où un prisme AOB, d'égale contexture dans les sens transversaux, a été fléchi comme nous avons dit d'une manière *égale*, toutes les fibres s'étant courbées en arcs de cercle dont nous supposerons les centres sur une même droite C, intersection commune des sections restées



normales à ces fibres dont chacune a éprouvé d'un bout à l'autre une même dilatation ou contraction, nulle pour celle AOB qui passe par les centres de gravité. Il nous suffira de généraliser la démonstration *à posteriori* donnée de la formule de l'extension au § 3 de la note du n° 21, en montrant que les fibres peuvent encore ici, sans perdre leur contiguïté, éprouver toutes ensemble des contractions latérales positives ou négatives qui soient à leurs diverses dilatations longitudinales dans le rapport constant η (soit $1/4$), qui est tel qu'elles ne se pressent pas l'une l'autre normalement (§ 5 de la note du n° 21). Or cela est facile. En effet, si la fibre centrale AOB est restée de même longueur, celles situées au-dessus et au-dessous, dans le même plan *cok*, et dont les rayons excèdent celui ρ de quantités positives ou négatives v, se sont trouvées dilatées longitudina-

(Du n° 80).

lement de $\frac{v}{\rho}$; or contractons-les d'abord transversalement dans les proportions $\eta\frac{v}{\rho}$, suivant ces rayons $\rho + v$; puis changeons la ligne *aob* tirée sur la section par son centre de gravité parallèlement à la droite C ou *ccc*, en un arc de cercle a_1ob_1 de même longueur, ayant son rayon *ok* égal à $\frac{\rho}{\eta}$ (soit 4ρ si $\eta = 1/4$), dans le prolongement du rayon de courbure $oc = \rho$, et changeons enfin, sur la section, toutes les lignes matérielles parallèles à *aob* en arcs concentriques dont les lignes perpendiculaires sont devenues les rayons. I en résultera (quelle que soit la forme du contour des sections, que nous avons figuré rectangulaire pour fixer les idées) que les fibres auront été contractées, dans le sens parallèle à *ccc*, de $\frac{v}{\frac{\rho}{\eta}} = \eta\frac{v}{\rho}$ comme elles le sont déjà dans le sens perpendiculaire. Comme leurs dilatations longitudinales positives ou négatives sont représentées par $\frac{v}{\rho}$, on voit (§ 6 de la note du n° 3 et § 3 de la note du n° 21) qu'elles ne se presseront ni ne s'attireront l'une l'autre normalement et que leurs tensions longitudinales seront bien $E\frac{v}{\rho}$ par unité de leurs sections $d\omega$, *comme si elles étaient isolées.*

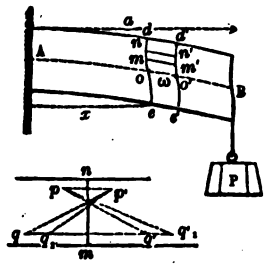
Donc le prisme fléchi, dont les points ont éprouvé les déplacements longitudinaux et transversaux ainsi supposés, qui sont, comme on voit, possibles et compatibles sans disjonction, est en équilibre si, ses faces latérales ne supportant rien, l'on applique aux divers éléments $d\omega$ des deux bases des tractions longitudinales $E\frac{v}{\rho}d\omega$.

Réciproquement, comme un système de points matériels dérangés très-peu de leurs positions ne peut prendre qu'un seul état d'équilibres sous l'action de forces données, ou comme le problème des petits déplacements des points d'un corps élastique est complétement déterminé quand on donne les forces extérieures qui les produisent, on voit que : Lorsqu'un prisme dont les faces latérales ne supportent aucune action aura ses bases extrêmes ω sollicitées nor-

(Du n° 80).

malement par des tractions $E\,d\omega\,\frac{v}{\rho}$ (tant positives que négatives) proportionnelles aux distances v des éléments $d\omega$ à des droites tracées de la même manière sur les deux bases par leurs centres de gravité, il éprouvera précisément les déplacements tant longitudinaux que transversaux que nous venons de supposer, c'est-à-dire une incurvation en arc de cercle dans un plan parallèle aux arêtes et à la coordonnée v, avec des dilatations longitudinales $\frac{v}{\rho}$ partout, des contractions latérales $\eta\,\frac{v}{\rho}$, et, aussi partout dans l'intérieur, les mêmes tractions longitudinales $\frac{E}{\rho}\,v\,d\omega$ que si les fibres étaient isolées.

§ 4. *Cas général de la flexion inégale ou non circulaire. Glissements qui l'accompagnent nécessairement. Inflexion des sections primitivement planes.* — Passons au cas plus général, et le plus ordinaire, de la flexion non circulaire, dans laquelle l'inégalité de la courbure d'un bout à l'autre du prisme est déterminée par des forces transversales dont nous désignerons, comme dans le texte, par P la composante totale dans un sens parallèle à celui de flexion ou à la coordonnée que nous avons appelée v, en supposant comme Navier (uniquement pour fixer les idées), que le prisme d'une longueur $AB=a$ est encastré à l'extrémité A opposée à celle où agissent les forces qui produisent ainsi un moment $M=P(a-x)$ autour de la ligne $v=0$ tracée sur la section quelconque ω dont l'abscisse est $A\omega=x$.



Observons d'abord (comme nous avons avancé) que si la matière du prisme a une contexture symétrique par rapport aux diverses sections ω perpendiculaires à ses arêtes avant la flexion, le petit glissement relatif qui peut avoir lieu entre les files longitudinales de molécules n'influe aucunement sur la tension aussi longitudinale des fibres : car si la file comprenant les molécules q, q' a glissé de $qq_1=q'q'_1$, devant la file comprenant celles p, p' supposées symétriquement placées, comme les premières, par rapport au plan

(Du n° 80).

mn d'une section transversale ω, il en résultera, dans la composante longitudinale de l'action de p sur q', une petite augmentation ou diminution exactement compensée par la diminution ou l'augmentation de la composante de l'action, sur p', de q devenu q_1; d'où il suit que la résultante des actions des molécules de la gauche sur les molécules de la droite de la face mn, ou la tension de la fibre dont l'élément $mn = d\omega$ est la base, ne dépendra toujours que des dilatations ou contractions longitudinales et transversales de cette fibre, et nullement des glissements.

Or supposons, aux points du prisme, les mêmes déplacements que s'il avait d'abord été fléchi comme tout à l'heure (§ 3), ou que ses sections fussent restées planes et normales aux fibres étendues longitudinalement dans des proportions $\frac{v}{\rho}$ et contractées latéralement dans des proportions $\eta\frac{v}{\rho}$, mais *avec une courbure uniformément variable* $\frac{1}{\rho} = \frac{P(a-x)}{EI}$; puis, ensuite, que les fibres invariables ou répondant à $v = o$ étant restées à la même place, on eût fait glisser très-peu toutes les autres fibres les unes contre les autres sans en changer la longueur, en transformant ainsi les sections planes en surfaces doe, $d'o'e'$ légèrement courbes, mais coupant toujours normalement les faces latérales du prisme. Ces surfaces auront toutes sensiblement la même forme ainsi que la même inclinaison sur une même fibre quelconque, car les différences qui existent dans les contractions latérales successives $\eta\frac{v}{\rho}$ de cette fibre, en raison de la variabilité de $\frac{1}{\rho}$, n'exerceront sur ces inclinaisons qu'une influence négligeable. Or les inclinaisons, sur les sections, des fibres ou files de molécules qui leur étaient primitivement normales, ou ce qui revient au même, les glissements des sections les unes devant les autres, engendrent des actions tangentielles (note du n° 3 ou notes ci-après des n°s 152 à 155); ces actions auront donc, pour toutes les sections, les mêmes grandeurs et la même somme de composantes dans le sens v. Comme la forme courbe des sections, qui détermine la grandeur des glissements, est du reste

(Du n° 80).

arbitraire, choisissons-la telle : 1° que cette somme des composantes d'actions dans le sens transversal v soit égale à la force P qui, ainsi, ne produira pas de translation latérale, dans ce sens, de la portion quelconque ωB du prisme : portion dont l'équilibre de rotation est déjà assuré autour de la ligne $v = 0$ tracée sur ω par la supposition $\frac{E}{\rho}\int v^2 d\omega = P(a-x)$, faite sur le mode de variation de la courbure $\frac{1}{\rho}$ puisque la traction ou tension d'une fibre quelconque à travers la section ω a pour valeur $Ed\omega\frac{v}{\rho}$, vu la dilatation $\frac{v}{\rho}$ et les contractions $\eta\frac{v}{\rho}$ qu'on lui suppose (§ précédent) ; 2° que la différence des actions longitudinales des fibres environnantes sur les diverses faces latérales mm', nn' d'un même *élément de fibre* $mm'n'n$, compris entre deux sections voisines, en raison de ce que les inclinaisons des arêtes sur les bases ne sont pas les mêmes en m qu'en n, en m' qu'en n', se trouve justement contre-balancée par la différence, due à la variation de $\frac{1}{\rho}$, des actions aussi longitudinales et opposées $Ed\omega\frac{v}{\rho}$, s'exerçant sur les deux bases $mn = m'n' = d\omega$ du même élément ; ce qui assure l'équilibre de *détail* ou l'équilibre des divers éléments, chacun en particulier [1].

Des déplacements ainsi supposés, il résultera, comme au paragraphe précédent, que les faces latérales du prisme ne supporteront aucune pression ou traction normale. Elles ne supporteront, non plus, aucune action extérieure, analogue à des frottements longitudinaux, puisque les sections, en se courbant, leur sont restées normales. Enfin ses bases, ou plus généralement deux sections quelconques, situées à une distance arbitraire L l'une de l'autre, supporteront, sur leurs éléments $d\omega$, avec des actions tangentielles ou transversales ayant P pour composante totale dans le sens v, des tractions longi-

[1] Un exemple simple prouvera, si l'on en doute, aux notes des n°s 152 à 155, sans avoir besoin de recourir à la solution analytique de notre Mémoire sur la flexion (Journal Liouville, 1856), que ce problème de la forme à assigner ainsi à la surface courbe des sections pour chaque figure du contour, n'impose pas plus de conditions qu'il n'est possible d'en remplir.

(Du n° 80).

tudinales $Ed\omega\frac{v}{\rho_0}$, $Ed\omega\frac{v}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_0}$ et $\frac{1}{\rho_1}$ étant les valeurs particulières correspondantes de la courbure $\frac{1}{\rho}=P\frac{a-x}{EI}$ relative à ces sections, en sorte qu'on a leur différence $\frac{1}{\rho_0}-\frac{1}{\rho_1}=\frac{PL}{EI}$.

D'où l'on conclura réciproquement, comme au § 3 précédent, qu'un prisme dont les faces latérales ne sont soumises à aucune action et dont les deux bases ω, situées à une distance L, supportent à la fois : 1° dans le sens longitudinal, des tractions qui varient comme une coordonnée transversale v ou qui sont exprimables par $Ed\omega\frac{v}{\rho_0}$, $Ed\omega\frac{v}{\rho_1}$; 2° dans le sens transversal ou tangentiel, des actions qui ont les mêmes grandeurs et directions aux points homologues de ces bases, et une composante totale $P=\frac{EI}{L}\left(\frac{1}{\rho_0}-\frac{1}{\rho_1}\right)$, dans le sens v, avec un mode de distribution qui dépend de la forme du contour des sections ; ce prisme, dis-je, fléchira en prenant dans toutes ses parties des dilatations longitudinales $\frac{v}{\rho}$ (positives ou négatives avec v), avec des contractions transversales $\eta\frac{v}{\rho}$, $\frac{1}{\rho}$ variant uniformément ou linéairement d'un bout à l'autre entre ses valeurs extrêmes $\frac{1}{\rho_0}$, $\frac{1}{\rho_1}$ et représentant la courbure de l'axe ; *et les éléments* $d\omega$ *de chaque section intérieure supporteront des actions normales ou longitudinales* $Ed\omega\frac{v}{\rho}$, *avec les mêmes actions tangentielles que ceux homologues des bases.* Ce qui est ce qu'on voulait démontrer.

§ 5. *Cas d'une contexture inégale transversalement.* Nous ne nous arrêterons pas à faire voir que la conclusion sera la même si la contexture, au lieu d'être la même dans tous les sens transversaux, est simplement symétrique dans deux sens rectangulaires, suivant lesquels il faudra en conséquence contracter les fibres dans des rapports différents $\eta\frac{v}{\rho}$, $\eta'\frac{v}{\rho}$; ou si, plus généralement, il n'y a de symétrie de contexture que de part et d'autre des sections trans-

(Du n° 80).

versales, en sorte que, comme on a dit à la fin du § 6 de la note du n° 21, les sections $d\omega$ des fibres doivent éprouver de petites déformations transversales outre les contractions pour qu'elles ne se pressent pas l'une l'autre, ce qui est encore possible sans qu'elles cessent de se toucher. (Mémoire cité sur la flexion.)

§ 6. *Observation sur le mode d'application et de distribution des forces qui font fléchir.* Cette démonstration des expressions connues :

$\frac{v}{\rho}$ de la dilatation (positive ou négative avec v) d'une fibre,

$E\frac{v}{\rho}$ de sa tension par unité de section, d'où $\frac{E}{\rho}\int v d\omega = M$ ou $P(a-x)$ pour l'équation de moments autour de la ligne $v = 0$, (équation à poser seulement lorsque cette ligne est *axe principal* et à remplacer par deux autres dans tout autre cas comme on le verra à la note du n° 83),

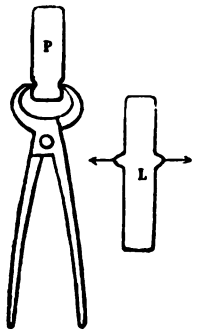
Ne convient, comme l'on voit, que pour un mode particulier d'application et de distribution, aux extrémités du prisme, des forces extérieures qui ont un moment M, avec une composante transversale $P = -\frac{dM}{dx}$ (qui est zéro dans le cas du § 3 ou de la flexion circulaire).

C'est qu'elle ne démontre *que ce qui est*, et que ces expressions ne sont exactes que pour le mode d'application et de distribution supposé au paragraphe précédent.

Mais, par les motifs déduits au § 6 de la note du n° 21, elles peuvent être employées avec toute l'approximation désirable dans la pratique, pour tout autre mode d'application et de distribution, aux extrémités, des forces dont il n'y a ainsi à considérer que la résultante et le moment résultant. Des expériences spéciales prouvent même, à défaut du calcul, que les systèmes de forces se faisant équilibre par l'intermédiaire d'une petite portion d'un prisme, ne produisent de déplacements sensibles que sur une très-faible étendue en deçà et au delà, comme tout le monde peut voir en pinçant avec des tenailles un prisme de caoutchouc P, ou en dilatant *transversalement* une lanière mince L de même matière,

(Du n° 80).

car on remarquera que l'impression ou l'élargissement ne se fera point sentir à des distances excédant la profondeur ou l'amplitude. Aussi les constructeurs ne tiennent aucun compte de ces systèmes de forces en équilibre, lorsqu'ils règlent les dimensions à donner aux pièces, et ils se bornent à prendre quelques précautions, telles que l'interposition de coins ou de fourrures, contre les impressions que pourrait produire leur application trop directe et trop concentrée. D'où il résulte bien que des forces quelconques agissant vers les extrémités des pièces peuvent être remplacées très-approximativement, quant à leur effet sur tout le reste, par des systèmes de forces *équivalentes*, ou ayant même moment et même résultante, appliquées et distribuées comme on a dit aux §§ 3 et 4.



On ne doit pas s'étonner, au reste, ni trouver regrettable que cette démonstration soit plus longue que la démonstration ordinaire des formules de la flexion; car, indépendamment de l'exactitude, et de l'abstention de toute hypothèse fausse ou gratuite, elle oblige à reconnaître des circonstances ordinairement omises, à savoir, les contractions et dilatations transversales qu'il est bon quelquefois de prendre en considération (voy. § 13 de la note du n° 113), et aussi l'inclinaison nécessaire des fibres sur les sections quand les forces sollicitantes ont une composante transversale, ce qui produit les glissements des sections les unes devant les autres ou des fibres les unes contre les autres; circonstances dont l'influence n'est pas toujours négligeable, comme nous verrons, quand il s'agit soit de calculer les flèches de courbure, soit de passer des *équations d'élasticité* aux *équations de cohésion* fournissant les conditions de résistance à la rupture prochaine ou éloignée des solides soumis à des forces extérieures données (voyez notes des n°s 152 à 155 et déjà § 5 de la note du n° 113).

§ 7. *Cas où l'on suppose que l'élasticité varie dans l'étendue d'une même section. Condition sous laquelle on peut alors poser des expressions analogues. Pièces de métal. Pièces de bois non homo-*

(Du n° 80).

gènes. — La démonstration des §§ 3 et 4 s'applique au cas, considéré par M. Bresse (§ 7 de la note du n° 21), de variation de l'élasticité d'une fibre à l'autre, mais sous la condition que nous avons déjà énoncée à propos de l'extension ou traction longitudinale simple, à savoir que, pour toutes les fibres du solide on ait les mêmes rapports η, η' entre les contractions transversales et les dilatations longitudinales correspondantes ; car sans cela les fibres agiraient normalement l'une sur l'autre et l'on n'aurait pas $E\frac{v}{\rho}d\omega$ pour la tension de celle dont la dilatation est $\frac{v}{\rho}$, E étant le coefficient d'élasticité de cette fibre supposée isolée ou extraite de la masse.

Si cette condition de η et η' constants est remplie, l'équation d'équilibre de translation propre à la détermination de la ligne des fibres invariables est $\int Ev d\omega = 0$ au lieu de $\int v d\omega = 0$, et l'équation d'équilibre de rotation autour de cette ligne est $\frac{1}{\rho}\int Ev^2 d\omega = M$ au lieu de $\frac{E}{\rho}\int v^2 d\omega = M$. Cette ligne passe toujours, comme l'observe M. Bresse, par le *centre de gravité* de la section ω, et $\int Ev^2 d\omega$ est encore le *moment d'inertie* de celle-ci, mais moyennant qu'*on attribue aux divers éléments* $d\omega$ *des densités* E *variant de l'un à l'autre*.

M. Bresse donne un exemple (*Recherches sur la flexion des pièces courbes*, chap. 1er, n° 26, p. 89) de calcul de $\int Ev^2 d\omega$, où il suppose, pour une section rectangle, que E varie *linéairement* entre une valeur centrale E_0 et une valeur E_1 sur les bords, en conservant la même valeur E_0 sur une partie de la grande médiane égale à la différence des côtés. Mais il en résulterait que ce moment d'inertie $\int Ev^2 d\omega$ serait égal au moment d'inertie ordinaire $\int v^2 d\omega$ multiplié par une certaine valeur moyenne de E, entre E_0 et E_1, qui ne dépendrait que du rapport des deux côtés, et non pas de leur grandeur absolue comme cela doit être d'après les expériences (§ 7 de la note du n° 21), qui montrent que les pièces métalliques à petite section ont une résistance relative très-sensiblement différente de celle des grosses pièces. Nous avons donc modifié son calcul en supposant que la zone dont la résistance élastique E diffère de celle du centre (et peut être supposée varier *paraboliquement* dans cette zone), a une épais-

(Du n° 80).

seur absolue constante et non pas proportionnelle à l'une des deux dimensions. On simplifie quand on suppose cette épaisseur petite, car alors on peut prendre sensiblement, I étant le moment d'inertie ordinaire de la surface de la section, j celui de son contour, ou plutôt de la ligne moyenne de la zone dont l'élasticité est différente du reste (ligne qu'on peut placer à 1 ou à 2 millimètres à l'intérieur),

$$\int Ev^2 d\omega = E_0 I + ej, \quad \text{d'où} \quad M = \frac{E_0 I + ej}{\rho},$$

où E_0 et e sont des coefficients à déterminer par plusieurs expériences de flexion de pièces de même matière, mais de formes ou de dimensions transversales sensiblement différentes [1].

Cette expression peut convenir pour les pièces en métal.

Mais, pour les pièces de bois, l'augmentation ou la diminution de force élastique ne se fait pas sentir seulement auprès du contour, elle commence au centre de l'arbre d'après les belles expériences de MM. Wertheim et Chevandier (*Mémoire sur les propriétés mécaniques des bois*, *Ann. de ch. et de phys.*, 1848, tableaux VIII et XII). Si, alors, on suppose empiriquement (comme nous avions fait dans une lettre écrite en 1845 à l'un de de ces deux savants expérimentateurs) une loi de variation parabolique ou comme les carrés des rayons des couches ligneuses, on obtient des expressions simples; car si E_0 et E_1 sont les valeurs de E au centre de l'arbre et à sa circonférence dont on appelle r_1 le rayon, l'on a, u_0 et v_0 étant les coordonnées u, v de ce centre des couches par rapport à des axes passant par le centre de gravité de la pièce qui en est extraite,

[1] Pour cela on tirera de cette équation, f étant la flèche de courbure d'une pièce horizontale de longueur $2a$, chargée au milieu d'un poids $2P$ (n° 87 ci-après),

$$\frac{Pa^3}{3If} = E_0 + e\frac{j}{I}.$$

Construisant la suite des points ayant pour abscisses les valeurs de $\frac{j}{I}$ et pour ordonnées celles de $\frac{Pa^3}{3If}$, la ligne droite qui s'en rapprochera le plus donnera E_0 et e. On peut déterminer cette droite soit par tâtonnement visuel, soit par les méthodes dont nous parlerons au § 15 de la note du n° 113 pour la rupture par flexion.

(Du n° 80).

$$E = E_0 - (E_0 - E_1)\frac{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2}{r_1^2},$$

d'où

$$\int E d\omega . v^2 = \left[E_0 - (E_0 - E_1)\frac{u_0 + v_0^2}{r_1^2}\right]\int v^2 d\omega -$$
$$- \frac{E_0 - E_1}{r_1^2}\left(\int u^2 v^2 d\omega + \int v^4 d\omega - 2u_0 \int u v^2 d\omega - 2v_0 \int v^3 d\omega\right).$$

Quand la section est un rectangle dont les côtés sont b dans le sens u, et c dans le sens v, les deux derniers termes entre parenthèses sont nuls, et les deux autres se réduisent à $\frac{b^3c^3}{144} + \frac{bc^5}{80}$, ce qui donne, vu que $\frac{bc^3}{12} = I$, et en faisant la distance $\sqrt{u_0 + v_0^2} = r$.

$$\int E v^2 d\omega = E_0 I\left[1 - \frac{E_0 - E_1}{E_0}\left(\frac{1}{3}\frac{b^2}{4r_1^2} + \frac{3}{5}\frac{c^2}{4r_1^2} + \frac{r_0^2}{r_1^2}\right)\right],$$

formule qui pourra rendre compte des différences offertes par les élasticités moyennes de pièces extraites d'un même arbre dans diverses positions par rapport à l'axe des couches ligneuses. On pourra déterminer E_0, et $E_0 - E_1$ ou $E_1 - E_0$, par plusieurs expériences de flexion, comme nous venons de dire dans une sous-note pour E_0 et e.

§ 8. *Les moments peuvent être pris autour de lignes ne passant pas par le centre de gravité. Cas où les forces ont une composante longitudinale totale.* — Observons encore (en revenant au cas d'homogénéité) que l'équation des moments est la même en prenant ceux-ci autour d'une ligne quelconque tracée sur la section ω parallèlement à celle des fibres invariables; car soit d la distance de ces deux lignes, on a $M = \int E\frac{v}{\rho}(v \pm d)d\omega$, qui, eu égard à la propriété $\int v d\omega = 0$ du centre de gravité, se réduit bien à

$$M = \frac{EI}{\rho}.$$

Et l'on a encore la même équation lorsque les forces extérieures ont une somme Q de composantes longitudinales; car, soit toujours appelé M le moment du couple qui résulte du transport de ces forces extérieures au centre de gravité de la section ω, il faudra ajouter

31. Si la figure de la section est un rectangle (Fig. 2), dont b et c soient la largeur et la hauteur, la valeur du moment de résistance à la flexion est

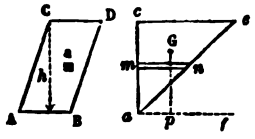
$$\varepsilon = 2E\int_0^b du \int_0^{\frac{1}{2}c} dv \,.\, v^2 = E\,\frac{bc^3}{12},$$

Ainsi la résistance à la flexion est proportionnelle à la largeur et au cube de la hauteur du solide (*).

(note du n° 21) une dilatation générale $\frac{Q}{E\omega}$ des fibres à leurs dilatations individuelles $\frac{v}{\rho}$, ce qui donnera pour l'équilibre de rotation l'équation $M \pm Qd = \int E\left(\frac{v}{\rho} + \frac{Q}{E\omega}\right)(v \pm d)d\omega$ se réduisant toujours à $M = \frac{EI}{\rho}$.

(*) § 1. *Démonstration élémentaire. Méthode de M. Poncelet qui ramène les moments d'inertie à des moments statiques.*— La théorie de la résistance des solides a une telle importance pratique qu'elle est aujourd'hui enseignée dans les cours destinés à des ouvriers intelligents ayant seulement des notions de géométrie et de statique.

Aussi M. Poncelet a rendu élémentaire la détermination du moment d'inertie d'une portion quelconque ABDC d'une section d'un solide, en remarquant que si, par l'axe AB du moment, supposé se projeter en a sur un plan qui lui est perpendiculaire, on fait passer un plan ae incliné à 45 degrés sur celui ac de la figure ABDC, le moment d'inertie de celle-ci autour de AB ne sera autre chose que le moment ordinaire ou statique de l'*onglet* ou prisme tronqué ace que ces deux plans séparent du prisme droit élevé sur ABDC, ce moment statique étant pris par rapport au plan af perpendiculaire à la même figure et passant par l'axe AB ou a. En effet, le moment statique de chaque fibre $mn = a \times v$ ayant pour base l'élément a de la section et pour hauteur $mn = am = v$, sera $a \times v \times am = av^2$, et leur somme est bien,



(Du n° 81).

si les accents désignent les autres éléments et leurs ordonnées, $av^2 + a'v'^2 + \ldots$ ou le moment d'inertie I que désigne aussi, dans le langage de l'analyse, l'intégrale $\int v^2 d\omega$. *On n'a donc, pour obtenir le moment d'inertie* I, *qu'à multiplier le volume de l'onglet* ace *par la distance* Gp *de son centre de gravité au plan* af *mené par l'axe perpendiculairement à la figure.*

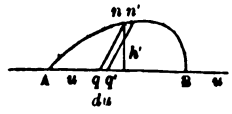
C'est aussi *le double moment statique du même onglet par rapport au plan* ac *de la figure* ABCD *elle-même;* car celui de la fibre *mn* est son volume av multiplié par la distance $\frac{v}{2}$ de son centre de gravité au plan en question.

Or, quand la figure est un parallélogramme ayant une base b et une hauteur h, l'onglet *ace* est un prisme triangulaire ayant pour volume $\frac{h^2}{2} b$, et la distance Gp est $= \frac{2}{3} h$. On a donc bien, pour le moment I d'un parallélogramme $b \times h$ autour de son côté b :

$$\frac{h^2}{2b} \cdot \frac{2}{3} h = \frac{bh^3}{3} = \omega \frac{h^2}{3};$$

d'où, pour le rectangle $b \times c$ autour de sa médiane, $I = \frac{b}{3}\left(\frac{c}{2}\right)^3 + \frac{b}{3}\left(\frac{c}{2}\right)^3 = \frac{bc^3}{12}$ comme au texte.

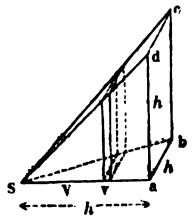
Corollaire. Toute figure $Ann'BA$ terminée à l'axe $AB\omega$ du moment, et par conséquent divisible par des parallèles très-rapprochées en petits trapèzes $qnn'q'$ qu'on peut prendre pour des parallélogrammes $du \times h'$ dont h' est la hauteur perpendiculaire répondant à l'abscisse u, a pour moment d'inertie $\int du \frac{h'^3}{3}$.



§ 2. *Autre méthode.* — On peut encore, d'une manière très-élémentaire, sans invoquer les théorèmes de la statique, et en appelant, comme fait le même savant dans d'autres parties de ses cours, v l'élément ou accroissement infiniment petit de l'ordonnée, qu'il désigne alors (au lieu de v) par une grande lettre V, dire que le moment d'inertie autour du côté $AB = b$ (1re figure du § précédent) du parallélogramme ABCD supposé partagé en zones

(Du n° 81).

étroites $b \times v$ parallèles à ce côté, sera b multiplié par la somme, des produits V^2v depuis $V = 0$ jusqu'à $V = h$; puis remarquer qu'une pareille somme n'est autre chose que celle des tranches ou le volume total d'une pyramide Sabcd ayant h pour hauteur Sa et pour base un carré dont le côté $ad = ab$ est aussi h. Ce volume est $\frac{1}{3} h^2.h$, ce qui donne bien $b \frac{h^3}{3}$ pour le moment d'inertie.



Lorsqu'on a à déterminer une somme de produits V^3v au lieu de V^2v, on peut prendre la somme des moments statiques $V^2v.V$ des tranches de la même pyramide par rapport à un plan mené au sommet parallèlement à la base, somme qui est égale au volume $\frac{1}{3} h^2h$ de la pyramide multiplié par la distance $\frac{3}{4} h$ du centre de gravité à ce plan, ce qui donne $\frac{h^4}{4}$.

§ 8. *Recherche élémentaire de la somme des produits des puissances d'une quantité variable par les accroissements successifs qu'elle prend entre deux valeurs extrêmes.* — Le secours des théorèmes de géométrie ou de statique fait défaut lorsqu'on a à déterminer (comme nous serons dans le cas de faire pour des questions de torsion) une somme de produits $V^{n-1}v$ où l'exposant $n-1$ excède 3. Mais on peut démontrer, d'une manière toujours assez élémentaire pour être donnée dans des cours d'arts et métiers, que cette somme est $\frac{V_1^n}{n} - \frac{V_0^n}{n}$, V_0 et V_1 étant les valeurs initiale et finale de la quantité V : car, si l'on multiplie successivement $(V+v)^2 - V^2 = 2Vv\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v}{V}\right)$, qui se réduit à $= 2Vv$ en négligeant $\frac{1}{2}\frac{v}{V}$ devant 1, par $V + v$, on a, en faisant de semblables suppressions, $(V+v)^3 - V^3 = 3V^2v$, et ainsi de suite, en sorte que, généralement, l'accroissement de $\frac{V^n}{n}$, quand V s'accroît de v, est

82. Si cette figure (Fig. 3) est formée de deux triangles égaux, dont les côtés soient p et q, la valeur du moment dont il s'agit est

$$\varepsilon = 2E\int_0^p du \int_0^{\frac{qu}{p}} dv \,.\, v^2 = E\,\frac{pq^3}{6}\ (*).$$

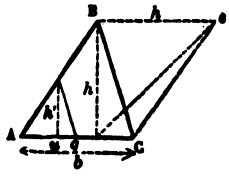
$V^{n-1}v$; et la somme de semblables accroissements successifs, lorsque V croît de V_0 à V_1, ne peut-être que l'excès de la valeur finale $\frac{V_1^n}{n}$ sur la valeur initiale $\frac{V_0^n}{n}$ de cette quantité $\frac{V^n}{n}$.

§ 4. *Théorème général donnant le moment d'inertie* I_1 *d'une figure quelconque* ω *autour d'une droite quand on connaît le moment* I *autour de sa parallèle menée par le centre de gravité, ou réciproquement.* — Soit d la distance à laquelle la première droite passe du centre de gravité dans le plan de la figure dont l'aire est ω, on a, comme on sait, la relation

$$I_1 = I + \omega d^2,$$

qui n'est autre chose que l'égalité $\int(v \pm d)^2 d\omega = \int v^2 d\omega \pm 2d.\int v d\omega + \omega.d^2$, eu égard à ce qu'on a $\int v d\omega = 0$ si les ordonnées v sont les distances positives et négatives des éléments $d\omega$ à la droite passant par le centre.

(*) § 1. *Moment d'inertie d'un triangle quelconque* ABC *d'une hauteur* h *autour de sa base* b. — Ce sera, en faisant $h' = h\,\frac{u}{b}$ dans l'expression $\int du\,\frac{h'^3}{3}$ du corollaire du § 1 de la note précédente,



$$I = \frac{h^3}{3b^3}\int_0^b u^3 du \quad \text{ou} \quad I = \frac{bh^3}{12} = \omega\,\frac{h^2}{6}$$

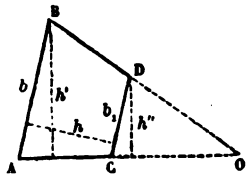
ou le produit de l'aire ω par le sixième du carré de la hauteur h; expression qui pouvait être trouvée sans parler d'intégration, d'après ce qu'on a dit aux §§ 2 et 3 de la même note.

On l'obtient encore, à la manière de M. Poncelet, en remarquant que l'*onglet* du § 1 de cette note du n° 81 est alors une pyramide eABC d'une hauteur $eB = h$, ou d'un volume $\omega\,\frac{h}{3}$, dont le centre de

(Du n° 82).

gravité, situé, comme on sait, au milieu de la droite qui joint les milieux de l'arête Be et de son opposée AC, est à une hauteur $\frac{h}{2}$ au-dessus du plan mené par AC perpendiculairement au plan du triangle ABC, ou à une distance $\frac{h}{4}$ de ce dernier plan, ce qui, en prenant les moments statiques des deux manières que nous avons dites, donne également $\omega \frac{h}{3} \times \frac{h}{2}$ ou $2.\omega \frac{h}{3} \times \frac{h}{4} = \omega \frac{h^2}{6}$ pour le moment d'inertie cherché.

§ 2. *Moment d'inertie d'un trapèze* ABDC *autour d'un de ses côtés non parallèles, les distances des deux sommets opposées* B, D *à ce côté* AC *étant* h', h'' :



$$I = \omega \frac{h'^2 + h''^2}{6}.$$

En effet, en prolongeant le côté BD jusqu'à sa rencontre en O avec celui AC aussi prolongé, et désignant par ω', ω'' les aires des triangles OAB, OCD, on a $\omega = \omega' - \omega''$ et $I = \omega' \frac{h'^2}{6} - \omega'' \frac{h''^2}{6}$; or la similitude de ces deux triangles donne

$$\frac{\omega'}{\omega''} = \frac{h'^2}{h''^2}; \text{ d'où } \omega' = h'^2 \frac{\omega}{h'^2 - h''^2}, \quad \omega'' = h''^2 \frac{\omega}{h'^2 - h''^2};$$

d'où, en substituant, $I = \frac{\omega}{6} \frac{h'^4 - h''^4}{h'^2 - h''^2}$ ou l'expression qu'on a écrite ci-dessus.

§ 3. *Idem du même trapèze autour d'un de ses côtés parallèles* AB $= b$, l'autre CD étant $= b_1$, et leur distance $= h$. — *Idem autour d'une parallèle passant par le centre de gravité.* — Comme on peut le décomposer en un parallélogramme $b_1 \times h$ et en un triangle $(b - b_1) \times \frac{h}{2}$, on aura (§ 1), autour de AB, $I = b_1 h \frac{h^2}{3} + (b - b_1) \frac{h}{2} \frac{h^2}{6}$; ou, comme $\omega = \frac{b + b_1}{2} h$:

$$I = \frac{b + 3b_1}{4} \frac{h^3}{3} = \omega \frac{h^2}{3} \cdot \frac{b + 3b_1}{2b + 2b_1}.$$

(Du n° 81).

Si l'on appelle k la distance, à la même base b, du centre de gravité du trapèze, on a, en posant une équation de moments statiques par rapport à cette base AB,

$$\omega k = b_1 h . \frac{h}{2} + (b - b_1)\frac{h}{2} . \frac{h}{3};$$

d'où

$$k = \frac{h^2}{\omega} . \frac{b + 2b_1}{6} = h \frac{b + 2b_1}{3b + 3b_1}.$$

Le moment d'inertie autour d'une parallèle aux bases, menée par le centre de gravité, sera ainsi, en vertu du théorème général de la fin de la note du n° 81 :

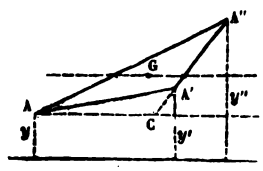
$$= \omega \frac{h^2}{3} \frac{b + 3b}{2b + 2b_1} - \omega k^2 = \frac{\omega h^2}{18}\left[1 + \frac{2bb_1}{(b + b_1)^2}\right] = \frac{h^3}{36} . \frac{b^2 + 4bb_1 + b_1^2}{b + b_1}.$$

§ 4. *Moment d'inertie d'un triangle* AA'A'' *autour d'une droite* AC *racée dans son plan par un de ses angles, z' et z'' étant les distances des deux autres angles* A', A'' *à cette droite* AC.

On aura

$$I = \frac{\omega}{6}(z'^2 + z'z'' + z''^2);$$

car si C est le point de rencontre de cette droite avec le côté A''A' prolongé, et si $AC = b$, on a pour l'aire du triangle $\omega = b\frac{z''}{2} - b\frac{z'}{2}$, d'où $b = \frac{2\omega}{z'' - z'}$, et (§ 1) $I = b\frac{z''^3}{12} - b\frac{z'^3}{12} = \frac{2\omega}{12}\frac{z''^3 - z'^3}{z'' - z'}$, expression identique avec l'autre.



§ 5. *Moment d'inertie du même triangle* AA'A'' *autour d'une ligne menée dans son plan par son centre de gravité* G. — En vertu du théorème général de la fin de la note du n° 81, on aura le moment autour d'une parallèle à AC, menée par le centre, en retranchant $\omega\left(\frac{z' + z''}{3}\right)^2$, ce qui donne

$$\frac{\omega}{18}(z'^2 - z'z'' + z''^2).$$

(Du n° 89).

D'où l'on déduit, en faisant $z' = y' - y$, $z'' = y'' - y$, pour *le moment d'inertie d'un triangle autour d'une ligne menée par son centre de gravité parallèlement à une autre ligne quelconque qui passe dans son plan à des distances* y, y', y'' *des trois sommets* :

$$\frac{\omega}{18}(y^2 + y'^2 + y''^2 - y'y'' - y''y - yy').$$

§ 6. *Idem autour de cette ligne tirée d'une manière quelconque dans son plan.* — On l'aura en ajoutant $\omega\left(\frac{y + y' + y''}{3}\right)^2$, ce qui donne

$$\frac{\omega}{6}(y^2 + y'^2 + y''^2 + y'y'' + y''y + yy'),$$

expression qui se réduit à

$$\frac{\omega}{12}(y^2 + y'^2 + y''^2), \quad \text{si} \quad y + y' + y'' = 0$$

ou si la ligne dont les distances aux sommets sont y, y', y'' passe par le centre de gravité ; et à

$$\frac{\omega}{2}h^2 \quad \text{si} \quad y = 0, \quad y' = y'' = h$$

ou si l'on prend le moment autour d'une parallèle à la base, menée par le sommet opposé.

§ 7. *Applications.* — Ces formules donnent des éléments de calcul commodes pour les moments d'inertie de figures polygonales en les divisant en triangles et en parallélogrammes ou en trapèzes.

Ce serait naturellement le lieu d'en donner l'application aux diverses formes de sections à côtes ou à nervures, etc. *Nous préférons en renvoyer le tableau*, raisonné et comparé, *à la note du n° 120*, art. IV, où il sera question de la *résistance à la rupture par flexion.*

83. Si la figure de la section transversale est un rectangle dont les côtés soient b, c, et si l'axe horizontal contenant les fibres invariables forme l'angle φ avec le côté b, on aura pour le moment de la résistance à la flexion

$$\varepsilon = \mathrm{E}\,\frac{b^3c\sin^2\varphi + bc^3\cos^2\varphi}{12}.$$

Ainsi, une pièce à base carrée résiste également dans tous les sens à la flexion. De plus, la base étant rectangulaire, et b étant le plus grand côté, la moindre valeur du moment a lieu lorsque la pièce fléchit dans le sens du côté c (*).

(*) § 1. *Erreur où conduirait la formule du n° 83. Condition pour que le plan de flexion soit le même que le plan de sollicitation à fléchir.* — Cette formule $\varepsilon = \ldots$ du texte non-seulement est sans usage, mais même, bien qu'exprimant exactement le produit de E par le moment d'inertie du rectangle autour d'une droite oblique à ses côtés, elle doit être regardée comme fausse si l'on entend qu'elle donne une valeur à mettre à la place de ε dans les formules des n°s 86 à 90 pour avoir la courbe du solide et sa flèche de flexion f.

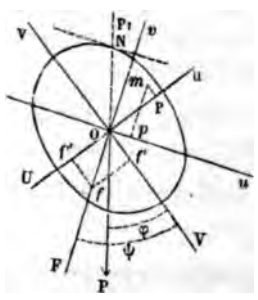
L'erreur à laquelle elle prête et où sont tombés plusieurs auteurs consiste à penser que le *plan de flexion*, auquel la ligne des fibres invariables est perpendiculaire, coïncide toujours avec *le plan où la pièce est sollicitée à fléchir*, c'est-à-dire le plan du plus grand moment M (§ 1 de la note du n° 80) des forces extérieures autour de droites tracées sur les sections, ou le plan qui passe par l'axe de la pièce et par celle des normales autour de laquelle le moment est nul.

C'est donc ici le lieu de montrer ce que nous avons dû énoncer d'avance à une note du n° 77 et au commencement du § 6 de la note du n° 80, à savoir que, pour que ces deux plans de *flexion* effective et de *sollicitation* à fléchir aient la même direction, une condition est nécessaire, celle que *le plan de sollicitation soit parallèle à l'un des axes principaux d'inertie des sections du prisme.* En effet, pour qu'il y ait équilibre de rotation entre les forces intérieures longitudinales $\mathrm{E}d\omega\,\frac{v}{\rho}$ (note du n° 80) s'exerçant à travers la section ω, et les forces extérieures sollicitant la partie du prisme entre

(Du n° 83).

cette section et une extrémité, il ne suffit pas qu'on ait l'équation $M = \frac{E}{\rho} \int v^2 d\omega$, exprimant que leurs moments autour de la ligne des fibres invariables sont égaux, il faut encore, au moins, comme l'a remarqué le premier M. Persy (*Cours à l'École d'artillerie et du génie*, lithographié à Metz en 1834; n°s 41 et 42, p. 24), une équation entre les moments autour d'une perpendiculaire à cette ligne, tracée aussi sur la section ω, c'est-à-dire autour du rayon ρ prolongé. Or si le moment des forces extérieures est supposé nul autour de cette perpendiculaire ou de ce rayon, on doit avoir, u étant les distances des éléments $d\omega$ à cet *axe des v*, $\int \frac{E}{\rho} v d\omega . u = 0$, d'où $\int_0^\omega uv d\omega = 0$, ce qui caractérise les axes principaux d'inertie.

§ 2. *Détermination de la grandeur et de la direction de la flexion lorsque cette condition de parallélisme du plan de sollicitation à l'un des axes principaux d'inertie des sections n'est pas remplie.* — Alors il n'y a pas lieu de chercher à poser une équation de moments *autour de la ligne des fibres invariables*, qui n'est pas connue *à priori*. C'est (comme on l'a montré pour la première fois à un mémoire inséré aux *Comptes rendus de l'Académie* les 30 octobre et 6 novembre 1843, t. XVII, p. 946 et 1024) autour des deux axes principaux d'inertie de la section ω qu'il convient d'exprimer l'équilibre de rotation pour arriver à déterminer la grandeur du rayon de courbure ρ, ainsi que sa *direction* ou celles de la ligne des fibres invariables et du plan de flexion, et par suite, les conditions de résistance.



Prenons pour coordonnées u, v d'un point ou élément m quelconque de la section ses distances $Op = u$, $mp = v$ à ces axes VOv, UOu passant par le centre de gravité O; et soient

$I' = \int v^2 d\omega$, $I'' = \int u^2 d\omega$ ses moments d'inertie *principaux*, ou autour de ces deux axes; on supposera généralement $I' > I''$;

φ l'angle aigu POV qui fait le plan de sollicitation P_1OP, avec l'axe Ov prolongé;

(Du n° 82).

ψ celui vOv que fait aussi, avec l'axe Ov, le plan encore inconnu de flexion FOv, ou l'angle égal uOu de la ligne des fibres invariables Ou avec l'axe principal Ou ;

v, comme ci-dessus, les distances mp des points ou éléments m à cette ligne Ou des fibres invariables ;

Nous avons $mp = m\text{p} \cos\psi + \text{Op} \sin\psi$, d'où pour la tension de la fibre ayant sa base en m,

$$\frac{E}{\rho} v d\omega = \frac{E}{\rho}(\text{v} \cos\psi + \text{u} \sin\psi)\, d\omega,$$

Multipliant successivement par les bras de levier v et u, pour substituer dans les équations $\text{M}\cos\varphi = \int \frac{E}{\rho} v d\omega . \text{v}$, $\text{M} \sin\varphi = \int \frac{E}{\rho} v d\omega . \text{u}$ de l'équilibre de rotation autour des axes principaux Ou, Ov, on a, en effectuant et ayant égard à $\int \text{uv} d\omega = 0$:

$$\text{M} \cos\varphi = \frac{\text{EI}'}{\rho} \cos\psi, \quad \text{M} \sin\varphi = \frac{\text{EI}''}{\rho} \sin\psi.$$

Si l'on divise ces deux équations l'une par l'autre on obtient une nouvelle équation, et l'on en a encore une en ajoutant les carrés après les avoir divisées respectivement par I' et I''. On trouve ainsi les expressions

$$\text{tang}\,\psi = \frac{\text{I}'}{\text{I}''} \text{tang}\,\varphi, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\text{M}}{\text{E}} \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{\text{I}'^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\text{I}''^2}},$$

dont la première donne la direction du plan de flexion affective ou celle de la ligne des fibres invariables, perpendiculaire à ce plan ; la seconde donne la courbure prise par l'axe du prisme.

§ 3. *Construction au moyen de l'ellipse d'inertie.* — Si l'on trace dans le plan de la section l'ellipse connue dont les demi-axes, portés sur Ou, Ov, sont proportionnels aux inverses $\frac{1}{\sqrt{\text{I}'}}$, $\frac{1}{\sqrt{\text{I}''}}$ des racines carrées des moments d'inertie autour de ces lignes, et dont l'équation est par conséquent $\text{I}'u^2 + \text{I}''v^2 =$ une constante quelconque, et si l'on y mène une tangente par le point N où elle est rencontrée

(Du n° 83).

par le plan PP_1, cette tangente sera parallèle à la ligne des fibres invariables Ou, car l'équation de l'ellipse donne le coefficient différentiel $\frac{dv}{du} = -\frac{I'}{I''}\frac{u}{v}$ qui est égal à $-\tang\psi$ au point N pour lequel on a le rapport $\frac{u}{v} = \tang\varphi = \frac{I''}{I'}\tang\psi$. *La ligne des fibres invariables est donc le diamètre conjugué à celui suivant lequel le plan de sollicitation coupe le plan de l'ellipse;* théorème qui a été trouvé en 1854 par M. Bresse à peu près en même temps que par nous, sous deux formes différentes (¹).

La *déviation* $\psi - \varphi$ du plan de flexion, ou son angle avec le plan de sollicitation, est à son maximum quand ce dernier plan passe par l'une des diagonales du rectangle circonscrit à l'*ellipse d'inertie;* et alors la ligne des fibres invariables est l'autre diagonale.

La même chose a lieu lorsque le contour de la section *est le rectangle lui-même.*

§ 4. *Détermination de la courbe d'axe ou de la flèche de flexion (comme complément anticipé aux n°s 86 à 89).* — La courbe d'axe s'obtiendra, comme dans le cas simple de flexion *non déviée* supposé tacitement aux n°s 86 à 89 ci-après, soit en égalant l'expression de $\frac{1}{\rho}$ du § 2 à $\frac{d^2y'}{dx^2}$, y' étant une coordonnée transversale prise dans le plan de flexion qu'on a déterminé et intégrant après avoir mis pour le moment M sa valeur en fonction de la coordonnée longitudinale x; soit, plus simplement, en appelant y, z, deux coordonnées transversales perpendiculaires aux axes des moments principaux I' et I'' et posant $\frac{d^2z}{d^2x} = \frac{M\cos\varphi}{EI'}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M\sin\varphi}{EI''}$ pour les courbures $\frac{\cos\psi}{\rho}$, $\frac{\sin\psi}{\rho}$ des projections de la courbe d'axe sur les plans xz, xy de plus difficile et de plus facile flexion; ce qui, en intégrant, donnera les équations de ces projections, qui seront semblables à celles des n°s 86 et 89, sauf les facteurs $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ dont on affectera le poids P ou p.

(¹) *Recherches sur la flexion des pièces courbes*, 1854. — *Bulletin de la Société philomathique*, addition à la séance du 8 juillet 1854, p. 74; ou journal *l'Institut*, 15 novembre.

(Du n° 83).

La *flèche de courbure* f est *résultante* de celles que feraient prendre séparément, à la pièce, les charges P cos φ, P sin φ agissant perpendiculairement aux axes principaux de la section ; c'est donc (n° 86 ci-après), si la longueur de la pièce est a et si elle est encastrée au bout opposé à celui où la charge P est supposée agir transversalement, la diagonale du rectangle formé sur les flèches composantes

$$f' = \frac{P\cos\varphi . a^3}{3EI'}, \quad f'' = \frac{P\sin\varphi . a^3}{3EI''}$$

respectivement perpendiculaires aux axes des moments I' et I'', ce qui donne :

Une flèche $f = \frac{Pa3}{3E}\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{I'^2} + \frac{\sin^2\varphi}{I''^2}} = \frac{a^2}{3\rho_m}$, ($\rho_m$ étant ρ pour $x = 0$),

Une descente verticale $f'\cos\varphi + f''\sin\varphi = \frac{Pa^3}{3E}\left(\frac{\cos^2\varphi}{I'} + \frac{\sin^2\varphi}{I''}\right)$,

Une déviation horizontale $f''\cos\varphi - f'\sin\varphi = \frac{Pa^3\sin\varphi\cos\varphi}{3E}\left(\frac{1}{I''} - \frac{1}{I'}\right)$.

On étendra facilement ces formules au cas d'une pièce posée sur deux appuis, et sollicitée à la fois comme aux n°s 87 et 90.

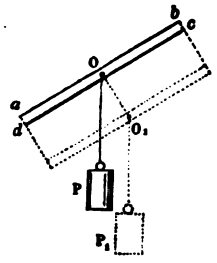
§ 5. *Application à une section rectangle. Évaluation des erreurs auxquelles donnerait lieu l'usage de la formule* $\varepsilon = \ldots$ *du texte du n° 83.* — Pour une section rectangle $b \times c$, où $I' = \frac{bc^3}{12}$, $I'' = \frac{b^3c}{12}$, le rapport de la flèche effective f à celle qu'on aurait par la formule $\frac{Pa^3}{3\varepsilon}$ avec la valeur de ε du texte, est $\left(\frac{\cos^2\varphi}{b^2} + \frac{\sin^2\varphi}{c^2}\right)\sqrt{b^4\cos^2\varphi + c^4\sin^2\varphi}$, ou $\frac{(b^2+c^2)\sqrt{2b^4+2c^4}}{4b^2c^2}$ si l'angle φ est demi-droit. Ce rapport est respectivement 1,257, 1,822, 3,557, lorsque l'un des côtés est 1 fois 1/2, 2 fois, 3 fois l'autre, en sorte que notre formule révèle des flexions contre lesquelles on ne serait point en garde d'après celles du texte.

§ 6. *Observation pour les pièces droites non prismatiques. Double courbure et torsion prises.* — On verra à l'article VII de la section IV

(Du n° 83).

(surtout aux n°s 498-507) que l'on peut appliquer approximativement les formules fondamentales relatives aux prismes à des pièces allongées non prismatiques. Mais si les sections transversales n'ont pas leurs axes principaux tous compris dans deux plans rectangulaires passant par l'axe longitudinal de la pièce, le plan de flexion effective changera d'une section à l'autre. L'axe de la pièce, bien que supposé primitivement rectiligne, prendra une double courbure, et il y aura, en même temps, torsion, quoique la pièce ne soit sollicitée en quelque sorte qu'à la flexion, ou par une force n'ayant de moment qu'autour de droites transversales. On a traité ce cas général aux *Comptes rendus de l'Académie*, 30 octobre et 6 novembre 1843, 1er et 15 juillet 1844, (t. XVII, p. 951, 1020, et XVIII, p. 40 et 185) ou à des *Mémoires sur la résistance des solides*, in-4°, 1844.

§ 7. *On peut présenter d'une manière très-élémentaire la théorie ci-dessus de la flexion oblique ou déviée.* — Pour cela, une expérience bien simple convaincra d'abord que la flexion ne s'opère pas toujours dans le plan de sollicitation à fléchir. Qu'une pièce très-mince, telle qu'une lame de fer-blanc, dont l'axe horizontal se projette en O et dont les faces sont inclinées à l'horizon, soit sollicitée, à l'extrémité opposée à celle qui est encastrée, par une force OP verticale et agissant par conséquent dans un sens oblique aux côtés de la section *abcd*; l'axe O ne s'infléchira pas dans le plan OP passant par sa direction primitive et par celle de la force, mais sensiblement dans le plan OO_1 perpendiculaire aux grands côtés *ab*, *dc*, comme si la force P avait agi dans la direction OO_1 perpendiculaire au plan de la lame.



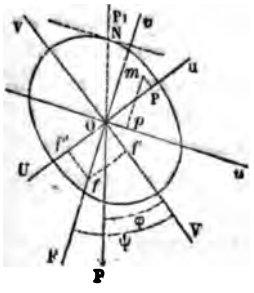
La raison de ce fait se conçoit facilement en général.

Dans tout prisme dont la section transversale n'a pas, comme le cercle et le carré, des moments d'inertie égaux autour de toutes les droites qu'on y trace par son centre de gravité, il y a *un plan de plus facile flexion et un plan de plus difficile flexion.* Ce sont les plans perpendiculaires respectivement aux axes autour desquels le mo-

(Du n° 83).

ment d'inertie est le plus petit et le plus grand. Si le plan de sollicitation passe entre les deux, la flexion effective s'opère aussi dans un plan intermédiaire, mais, on le comprend, *plus rapproché du plan de plus facile flexion* que n'était le plan de sollicitation ; en sorte que la ligne des fibres invariables ne sera point perpendiculaire à celui-ci comme elle l'est quand la pièce est sollicitée *à plat* ou *de champ*, c'est-à-dire dans le plan de plus facile ou le plan de plus difficile flexion.

§ 8. *Démonstration simple des propriétés des axes principaux.*— On peut prouver d'une manière facile, sans parler d'ellipse ni de lignes trigonométriques, que ces deux plans, ou les deux axes de plus grand et de plus petit moment d'inertie sont perpendiculaires entre eux et donnent $\int uv d\omega = 0$, ou (élémentairement) une somme nulle $auv + a'u'v' + \ldots\ldots = 0$ des produits des éléments a de la section A par les coordonnées qui leur sont parallèles. En effet, si l'on prend d'abord quelconques les deux axes rectangulaires des coordonnées u et v et si on les fait tourner autour de l'origine O, cette somme $auv + \ldots$ reprendra évidemment la même valeur avec signe contraire après chaque rotation d'un quart de circonférence, d'où il suit qu'elle passe par zéro pour une certaine position de ces axes rectangulaires ainsi que pour celle qui résulte de leur simple permutation dans les mêmes directions. Or si I′, I″ sont les moments d'inertie relatifs aux axes ainsi dirigés, et I_1 le moment autour d'une autre droite dont une longueur r a pour projections y et z sur ces axes particuliers des u et des v, la distance mp d'un élément m à cette droite Ou est $v\frac{y}{r} + u\frac{z}{r}$; d'où, en faisant la somme des produits des éléments par les carrés $\left(v\frac{y}{r} + u\frac{z}{r}\right)^2$ développés, et en ayant égard à $auv + a'u'v' + \ldots\ldots = 0$:



$$I_1 = I'\frac{y^2}{r^2} + I''\frac{z^2}{r^2}$$

(Du n° 88).

ou $I_1 = I'' + (I' - I'')\frac{y^2}{r^2} = I' - (I' - I'')\frac{z^2}{r^2}$ qui montre bien : 1° que I' et I'' sont nécessairement l'un le plus petit, l'autre le plus grand moment; 2° que dans le cas particulier où ces deux *moments principaux* ont la même grandeur, tous les autres leur sont aussi égaux.

§ 9. *Direction et grandeur de la courbure, déterminés élémentairement.* — Les axes *principaux* étant ainsi reconnus (voir §§ 10 et 11), on peut déterminer *élémentairement* la grandeur et la direction de la courbure $\frac{1}{\rho}$ en appelant M', M'' les moments des forces extérieures autour de ces axes, ce qui donne ces deux équations d'équilibre avec les forces intérieures $aE\frac{v}{\rho} = a\frac{E}{\rho}\left(v\frac{y}{r} + u\frac{z}{r}\right)$ s'exerçant à travers les éléments a, a'.... de la section :

$$M' = \frac{E}{\rho}\left[\frac{y}{r}(av^2 + a'v'^2 + \ldots) + \frac{z}{r}(auv + a'u'v' + \ldots)\right],$$

$$M'' = \frac{E}{\rho}\left[\frac{y}{r}(auv + a'u'v' + \ldots) + \frac{z}{r}(au^2 + a'u'^2 + \ldots)\right],$$

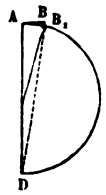
se réduisant à $M' = \frac{EI'}{\rho}\frac{y}{r}$, $M'' = \frac{EI''}{\rho}\frac{z}{r}$; d'où $\frac{z}{y} = \frac{I'}{I''}\frac{M''}{M'}$

et
$$\frac{E}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{M'}{I'}\right)^2 + \left(\frac{M''}{I''}\right)^2}.$$

On fait encore mieux sentir la raison de ce qui se passe en considérant le prisme comme éprouvant simultanément deux flexions sous l'action des moments composants M', M'; l'une donnant une courbure $\frac{1}{\rho'} = \frac{M'}{EI'}$ autour d'un des deux axes principaux de la section, l'autre une courbure $\frac{1}{\rho''} = \frac{M''}{EI''}$ autour du second axe, et produisant ainsi des déplacements à composer géométriquement ensemble d'après le principe de superposition du § 2 de la note du n° 21. Il est évident ainsi que le plan de la courbure résultante $\frac{1}{\rho}$ devra se rapprocher plus de celui du moment M'' que ne faisait le plan du

(Du n° 88).

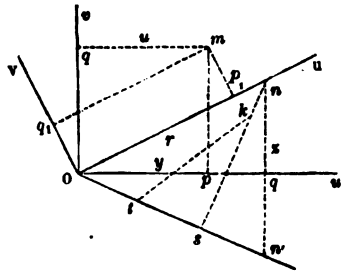
moment résultant M si l'on a $I'' < I'$. On obtient cette courbure résultante et son plan en considérant qu'en général le déplacement transversal BB_1 de l'extrémité B d'une très-petite ligne AB qui s'est courbée en arc de cercle AB_1 tangent en A à sa direction primitive, s'obtient en divisant le carré de sa longueur par le double AD du rayon, à cause des deux triangles rectangles semblables ABB_1, AB_1D; d'où il suit que si une petite longueur s de l'axe de la pièce (voyez fig. p. 58), se projetant en O avant la flexion, s'est courbée de manière que sa deuxième extrémité se soit déplacée de $Of' = \frac{s^2}{2\rho'}$ dans le sens OV, et de $Of'' = \frac{s^2}{2\rho''}$ dans le sens OU, on aura pour le déplacement résultant la diagonale $Of = \frac{s^2}{2}\sqrt{\frac{1}{\rho'^2} + \frac{1}{\rho''^2}}$ d'où, comme ci-dessus, pour la *grandeur* et la *direction* de la courbure



$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{1}{\rho'^2} + \frac{1}{\rho''^2}} = \frac{1}{E}\sqrt{\left(\frac{M'}{I'}\right)^2 + \left(\frac{M''}{I''}\right)^2}, \text{ tang FOV} = \frac{Of''}{Of'} = \frac{M''}{M'}\,\frac{I'}{I''}.$$

Cette théorie sera complétée à la note du n° 117, en ce qui regarde l'établissement des conditions de résistance à la rupture éloignée.

§ 10. *Détermination des axes et des moments principaux des figures planes.* — On voit toujours qu'il importe de savoir trouver les directions des axes principaux d'inertie d'une figure donnée. Rapportons pour cela ses éléments m ou $d\omega$ à deux axes rectangulaires coordonnés quelconques Ou, Ov, et calculons pour ces axes, $\int v^2 d\omega = I_1$, $\int u^2 d\omega = I_2$, $\int uv d\omega = K$; on aura, en raisonnant comme au § 8, pour le moment I autour d'une droite inclinée Ou, dont une portion $On = r$ a pour projections $Oq = y$, $qn = z$ sur ces axes, $I = \int\left(v\frac{y}{r} - u\frac{z}{r}\right)^2 d\omega$, ou



(Du n° 83).

$$I = I_1 \frac{y^2}{r^2} - 2K \frac{yz}{r^2} + I_2 \frac{z^2}{r^2} = \frac{I_2 + I_1}{2} - \left(\frac{I_2 - I_1}{2} \frac{y^2 - z^2}{r^2} + K \frac{2yz}{r^2} \right).$$

Or, si l'on prolonge nq de $qn' = nq$, la perpendiculaire ns abaissée de n sur On' a pour longueur 2 fois la projection de $nq = z$ sur sa direction, et la distance Os de son pied à l'origine a pour longueur la projection de y moins la projection de z sur On' ; d'où l'on conclut que $Os = y \frac{y}{r} - z \frac{z}{r}$, $ns = 2z \frac{y}{r}$, ou

$$\frac{Os}{On} = \frac{y^2 - z^2}{r^2}, \quad \frac{sn}{On} = \frac{2yz}{r^2};$$

en sorte que la parenthèse de l'expression de I représente la somme des projections, sur Onu, de deux longueurs $st = \frac{I_2 - I_1}{2}$, $sk = K$ portées respectivement sur sO et sur sn. Cette somme est la plus grande possible quand l'hypoténuse tk est parallèle à On, et sa grandeur est alors tk elle-même. On a donc, en vertu de ce raisonnement tout élémentaire (où l'on peut se passer de signe d'intégration comme au § 8), pour déterminer la direction d'un axe principal Ou et la grandeur d'un des deux moments d'inertie principaux, qui serait ici le plus petit :

$$\frac{ns}{Os} = \frac{2K}{I_2 - I_1}, \quad I = \frac{I_2 + I_1}{2} - \sqrt{\left[\frac{I_2 - I_1}{2}\right]^2 + K^2}.$$

En donnant le signe + au radical, on a l'autre moment principal ; car, pour un axe Ov perpendiculaire à Ou on aurait des rapports $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ égaux respectivement aux valeurs des rapports $\frac{-z}{r}$, $\frac{y}{r}$ relatifs à Ou, ce qui simplement change le signe de la parenthèse. On reconnaît, au reste, dans le rapport $\frac{ns}{Os}$ la tangente du double de l'angle que fait soit Ou soit Ov avec l'axe primitif Ou.

§ 11. *Théorèmes pour le calcul facile de* $K = \int uv d\omega$. — Il faut, comme on voit, pour déterminer ces directions et grandeurs des moments principaux, savoir calculer l'intégrale $\int_0^\omega uv d\omega$ pour une figure quelconque. On y parviendra facilement en la décomposant

(Du n° 83).

en rectangles et en triangles rectangles et se servant des trois théorèmes suivants, analogues à ceux que nous avons donnés pour le calcul facile des moments d'inertie [1].

1er. L'intégrale $K = \int uv d\omega$, pour des axes et pour une figure quelconques, est égale à la même intégrale pour la même figure et pour des axes parallèles dont un au moins passe par son centre de gravité, plus le produit $\omega u_0 v_0$ de son aire ω par les coordonnées u_0, v_0 de ce centre rapporté aux anciens axes [2].

2e. Cette intégrale K est nulle pour un rectangle ayant ses côtés parallèles à des axes des u, v dont un au moins passe par son centre et, plus généralement, pour toute figure symétrique par rapport à l'un des deux axes [3].

3e. Pour un triangle rectangle dont l'aire est ω et dont le centre de gravité est sur l'un des deux axes supposés parallèles aux côtés de l'angle droit, on a

$$K = \mp \frac{\omega^2}{18},$$

le signe — devant être pris quand les sens des u, v positifs sont ceux des côtés de l'angle droit pris à partir de cet angle, ou leur sont tous deux opposés, et le signe inférieur + devant être adopté quand un seul des deux demi-axes positifs a le même sens que le côté qui lui est parallèle [4].

(1) *Société philomathique*, 13 déc. 1856, ou journal *l'Institut*, 31 décembre.

(2) Car si u', v' sont les coordonnées par rapport à des axes parallèles passant tous deux par le centre de gravité, on a $K = \int (u' + u_0)(v' + v_0) d\omega$ qui, en vertu de $\int u' d\omega = 0$, $\int v' d\omega = 0$, est bien égal à $\int u'v' d\omega + \omega u_0 v_0$; et on a la même chose si un seul des deux axes parallèles passe par le centre, puisque $\int u'v' d\omega$ ne change pas lorsqu'on ajoute une constante, soit à u', soit à v'.

(3) Car elle se compose de termes $uv d\omega$ égaux deux à deux au signe près.

(4) Car si l'on prend d'abord pour origine l'un des deux angles aigus, pour axe des u le côté adjacent tiré de là à l'angle droit, et pour axe des v une parallèle à l'autre côté tiré à partir de l'angle droit, l'intégrale K relative au triangle est évidemment moitié de celle relative au rectangle double, ayant l'hypoténuse pour diagonale. Or celle-ci, en vertu des 1er et 2e théorèmes, aura pour grandeur, b et c étant les côtés, $bc \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2} = \left(\frac{bc}{2}\right)^2$. Donc, pour le triangle, on a $K = \frac{\omega^2}{2}$. D'où, par le 1er théorème, en prenant des axes parallèles dont un au moins passe par son centre, $K = \frac{\omega^2}{2} - \omega \cdot \frac{2b}{3} \cdot \frac{c}{3} = + \frac{\omega^2}{18}$, expression dont il faudra changer évidemment le signe quand on changera le sens d'un des deux axes.

84. Lorsque la figure de la section transversale (Fig. 4) est un cercle dont r est le rayon, l'expression générale du moment s devient

$$s = 2E\int_{-r}^{r} du \int_{0}^{\sqrt{r^2-u^2}} dv \,.\, v^2 = 2E\int_{-r}^{r} du \,.\, \frac{1}{3}(r^2-u^2)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= 2E.\,2\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} dx \,.\, \frac{r^4}{3}\sin^4 x = E\,\frac{\pi r^4}{4}.$$

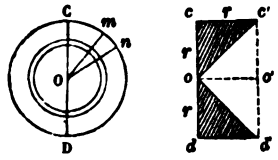
On conclut de ce qui précède que les résistances à la flexion du carré et du cercle qui lui est inscrit sont entre elles dans le rapport de 1 à $\frac{3\pi}{16}$ (*).

(*) § 1. *Détermination plus simple du moment d'inertie du cercle.* — On obtient plus facilement ce résultat en remarquant, avec feu M. l'ingénieur en chef de Guillebon (Cours lithographié, 1840-1841), que les moments d'inertie autour de tous les diamètres sont égaux et qu'on a ainsi, pour le cercle, $\int v^2 d\omega = \frac{1}{2}\int(u^2+v^2)d\omega =$ la moitié du moment d'inertie dit *polaire* (M. Persy) $\int z^2 d\omega$ de la section autour de son centre, z étant la distance du centre à l'élément $d\omega$. Or ce dernier moment, en réunissant ensemble tous les éléments pour lesquels z est le même et qui forment une couronne d'épaisseur dz et de superficie $2\pi z dz$, peut être mis sous la forme $2\pi\int_0^r z^3 dz$ et est égal à $2\pi\frac{r^4}{4}$. On a donc pour le moment autour d'un diamètre

$$I = \frac{\pi r^4}{4}.$$

§ 2. *Sa détermination élémentaire.* — Bien que l'intégrale $\int z^3 dz$ puisse être présentée et calculée élémentairement comme nous avons dit au § 2 de la note du n° 81, on peut aussi, et d'une manière plus complétement géométrique, appliquer à la détermination du moment d'inertie autour du centre une méthode analogue à celle qu'emploie M. Poncelet (même note) pour les moments autour de

(Du n° 84).



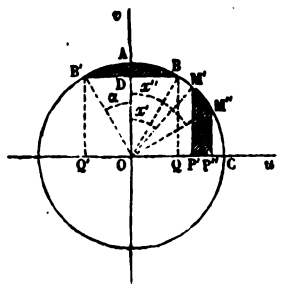
droites. On n'a qu'à imaginer qu'en chaque point de la section l'on ait élevé sur son plan une perpendiculaire égale à la distance de ce point au centre; on aura ainsi formé un solide dont la coupe, par un plan COD, est $cc'od'd$ et qui, pour le cercle, n'est autre chose qu'un cylindre droit évidé par un cône $c'od'$ de même base et de même hauteur. La somme des produits des éléments de ce solide par leurs distances à son axe oo' sera le moment d'inertie polaire cherché; or il est divisible en autant de pyramides Omn à base rectangulaire $mn \times cc' = mn \times r$ que la circonférence contient d'arcs élémentaires mn. La somme des produits dont on vient de parler, pour les éléments de cette petite pyramide, n'est autre chose que son moment statique par rapport à un plan mené par O parallèlement à sa base; elle a donc pour valeur le volume $mn \times r.\frac{r}{3}$ multiplié par la distance $\frac{3}{4}r$ de son centre de gravité à ce plan, ou

$$\frac{1}{4}r^3 \times mn;$$

et tel est le moment polaire du petit secteur dont l'arc est mn.

Ajoutant ceux de tous les secteurs, on a pour tout le cercle $\frac{1}{4}r^3 \times 2\pi r$, comme ci-dessus.

§ 3. *Moment d'inertie, moment statique et aire de portions d'un cercle de rayon* r. On les obtient par une intégration comme celle du texte.



1° Soit la portion P'M'M''P'' comprise entre l'arc $M'M'' = r(x'' - x')$ et les deux ordonnées

$$M'P' = r\cos x', \quad M''P'' = r\cos x''$$

perpendiculaires au diamètre OCu par rapport auquel on prend les moments. On aura

(Du n° 84).

$$\omega = \int_{r\sin x'}^{r\sin x''} d(r\sin x).r\cos x = r^2 \int_{x'}^{x''} dx.\cos^2 x = r^2 \left(\frac{\sin x''\cos x''}{2} + \frac{x''}{2} - \frac{\sin x'\cos x'}{2} - \frac{x'}{2}\right),$$

ent statique $\int d(r\sin x)\,\frac{(r\cos x)^2}{2} = \frac{r^3}{2}\int_{x'}^{x''} dx.\cos^3 x =$

$$= \frac{r^3}{2}\left(\frac{\sin x''\cos^2 x''}{3} + \frac{2\sin x''}{3} - \frac{\sin x'\cos^2 x'}{3} - \frac{2\sin x'}{3}\right).$$

ent d'inertie $\int d(r\sin x)\,\frac{(r\cos x)^3}{3} = \frac{r^4}{3}\int_{x'}^{x''} dx.\cos^4 x =$

$$\frac{r^4}{3}\left(\frac{\sin x''\cos^3 x''}{4} + \frac{3}{4}\frac{\sin x''\cos x''}{2} + \frac{3}{4.2}x'' - \frac{\sin x'\cos^3 x'}{4} - \frac{3}{4}\frac{\sin x'\cos x'}{2} - \frac{3}{4.2}x'\right) =$$

$$\frac{r^4}{3}\left[\frac{3}{8}(x''-x') + \frac{1}{4}(\sin 2x'' - \sin 2x') + \frac{1}{32}(\sin 4x'' - \sin 4x')\right].$$

2° Même portion lorsque les extrémités M′, M″ de l'arc sont à égale distance de celles A, C du quart de cercle AC. Alors

$$x'' = \frac{\pi}{2} - x', \quad \sin x'' = \cos x', \quad \cos x'' = \sin x' \quad \sin 2x'' = \sin 2x'.$$

Aire $\omega = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2x'\right)$.

Moment statique $= \frac{r^3}{6}(2 - \sin x'\cos x')(\cos x' - \sin x')$,

Moment d'inertie $I = \frac{r^4}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 2x' - \frac{\sin 4x'}{6}\right)$.

3° Portion QBAB′Q′ où l'arc est BAB′ $= 2r\alpha$ qui a sa corde parallèle à l'axe OCu. Alors $x' = -\alpha$, $x'' = \alpha$.

Aire $\omega = \frac{r^2}{2}(2\alpha + \sin 2\alpha)$.

Moment statique $\frac{r^3}{3}\sin\alpha(2 + \cos^2\alpha) = \frac{r^3}{6}\sin\alpha(5 + \cos 2\alpha)$.

Moment d'inertie $I = \frac{r^4}{3}\left(\frac{3}{4}\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\sin 4\alpha}{16}\right)$.

4° Segment BAB′D dont l'angle au centre est 2α et dont la corde est $c = 2r\sin\alpha$.

En retranchant des trois expressions (3°) qu'on vient d'obtenir ce qui est relatif au rectangle QBB′Q dont l'aire et les moments sont

(Du n° 84).

$$2r\sin\alpha\,.\,r\cos\alpha,\quad 2r\sin\alpha\,\frac{(r\cos\alpha)^2}{2},\quad 2r\sin\alpha\,\frac{(r\cos\alpha)^3}{3},$$

on a pour le segment

$$\text{Aire } \omega = \frac{r^2}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha) = \frac{2}{3}r^2\alpha^3\left(1 - \frac{\alpha^2}{5} + \frac{2\alpha^4}{105} - \ldots\right) =$$

$$= r^2\left(arc\sin\frac{c}{2r} - \frac{c}{2r}\sqrt{1 - \frac{c^2}{4r^2}}\right).$$

Moment statique $= \frac{2}{3}(r\sin\alpha)^3 = \frac{c^3}{12}$ autour du diamètre *parallèle à la corde.*

Moment d'inertie autour de *idem*, $I = r^4\left(\frac{\alpha}{4} - \frac{\sin 4\alpha}{16}\right) = \frac{2r^4\alpha^3}{3}\left(1 - \frac{4}{5}\alpha^2 + \frac{32}{105}\alpha^4 - \ldots\right)$

$$= r^4\left[\frac{1}{4}arc\sin\frac{c}{2r} - \frac{c}{8r}\left(1 - \frac{c^2}{2r^2}\right)\sqrt{1 - \frac{c^2}{4r^2}}\right].$$

5° Même segment. Moment d'inertie autour du diamètre *perpendiculaire à sa corde.* On l'obtient en faisant $x' = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $x'' = \frac{\pi}{2} + \alpha$ dans l'expression générale du 1°, ce qui donne

$$I = r^4\left(\frac{\alpha}{4} - \frac{\sin 2\alpha}{6} + \frac{\sin 4\alpha}{48}\right) = \frac{2r^4\alpha^5}{15}\left(1 - \frac{10}{21}\alpha^2 + \frac{1}{9}\alpha^4 - \ldots\right) =$$

$$= r^4\left[\frac{1}{4}arc\sin\frac{c}{2r} - \frac{c}{8r}\left(1 + \frac{c^2}{6r^2}\right)\sqrt{1 - \frac{c^2}{4r^2}}\right].$$

§ 4. *Moments d'inertie d'une ellipse autour de ses axes ou diamètres principaux* b, c. — Son moment I' autour de b se déduit facilement de celui du cercle ayant pour diamètre c; car, comme les deux figures peuvent être décomposées, par des ordonnées parallèles à c, en un même nombre de rectangles élémentaires de même hauteur chacun à chacun, ayant des bases comme b est à c, on obtiendra I' en multipliant par $\frac{b}{c}$ le moment $\frac{\pi}{4}\left(\frac{c}{2}\right)^4$ du cercle autour de son diamètre, et on aura de même I'', moment de l'ellipse autour du second axe c, en multipliant par $\frac{c}{b}$. Donc ces moments principaux de l'ellipse ont pour valeurs

$$I' = \frac{\pi bc^3}{64} = \frac{\omega c^2}{16},\quad I'' = \frac{\pi b^3 c}{64} = \frac{\omega b^2}{16}.$$

85. Le moment de flexion d'un tuyau est la différence des moments de flexion de deux cylindres ; r' et r'' étant les rayons extérieur et intérieur du tuyau, le moment sera

$$\varepsilon = E\,\frac{\pi(r'^4 - r''^4)}{4}\ (*).$$

Les moments d'inertie d'un segment d'ellipse ayant sa corde parallèle à l'un des deux axes, autour de cet axe et autour de l'autre, se déduiraient de la même manière, en multipliant par $\frac{b}{c}$ ou par $\frac{c}{b}$, les moments d'inertie des segments de cercle du paragraphe précédent.

(*) § 1. *Méthode de quadrature pour le calcul approximatif des moments d'inertie de figures quelconques.*—Nous renvoyons, comme nous avons dit, à la note du n° 120, le tableau des moments d'inertie des diverses autres figures usitées pour les pièces métalliques, etc.

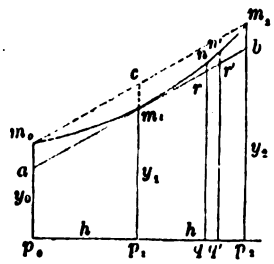
Mais c'est ici le lieu d'indiquer le calcul approximatif des moments de figures quelconques par la méthode dite de *quadrature*, trouvée par Thomas Simpson (*Mathematical dissertations*, 1743, p. 109), et qui est plus usuelle et aussi exacte que celle de Legendre, rapportée par Navier ci-après n° 352 à propos des voûtes.

§ 2. *Démonstration élémentaire de la formule de Simpson.* — *Élémentairement*, cette méthode générale d'évaluation d'une intégrale définie représentée par une aire comprise entre une portion de courbe, ses deux ordonnées extrêmes et l'axe des abscisses, peut être considérée comme substituant à cette courbe, au lieu d'une suite de très-petites lignes droites ou de *pente uniforme* sur l'axe des abscisses, une suite moins nombreuse de lignes un peu plus longues et de *pente uniformément croissante ou décroissante* qu'on peut astreindre toujours à passer, chacune, par trois points de la courbe, en disposant à la fois de la valeur initiale de leur pente et de la rapidité plus ou moins grande de sa variation.

Soit $m_0m_1m_2$ une pareille ligne, p_0p_2 la partie correspondante de l'axe des abscisses, $p_0m_0 = y_0$, $p_1m_1 = y_1$, $p_2m_2 = y_2$, les ordonnées de ses trois points m_0, m_1, m_2, et $p_0p_1 = p_1p_2 = h$, les parties de l'axe des abscisses répondant à leurs intervalles *supposés égaux*. Nous appelons sa pente, en un point quelconque n, la tangente de

(Du n° 85).

l'angle que fait avec l'axe des abscisses son élément nn', ou le rapport de l'accroissement de l'ordonnée à l'accroissement de l'abscisse quand on passe de ce point à un autre très-voisin n', rapport qui est aussi celui des projections de l'élément sur les deux axes coordonnés. Cette pente de la courbe, en n, surpassera par hypothèse sa pente en m_1, ou la pente de sa tangente $m_1rr'b$, d'une quantité proportionnelle à l'abscisse p_1q de n comptée depuis p_1; en sorte qu'en considérant les portions nr, $n'r'$ des deux ordonnées voisines nq, $n'q'$, prises seulement jusqu'à la tangente, la seconde $n'r'$ excédera la première nr d'une quantité proportionnelle à qq' et à l'abscisse p_1q dont qq' est l'incrément. Chaque portion semblable d'ordonnée, par exemple nr elle-même ou bien m_2b, résulte de l'accumulation, depuis m_1, de pareils excédants, proportionnels comme on voit aux produits des abscisses antérieures par leurs incréments successifs; ces portions d'ordonnées, comprises entre la moitié de courbe m_1m_2 et sa tangente en m_1, sont donc comme les aires des triangles rectangles qui auraient pour bases et pour hauteurs leurs abscisses respectives, et, par conséquent, sont comme les carrés de ces abscisses. De même les portions d'ordonnées de la partie de courbe m_1m_0, où la pente décroît à compter de m_1, comme croît celle de m_1m_2, seront proportionnelles aux carrés des portions d'abscisses correspondantes, comptées en arrière depuis p_1, en sorte qu'on aura la portion extrême d'ordonnée m_0a égale à celle m_2b.



Ayant ainsi établi cette propriété dont jouit notre courbe de pente uniformément croissante ou décroissante, d'*avoir ses portions d'ordonnées jusqu'à une même tangente, proportionnelles aux carrés des abscisses rectangulaires ou obliques comptées depuis le point de tangence*, nous pouvons conclure avec Simpson (qui la suppose *à priori* dans la courbe qu'il choisit) que les aires m_1bm_2, m_1am_0 seront le tiers des parallélogrammes égaux circonscrits m_1bm_0c, m_1am_0c, « par la même raison », dit-il, « que la pyramide,

(Du n° 85).

dont les sections faites par un plan parallèle à la base sont comme les carrés de leurs distances au sommet, est le tiers de son prisme circonscrit » (voyez d'ailleurs ce qu'on a démontré des sommes de produits appelés Vv, V^2v à la note du n° 81). Donc, continue Simpson, vu que l'aire du trapèze $p_0m_0m_2p_2$ est

$$\frac{p_0m_0 + p_2m_2}{2} \times p_0p_2 = (y_0 + y_2)h,$$

et que l'aire du trapèze p_0abp_2 est $p_0p_2 \times p_1m_1 = 2hy_1$, la première de ces deux quantités excède l'aire curviligne cherchée $p_0m_0m_1m_2p_2$ du double de ce dont cette aire excède la seconde ; donc « deux fois la seconde $2hy_1$ ajouté à une fois la première $h(y_0 + y_0)$ fera justement trois fois l'aire, » et par conséquent on aura pour cette aire elle-même comprise entre l'axe des abscisses, les deux ordonnées extrêmes y_0, y_2 distantes de $2h$, et la portion de courbe passant aux points m_0, m_1, m_2 :

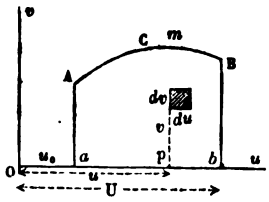
$$p_0m_0m_1m_2p_2 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_1).$$

§ 3. *Sa forme générale.* — D'où l'on conclut facilement, avec le même géomètre, en partageant une aire comprise entre une courbe et trois lignes droites, ou, plus généralement, entre deux courbes quelconques et deux lignes droites parallèles de longueurs y_0, y_{2n}, en un nombre pair $2n$ de zones par des ordonnées ou lignes équidistantes y_1, y_2... parallèles à celles-ci, dont elles sont distantes de h ainsi qu'entre elles, que si l'on substitue approximativement, aux courbes, des suites de lignes ayant une pente uniformément croissante sur les droites qui coupent toutes les ordonnées orthogonalement (ou des suites de *paraboles ordinaires à axe parallèle aux ordonnées.*), on a pour l'aire, ou pour l'intégrale définie à laquelle elle revient,

$$\int_{x_0}^{x_0+2nh} y\,dx = \frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\ldots+2y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}).$$

§ 4. *Deux manières de l'employer pour le calcul des moments d'inertie.* — En appliquant cette formule d'approximation au moment d'inertie d'une aire autour d'une ligne Ou, on peut prendre à volonté l'intégrale double $\int v^2 d\omega = \int v^2 du dv$, d'abord par rapport à v, ou d'abord par rapport à u.

(Du n° 85).



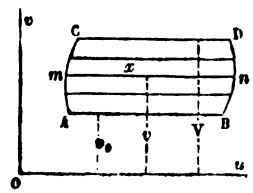
Prise d'abord par rapport à v, elle revient, pour la ligne comprise entre la courbe ACB et sa projection ab sur l'axe des abscisses u, en désignant par u_0, U les abscisses extrêmes Oa, Ob, et par y l'ordonnée pm du contour répondant à l'abscisse quelconque O$p = u$, à

$$I = \int_{u_0}^{U} \frac{y^3}{3}\, du.$$

M. Poncelet donne, en conséquence, en divisant la projection $U - u_0$ en $2n$ parties h et en appelant y_0, y_1 ... les coordonnées aux points de division, y compris les ordonnées extrêmes, cette formule d'approximation

$$I = \frac{h}{3}\left(\frac{y_0^3}{3} + 4\frac{y_1^3}{3} + 2\frac{y_2^3}{3} + 4\frac{y_3^3}{3} + \ldots + 4\frac{y^3_{2n-1}}{3} + \frac{y^3_{2n}}{3}\right).$$

Prise d'abord par rapport à u, l'intégrale I, pour une figure généralement comprise entre deux courbes AC, BD et deux parallèles AB, CD à l'axe des u (parallèles qui peuvent être nulles l'une ou l'autre ou toutes deux), en désignant par v_0, V les distances de ces parallèles à cet axe, et par x une parallèle quelconque mn à la distance v :



$$I = \int_{v_0}^{V} v^2 x\, dv.$$

M. Belanger donne en conséquence (Cours lithographié de Mécanique à l'École des ponts et chaussées, 1848-1849, n° 28, p. 17), en divisant la hauteur $V - v_0$ en $2n$ parties k et en appelant x_0, x_1 ... les parallèles aux points de division, y compris celles extrêmes AB, CD :

$$I = \frac{k}{3}\left[v^2_0 x_0 + 4(v_0 + k)^2 x_1 + 2(v_0 + 2k)^2 x_2 + \ldots + 4(v_0 + \overline{2n-1}.k)^2 x_{2n-1} + (v_0 + 2nk)^2 x_{2n}\right.$$

La première de ces deux formules sera préférable à la seconde lorsque, d'après la forme du contour de la figure, les diverses parties de la ligne ayant pour coordonnées u et $\frac{y^3}{3}$ seront plus assi-

86. Considérons, comme dans le n° 77, un solide prismatique droit (Fig. 5) encastré horizontalement d'une extrémité A, et chargé à l'autre extrémité d'un poids.

Nommons :

x l'abscisse Ap d'un point m de la courbe du solide comptée sur l'horizontale AB;
y l'ordonnée pm;
ρ le rayon du cercle osculateur de la courbe du solide en m;
P le poids placé à l'extrémité M du solide;
a la distance horizontale AB des deux extrémités du solide;
f l'ordonnée BM de l'extrémité de la courbe;
s la longueur AmM du solide;
α l'angle formé avec l'horizon par la tangente de la courbe du solide à l'extrémité M;
ε la valeur du moment de la résistance à la flexion du solide, dont l'expression générale est donnée n° 80.

L'équation d'équilibre du n° 79 est

$$\frac{\varepsilon}{\rho} = P(a - x),$$

---

milables à des paraboles à axe perpendiculaire aux u, que celles de la ligne ayant pour coordonnées v et xv^2 ne le seront à des paraboles à axe perpendiculaire aux v, ou quand les pentes de la première sur les u varieront plus régulièrement que les pentes de la seconde sur les v. On prendra la seconde formule dans le cas contraire.

Quand il y aura incertitude, ou quand on ne se sera pas donné la peine de faire une pareille comparaison, on pourra contrôler ces deux formules l'une par l'autre. Ou bien, on se contentera de contrôler le résultat de l'une des deux avec un certain nombre d'ordonnées, par celui qu'on obtient avec un nombre double.

Tout ceci se dirait également d'autres formules de quadrature que celle de Simpson, par exemple de celle que M. Poncelet a proposée il y a peu d'années, et qui se trouve exposée au *Traité élémentaire de Mécanique* de M. Sonnet, 1851.

c'est-à-dire

$$\varepsilon \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = P(a-x);$$

et, dans le cas où la flexion est très-petite, ce qui permet de négliger le carré de $\frac{dy}{dx}$, on a

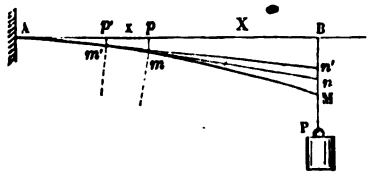
$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = P(a-x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = P\left(ax - \frac{x^2}{2}\right),$$

$$\varepsilon y = P\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right),$$

$$f = \frac{P}{\varepsilon}\frac{a^3}{3}, \quad s = a + \frac{3f^2}{5a}, \quad \text{tang}\,\alpha = \frac{3f}{2a} \text{ (*)}.$$

(*) § 1. *Démonstration élémentaire de l'expression* $f = \frac{Pa^3}{3\varepsilon}$ *de la flèche de courbure.*—Menons, à la courbe, deux tangentes infiniment voisines mn, $m'n'$. Elles intercepteront sur cette flèche ou ordonnée MB, qui leur est sensiblement perpendiculaire, une portion



$$nn' = mn.\frac{mm'}{\rho}$$

puisque leur angle est égal à celui des normales en m, m'. Appelant X la projection Bp de mn sur l'horizontale Bpp'A, et x son incrément pp', on aura $mn = X$, $mm' = x$ à cela près de quantités négligeables comme infiniment plus petites que mm', nn'; donc comme $\frac{1}{\rho} = \frac{PX}{\varepsilon}$, on a $nn' = \frac{P}{\varepsilon} X^2 x$. La somme de toutes ces quantités depuis $X = 0$ jusqu'à $X = a$, ou la flèche MB, sera bien $f = \frac{Pa^3}{3\varepsilon}$, soit qu'on intègre, soit qu'on assimile, comme on a dit dans la note

(Du n° 86).

du n° 81, la somme des X^2x au volume d'une pyramide ayant une base a^2 et une hauteur a.

§ 2. *La courbe élastique est une parabole du troisième degré avec inflexion en* M. — En effet, en faisant dans son équation

$$x = a - x'\cos\alpha, \quad y = y' + f - x'\sin\alpha,$$

ce qui est rapporter cette courbe à sa tangente en M prise pour axe oblique des x' et à MP pris pour axe des y', elle se réduit à

$$y' = \frac{f}{2}\left(\frac{x'\cos\alpha}{a}\right)^3.$$

La courbure est nulle au point M d'application de la force P.

§ 3. *Flèche et arc déterminés plus exactement. Expressions applicables quand la flexion n'est pas très-petite.* — On ramène, du reste, dans le cas général où la flexion est quelconque, la détermination de la courbe aux quadratures, ainsi que l'ont remarqué depuis longtemps Jacques Bernoulli (1) et Euler (2); et l'on peut obtenir son équation, soit par les transcendantes elliptiques (3), soit, comme on va le voir, en série ordinairement convergente.

Remarquons pour cela qu'en appelant s la longueur de l'arc de courbe Am, on a $ds^2 = dx^2 + dy^2$, $\frac{\varepsilon}{\rho} = \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{dx}$, d'où, pour première intégrale de l'équation $\frac{\varepsilon}{\rho} = P(a - x)$,

$$\frac{dy}{ds} = \frac{P}{\varepsilon}\left(ax - \frac{x^2}{2}\right);$$

valeur qui, substituée dans

(1) *Curvatura laminæ elasticæ.* Acta eruditorum, Lipsiæ, 1694, juin, p. 262, ou Œuvres, p. 576. Et, aussi, *Véritable hypothèse de la résistance des solides*, aux Mémoires de l'Académie, 1705.

(2) *Methodus inveniendi lineas curvas*, etc. Additamentum de *Curvis elasticis*, 1744.

(3) *Note sur les flexions considérables des verges élastiques*, au Journal de M. Liouville, 1844.

(Du n° 86).

$$dy = dx\,\frac{\frac{dy}{ds}}{\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}},\quad ds = \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}$$

donnera, si l'on intègre, les valeurs de

y et s en x.

Or si nous remplaçons $\left[1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$ par son développement

$$1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{dy}{ds}\right)^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{dy}{ds}\right)^6+\ldots\ldots,$$

l'intégration devient facile, et les termes des séries suivent une loi simple en faisant $a-x=x'$, d'où $\frac{dy}{ds}=\frac{P}{2\varepsilon}(a^2-x'^2)$. On a ainsi

$$\frac{f-y}{a}=\frac{Pa^2}{2\varepsilon}\left(\frac{x'}{a}-\frac{1}{3}\frac{x'^3}{a^3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{Pa^2}{2\varepsilon}\right)^3\left(\frac{x'}{a}-\frac{3}{3}\frac{x'^3}{a^3}+\frac{3}{5}\frac{x'^5}{a^5}-\frac{1}{7}\frac{x'^7}{a^7}\right)+$$
$$+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{Pa^2}{2\varepsilon}\right)^5\left(\frac{x'}{a}-\frac{5}{3}\frac{x'^3}{a^3}+\frac{10}{5}\frac{x'^5}{a^5}-\frac{10}{7}\frac{x'^7}{a^7}+\frac{5}{9}\frac{x'^9}{a^9}-\frac{1}{11}\frac{x'^{11}}{a^{11}}\right)+\ldots\ldots;$$

$$\frac{s-s}{a}=\frac{x'}{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{Pa^2}{2\varepsilon}\right)^2\left(\frac{x'}{a}-\frac{2}{3}\frac{x'^3}{a^3}+\frac{1}{5}\frac{x'^5}{a^5}\right)+$$
$$+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{Pa^2}{2\varepsilon}\right)^4\left(\frac{x'}{a}-\frac{4}{3}\frac{x'^3}{a^3}+\frac{6}{5}\frac{x'^5}{a^5}-\frac{4}{7}\frac{x'^7}{a^7}+\frac{1}{9}\frac{x'^9}{a^9}\right)+\ldots\ldots$$

D'où l'on tire, en faisant $x'=a$, $y=0$, $s=0$, pour la flèche f et pour la longueur totale s de l'arc de la courbe

$$\frac{f}{a}=\frac{1}{3}.\frac{Pa^2}{\varepsilon}+\frac{1}{5.7}\left(\frac{Pa^2}{\varepsilon}\right)^3+\frac{3}{7.9.11}.\left(\frac{Pa^2}{\varepsilon}\right)^5+\frac{5}{11\,13\,15}\left(\frac{Pa^2}{\varepsilon}\right)^7+\ldots\ldots$$

$$\frac{s}{a}=1+\frac{1}{3.5}\left(\frac{Pa^2}{\varepsilon}\right)^2+\frac{1.3}{5.7.9}\left(\frac{Pa^2}{\varepsilon}\right)^4+\frac{1.3.5}{7.9.11.13}\left(\frac{Pa^2}{\varepsilon}\right)^6+\ldots$$

Et comme la valeur de $\frac{dy}{ds}$ pour $x=a$ ou $x'=0$ est $\sin\alpha$, on a

$$\sin\alpha=\frac{Pa^2}{2\varepsilon},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{Pa^2}{2\varepsilon}+\frac{1}{2}\left(\frac{Pa^2}{2\varepsilon}\right)^3+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{Pa^2}{2\varepsilon}\right)^5+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{Pa^2}{2\varepsilon}\right)^7+\ldots$$

87. Quand le solide est posé horizontalement par deux appuis (Fig. 6), les équations précédentes conviennent à la courbe formée par chacune des moitiés. Nommant :

f la flèche AC de la courbe du solide ;
2P le poids suspendu au milieu du solide ;
$2a$ la distance MM′ des appuis ;
$2s$ la longueur MAM′ du solide entre les appuis ;
α l'inclinaison de la courbe à l'extrémité M′ ;

on a, en supposant la courbure du solide très-petite,

$$f = \frac{P}{\varepsilon}\frac{a^3}{3} = \frac{2P}{\varepsilon}\frac{(2a)^3}{48}$$

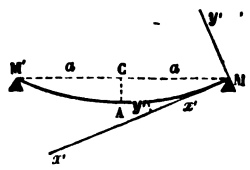
$$s = a + \frac{3f^2}{5a}, \qquad \tang\alpha = \frac{3f}{2a}.$$

La flèche de courbure est proportionnelle au poids 2P et au cube de la distance des appuis (*).

La courbe complète infléchie en M a sa tangente parallèle à l'axe des x ou x' aux points $x' = \pm a$, et parallèle à l'axe des y aux points $x' = \pm a\sqrt{1 + \frac{2\varepsilon}{Pa^2}}$ quand $\frac{Pa^2}{2\varepsilon}$ reste plus petit que 1. Elle présente alors une infinité de circonvolutions égales entre les deux droites que déterminent ces dernières valeurs de x', et offrant une symétrie alterne par rapport à la direction de la force P. C'est la quatrième des neuf espèces de courbes élastiques planes d'Euler.

(*) § 1. *Calcul d'une valeur plus approchée de la flèche d'une pièce posée.*—Pour l'obtenir, il faut, comme quelques auteurs anglais (mais avec plus d'exactitude), avoir égard à ce que la réaction des appuis M, M′ n'est pas verticale. Nous la regarderons comme *normale* à la pièce fléchie ; car il n'est pas nécessaire de faire entrer en considération le frottement qui agit tantôt dans un sens tantôt dans le sens opposé pour peu que la pièce et le poids suspendu 2P oscillent. Cette réaction normale est, pour chaque appui, $\frac{P}{\cos\alpha}$ puisque sa composante verticale est P ; et elle a une composante horizontale $\frac{P}{\cos\alpha}\sin\alpha$, en sorte que l'équation complète des moments est

Du n° 87).



$\frac{\varepsilon}{\rho} = P(a-x) + P\,\text{tang}\,\alpha(f-y)$. Mais on n'a plus de terme en y au second membre et on rend l'équation intégrable par quadratures en prenant d'autres coordonnées x', y', dont les axes sont la tangente et la normale au point M, ce qui donne pour équation, s' étant l'arc à partir de ce point :

$$\frac{\varepsilon}{\rho} = \varepsilon\frac{d\left(\frac{dy'}{ds'}\right)}{dx'} = \frac{P}{\cos\alpha}x'; \quad \text{d'où} \quad \frac{dy'}{ds'} = \frac{P}{\varepsilon\cos\alpha}\frac{x'^2}{2}.$$

Cette intégrale première donne une relation entre les inconnues f et α en faisant $x' = a\cos\alpha + f\sin\alpha$, qui est sa valeur au point milieu A de la pièce posée, et $\frac{dy'}{ds'} = \sin\alpha$; on a ainsi

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{P}{\varepsilon}(a\cos\alpha + f\sin\alpha)^2;$$

d'où
$$\frac{f}{a} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \sqrt{\frac{2\varepsilon}{Pa^2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}},$$

différence de deux quantités très-grandes.

On obtient une seconde relation entre f et α en mettant pour $\frac{dy'}{ds'}$ sa valeur $\frac{Px'^2}{2\varepsilon\cos\alpha}$ dans la série obtenue à la note précédente

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy'}{ds'} + \frac{1}{2}\left(\frac{dy'}{ds'}\right)^3 + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{dy'}{ds'}\right)^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{dy'}{ds'}\right)^7 + \ldots,$$

et intégrant de manière que $y' = 0$ pour $x' = 0$; ce qui donne

$$y' = \frac{P}{2\varepsilon\cos\alpha}\frac{x'^3}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{P}{2\varepsilon\cos\alpha}\right)^3\frac{x'^7}{7} + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{P}{2\varepsilon\cos\alpha}\right)^5\frac{x'^{11}}{11} + \ldots;$$

puis, en remarquant que cette équation de la courbe élastique doit être satisfaite, pour le point A, par

$$x' = a\cos\alpha + f\sin\alpha = \sqrt{\frac{2\varepsilon\sin\alpha\cos\alpha}{P}}, \quad y' = a\sin\alpha - f\cos\alpha.$$

On tire ainsi

$$\frac{f}{a} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \sqrt{\frac{2\varepsilon}{Pa^2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\cdot\left(\frac{1}{1}\frac{\sin\alpha}{3} + \frac{1}{2}\frac{\sin^3\alpha}{7} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\sin^5\alpha}{11} + \ldots\right).$$

(Du n° 87).

Pour avoir α, on n'a qu'à éliminer $\frac{f}{a}$, ou à égaler les deux valeurs de ce rapport, ce qui fournit :

$$\sqrt{\frac{Pa^2}{2\varepsilon\sin\alpha\cos\alpha}} = \cos\alpha + \frac{1}{1}\frac{\sin^2\alpha}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^4\alpha}{7} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\sin^6\alpha}{11} + \\ + \frac{1.3\,5}{2.4.6}\frac{\sin^8\alpha}{15} + \ldots,$$

ou, en élevant au carré :

$$\frac{Pa^2}{2\varepsilon} = \sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}\left(\sqrt{1-\sin^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{3} + \frac{\sin^4\alpha}{14} + \frac{3\sin^6\alpha}{88} + \ldots\right)^2 = \\ = \sin\alpha - \frac{5}{6}\sin^3\alpha - \frac{19}{504}\sin^5\alpha - \frac{223}{11088}\sin^7\alpha + \ldots;$$

d'où, par la formule générale de retour des suites

$$X = \frac{Y}{A} - \frac{C}{A}\left(\frac{Y}{A}\right)^3 + \left[3\left(\frac{C}{A}\right)^2 - \frac{E}{A}\right]\left(\frac{Y}{A}\right)^5 - \left[12\left(\frac{C}{A}\right)^3 + 2\frac{CE}{AA} + \frac{G}{A}\right]\left(\frac{Y}{A}\right)^7 + \ldots,$$

qu'on tire, par coefficients indéterminés, de $Y = AX + CX^3 + EX^5 + GX^7 + \ldots$,

$$\sin\alpha = \frac{Pa^2}{2\varepsilon} + \frac{5}{6}\left(\frac{Pa^2}{2\varepsilon}\right)^3 + \frac{1069}{504}\left(\frac{Pa^2}{2\varepsilon}\right)^5 + \ldots$$

et, par conséquent,

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tang}\alpha = \frac{Pa^2}{2\varepsilon} + \frac{4}{3}\left(\frac{Pa^2}{2\varepsilon}\right)^3 + \frac{236}{63}\left(\frac{Pa^2}{2\varepsilon}\right)^5 + \ldots$$

Substituons dans la seconde valeur de $\frac{f}{a}$, nous trouvons, tout calcul fait, cette expression pour la flèche f de la pièce $2a$ posée sur deux appuis et chargée au milieu d'un poids $2P$:

$$\frac{f}{a} = \frac{1}{3}\frac{Pa^2}{\varepsilon} + \frac{2}{21}\left(\frac{Pa^2}{\varepsilon}\right)^3 + \frac{349}{5376}\left(\frac{Pa^2}{\varepsilon}\right)^5 + \ldots,$$

légèrement différente, dès le second terme, de celle de $\frac{1}{3}\frac{Pa^2}{\varepsilon} + \frac{1}{35}\left(\frac{Pa^2}{\varepsilon}\right)^3 + \frac{1}{231}\left(\frac{Pa^2}{\varepsilon}\right)^5 + \ldots$, trouvée à la note précédente pour le cas d'encastrement.

§ 2. *Expression de la plus grande dilatation en fonction de la*

83. En considérant toujours, comme dans le n° 86, un solide prismatique droit (Fig. 7), encastré horizontalement à une extrémité, on peut le supposer chargé, dans tous les points de sa longueur, de poids distribués d'une manière quelconque. Nommant :

x, y les coordonnées horizontale et verticale d'un point quelconque m de la courbe du solide;

x' l'abscisse d'un point quelconque m' situé entre m et l'extrémité M ;

a la distance AB;

p' la valeur du poids suspendu en m', rapporté à l'unité de longueur de l'abscisse, en sorte que $p'dx'$ est le poids supporté par l'élément dont la projection est dx' (la quantité p' est censée donnée en fonction de x');

f l'ordonnée BM de l'extrémité de la courbe;

on aura

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=\int_x^a dx'.p'(x'-x),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}=\int_0^x dx\int_x^a dx'.p'(x'-x),$$

$$\varepsilon y=\int_0^x dx\int_0^x dx\int_x^a dx'.p'(x'-x).$$

---

flèche. — En appelant (comme on fera au n° 113) v' la distance, à la ligne des fibres invariables, de la fibre qui en est le plus éloignée, et i sa dilatation ou contraction pour la section $x=a$ où la courbure est la plus grande, on a

$$i=\frac{v'}{\rho},\quad \frac{1}{\rho}=\frac{Pa}{\varepsilon}.$$

Or, l'expression précédente de $\frac{f}{a}$ donne, par retour des suites,

$$\frac{Pa^2}{\varepsilon}=\frac{3f}{a}-\frac{2}{7}\left(\frac{3f}{a}\right)^3+\frac{629}{12544}\left(\frac{3f}{a}\right)^5+\ldots$$

On a donc la plus grande dilatation des fibres :

$$i=\frac{3fv'}{a^2}\left(1-\frac{18}{7}\frac{f^2}{a^2}+\frac{50949}{12544}\frac{f^4}{a^4}-\ldots\right).$$

89. Si les poids portés par chacun des éléments de la longueur du solide sont égaux, ce qui comprend le cas où ces poids seraient ceux mêmes des éléments, p' aura une valeur constante p, et l'on aura

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=p\left(\frac{a^2}{2}-ax+\frac{x^2}{2}\right),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}=p\left(\frac{a^2x}{2}-\frac{ax^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right),$$

$$\varepsilon y=p\left(\frac{a^2x^2}{4}-\frac{ax^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right),$$

$$f=\frac{p}{\varepsilon}\frac{a^4}{8},\qquad \text{tang}\alpha=\frac{4f}{3a}.$$

pa est le poids total reporté sur la longueur du solide. D'après le n° 86, si ce poids était appliqué en M, l'abaissement de ce point serait plus grand, dans le rapport de 8 à 3 (*).

(*) § 1. *Observation générale.* — L'équation $\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=\ldots$ posée aux n°s 88 et 89 n'est autre chose que celle $\frac{EI}{\rho}=M$ démontrée, dans la note du n° 81, seulement pour des forces agissant aux extrémités d'une portion finie d'un prisme. On peut l'étendre approximativement au cas, ici considéré, de forces agissant d'une manière continue sur sa longueur, par une raison semblable à celles qui ont été données au § 6 de la note du n° 80 pour appliquer la même équation à un mode de distribution quelconque des forces dont le moment est M.

§ 2. *Manière plus simple de poser l'équation du n° 89.* — Elle consiste à remarquer que les forces agissant sur la partie mM dont la longueur est $a-x$, peuvent être remplacées par une force unique égale à leur somme $p(a-x)$ appliquée au milieu de cette partie, en sorte que son bras de levier est $\frac{a-x}{2}$, et, en égalant leur moment à celui des forces intérieures, on a $\frac{\varepsilon}{\rho}$ ou $\varepsilon\frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{(a-x)^2}{2}$.

§ 3. *Flèche $f=\frac{pa^4}{8\varepsilon}$ déterminée d'une manière élémentaire.* — On

90. Lorsqu'un solide, posé horizontalement sur deux appuis (Fig. 8), est chargé par des poids distribués uniformément sur sa longueur, chaque moitié est dans le même cas que si, étant encastrée horizontalement à une extrémité, elle était fléchie à la fois par des poids distribués uniformément sur sa longueur, et par une force égale à la somme de ces poids, et agissant en sens contraire à l'autre extrémité. On a donc

$$\varepsilon y = pa\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - p\left(\frac{a^2x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right),$$

$$f = \frac{p}{\varepsilon}\frac{5a^4}{24}, \qquad \tang\alpha = \frac{8f}{5a}.$$

D'après le n° 87, si le poids $2pa$ était suspendu au milieu du so-

---

y arrive comme au § 1 de la note du n° 86, en mettant $pX\frac{X}{2}$ au lieu de PX, d'où l'élément nn' de la flèche $= \frac{p}{2\varepsilon}X^3x$ dont la somme, de $X=0$ à $X=a$, est bien (§§ 2 et 3 de la note du n° 81) $\frac{pa^4}{8\varepsilon}$.

§ 4. *Expression analytique plus approchée de cette flèche* f *et de l'angle* α. — On les obtient, principalement pour le cas où la flexion n'est pas très-petite, en posant, comme à la note du n° 86, $\varepsilon\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{dx} = p\frac{(a-x)^2}{2}$, ce qui, en faisant $a-x=x'$, $\frac{dy}{ds} = \frac{p}{6\varepsilon}(a^3-x'^3)$, substituant dans $dy = dx\left[\frac{dy}{ds} + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^3 + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{dy}{ds}\right)^5 + \ldots\right]$, et intégrant, donne une expression de $f-y$ en série ; sa valeur pour $x'=a$ ou $x=0$, $y=0$, est, en divisant par a :

$$\frac{f}{a} = \frac{1}{2}\frac{pa^3}{4\varepsilon} + \frac{3}{35}\left(\frac{pa^3}{4\varepsilon}\right)^3 + \frac{9}{364}\left(\frac{pa^3}{4\varepsilon}\right)^5 + \ldots\ldots$$

Et l'on a $\sin\alpha$ égal à la valeur de $\frac{dy}{ds}$ pour $x'=0$, d'où

$$\sin\alpha = \frac{pa^3}{6\varepsilon}, \quad \tang\alpha = \frac{pa^3}{6\varepsilon} + \frac{1}{2}\left(\frac{pa^3}{6\varepsilon}\right)^3 + \frac{3}{8}\left(\frac{pa^3}{6\varepsilon}\right)^5 + \ldots$$

lide au lieu d'être répartie uniformément sur toute sa longueur, la flèche serait plus grande dans le rapport de 8 à 5. Ces résultats sont confirmés par l'expérience (*).

(*) § 1. *L'équation de la courbe s'étend à ses deux moitiés dans ce cas, mais non lorsqu'il y a un poids* 2P *suspendu au milieu.* — On voit en effet que l'équation, qui se réduit à $\varepsilon y = p\left(\frac{a^2x^2}{4} - \frac{x^4}{24}\right)$ donne des valeurs de y égales lorsqu'on change x en $-x$. Mais il n'en est pas de même de l'équation $\varepsilon y = \mathrm{P}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$ du n° 86; les deux moitiés, quand il y a un poids suspendu au milieu, sont deux courbes différentes, qui ne font que se raccorder ou qui ont une tangente commune et le même rayon de courbure à leur jonction.

§ 2. *Raccordements à tous les points où il y a des forces isolées, ou discontinuité d'action. Petits angles résultant des glissements à ces points.* — La même chose s'observera constamment par la suite. En tous les points des prismes fléchis où il y a des forces extérieures isolées, comme en tous ceux où les forces réparties changent d'intensité par unité de longueur, la courbe change aussi. Il n'est pas nécessaire, pour avoir la suite de ces changements, de recourir aux formules de *discontinuité*, employées par Poisson, principalement au n° 324 de la deuxième édition (1833) de son *Traité de mécanique*; on peut établir successivement les équations des diverses parties, en déterminant les constantes de manière qu'à leurs jonctions elles aient, avec le même rayon de courbure, une tangente commune, à moins qu'on ne tienne compte des glissements, car alors (voyez notes des n°s 152 à 155) les deux tangentes doivent faire entre elles un petit angle.

§ 3. *Approximation un peu plus grande de la flèche de courbure* f *et de l'angle* α *des inclinaisons extrêmes pour la pièce posée et chargée uniformément, avec un poids additionnel au milieu.* — En raisonnant comme au § 1 de la note du n° 87, et en supposant que la pièce supporte, outre la charge 2P au milieu, le poids $2pa$ réparti uniformément sur sa longueur, on peut poser une équation d'équilibre (dont le dernier terme n'est qu'approché).

91. Pour appliquer les résultats précédents à un corps donné, il faudra substituer à la place de ε l'expression du moment de flexion qui convient à la figure de la section transversale de ce corps, conformément aux n°s 80 et suivants. On attribuera à la constante E (n° 77) la valeur qui convient à la nature du corps et qui doit être déterminée par l'observation.

Les expériences les plus propres à déterminer cette valeur consistent à placer horizontalement un solide prismatique sur deux appuis, à le charger au milieu d'un poids et à observer la flèche de la courbure produite par ce poids. Si la section transversale du solide est un rectangle (Fig. 2) dont les côtés soient b et c, on a (n° 81), $\varepsilon = E\frac{bc^3}{12}$, et (n° 87) $f = \frac{2P}{\varepsilon}\frac{(2a)^3}{4^3}$: donc

---

$$\varepsilon\,\frac{d\left(\frac{dy'}{ds'}\right)}{dx'} = \frac{P+pa}{\cos\alpha}\,x' - px'\,\frac{x'}{2\cos\alpha}$$

et en tirer, de même, deux équations entre les inconnues α et $\frac{f}{a}$. Elles sont compliquées et ne peuvent se résoudre que par tâtonnement en attribuant des valeurs numériques à $\frac{Pa^2}{\varepsilon}$ et $\frac{pa^3}{\varepsilon}$. Mais nous pouvons nous contenter, pour avoir une formule générale donnant une approximation, de retrancher les valeurs

$$\frac{f}{a} = \frac{1}{2}\frac{pa^2}{4\varepsilon} + \frac{3}{35}\left(\frac{pa^2}{4\varepsilon}\right)^3 \text{ et } \operatorname{tang}\alpha = \frac{pa^3}{6\varepsilon} + \frac{1}{2}\left(\frac{pa^3}{6\varepsilon}\right)^3$$

obtenues, à la fin du § 4 de la note du n° 89, pour une pièce encastrée et uniformément chargée, des valeurs des mêmes quantités obtenues à la fin du § 1 de la note du n° 87, en mettant, dans celles-ci, $P+pa$ au lieu de P, réaction verticale de chaque appui; ce qui donne

$$\frac{f}{a} = \frac{8P+5pa}{24}\frac{a^2}{EI} + \left[\frac{2}{21}(P+pa)^3 - \frac{3}{2240}(pa)^3\right]\left(\frac{a^2}{EI}\right)^3$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{3P+2pa}{6}\frac{a^2}{EI} + \left[\frac{1}{6}(P+pa)^3 - \frac{1}{432}(pa)^3\right]\left(\frac{a^2}{EI}\right)^3.$$

$$f = \frac{2P}{E}\frac{(2a)^3}{4.bc^3}, \quad E = 2P\frac{(2a)^3}{4.bc^3.f}$$

$2a$ étant l'intervalle des appuis et 2P le poids placé au milieu de la longueur du solide.

Si la section transversale est un cercle, on a

$$f = \frac{2P}{E}\frac{(2a)^3}{12\pi.r^4}, \quad E = 2P\frac{(2a)^3}{12\pi r^4.f},$$

r désignant le rayon du cercle.

92. On doit quelquefois tenir compte de l'action du poids du solide. On y parviendra, d'après le n° 90, en ajoutant à 2P les 5/8 de ce poids. Ainsi, en le désignant par 2Π, on a pour le cas d'une section rectangulaire

$$f = \frac{2P + \frac{5}{8}.2\Pi}{E}\frac{(2a)^3}{4.bc^3}, \quad E = \left(2P + \frac{5}{8}.2\Pi\right)\frac{(2a)^3}{4bc^3.f},$$

et pour le cas d'une section circulaire

$$f = \frac{2P + \frac{5}{8}.2\Pi}{E}\frac{(2a)^3}{12\pi.r^4}, \quad E = \left(2P + \frac{5}{8}.2\Pi\right)\frac{(2a)^3}{12\pi r^4.f} \text{ (*)}.$$

(*) § 1. *Généralisation et approximation plus grande.* — Quelle que soit la section dont nous appellerons I le moment d'inertie, et qu'*on suppose sollicitée parallèlement à l'un de ses axes principaux* (note du n° 83), on a

$$f = \left[2P + \frac{5}{8}(2pa)\right]\frac{(2a)^3}{48EI}, \quad \text{d'où} \quad E = \left[2P + \frac{5}{8}(2pa)\right]\frac{(2a)^3}{48If}.$$

Plus approximativement, en se servant de la valeur développée de $\frac{f}{a}$ en $\frac{a^3}{EI}$ de la fin du § 3 de la note du n° 90, et en se fondant sur ce qu'en général, par le retour des restes suivi d'une division :

$$\text{expression } Y = AX + CX^3 + \ldots\ldots \text{ donne } \frac{1}{X} = \frac{A}{Y}\left[1 + \frac{C}{A}\left(\frac{Y}{A}\right)^2 + \ldots\ldots\right]$$

on tirera la valeur de $\frac{EI}{a^3}$, d'où

93. On remarquera enfin qu'il n'est pas nécessaire de connaître les valeurs absolues du poids placé au milieu du solide et de la flèche de courbure correspondante, mais seulement l'accroissement de la flèche de courbure correspondant à un accroissement donné de ce poids. En effet, nommant P′, P″ deux valeurs successives de P, et f', f'' les deux valeurs correspondantes de f, l'une ou l'autre des équations précédentes donne pour une section rectangulaire

$$E = (2P'' - 2P')\frac{(2a)^3}{4bc^3(f'' - f)}.$$

Nous allons maintenant exposer les résultats des expériences connues, d'après lesquelles on peut déterminer les valeurs de la constante E qui conviennent à divers corps. Ces valeurs ne peuvent être données exactement qu'au moyen d'expériences

---

$$E = \left(2P + \frac{5}{8}2pa\right)\frac{(2a)^3}{48.If}\left[1 + \frac{72}{7}\frac{(2P + 2pa)^3 - \frac{9}{640}(2pa)^3}{\left(2P + \frac{5}{8}2pa\right)^3}\left(\frac{f}{2a}\right)^2\right]$$

§ 2. *Emploi de la flexion circulaire.* — M. Ernest Lamarle a fait, à Gand [1], des expériences sur lesquelles nous reviendrons, où des pièces horizontales étaient fléchies par deux poids égaux P suspendus à des distances égales k des extrémités soutenues ; en sorte que le moment de flexion $\frac{EI}{\rho}$, entre les deux points de suspension des poids, était constant et égal à celui Pk de chacun des couples qui agissaient de part et d'autre. En appelant $2a$ la distance de ces points, f la flèche au-dessous de leur niveau, on a $a^2 + f^2 = 2\rho f$, d'où l'expression $E = Pk\frac{a^2 + f^2}{2If}$ qui est exacte et non pas simplement approximative. M. Lamarle observe que puisque toute la partie $2a$ de la pièce a une égale courbure, ce mode d'expérimentation est plus propre à donner la valeur moyenne du coefficient E pour toute la pièce, ainsi que celle de la limite des dilatations sans

[1] *Premier mémoire sur la flexion du bois.* Bruxelles, 1844. Extrait des *Annales des travaux publics de la Belgique.*

dans lesquelles la flexion est fort petite. Quand l'extension ou la compression des fibres approchent du terme où la rupture doit avoir lieu, la résistance de ces fibres cesse ordinairement d'être exactement proportionnelle à l'extension ou à la compression, comme on l'a supposé nos 76 et 77; ce que l'on exprime en disant que l'élasticité est altérée (*).

94 à 111 (**).

---

partie permanente, que les expériences ordinaires où le poids 2P est au milieu et où la courbure est nulle aux extrémités.

(*) § 1. *Observation relative à l'élasticité.*—Nous avons dit au § 8 de la note du n° 21, que cette propriété subsistait entière après que la contexture a été modifiée, et que si l'on défalquait, après chaque mesure, *les parties permanentes ou persistantes* des extensions, compressions, flexions ou torsions, le reste était encore trouvé proportionnel aux efforts, avec des coefficients de proportionnalité ou d'élasticité généralement peu ou point différents de ce qu'ils étaient primitivement.

§ 2. *Approximation plus grande pour* E. — De la différence de deux expressions $\frac{f''}{a}$, $\frac{f'}{a}$ comme celle de $\frac{f}{a}$ de la fin du § 3 de la note du n° 90 on tirera, en opérant comme au § 1 de celle du n° 92.

$$E = \frac{(2P''-2P')(2a)^3}{48.I(f''-f')}\left[1+\frac{72}{7}\frac{(2P''+2pa)^3-(2P'+2pa)^3}{(2P''-2P')^3}\left(\frac{f''-f'}{2a}\right)^2\right].$$

Par exemple si le rapport $\frac{f''-f'}{2a}$ de la flèche additionnelle à la longueur est 1/30, et si $P'=0$, la quantité entre crochets, par laquelle il faut multiplier la formule du texte, est

$$1+\frac{8}{700}\left[\left(1+\frac{2pa}{2P''}\right)^3-\left(\frac{2pa}{2P''}\right)^3\right],$$

ou

$$1{,}037 \text{ si } \frac{2pa}{2P''}=1/2, \quad \text{et} \quad 1{,}027 \text{ si } \frac{2pa}{2P''}=1/3.$$

(**) Par la même raison qu'aux notes des nos 4 à 20 et des nos 22 à 75, relatives à la compression et à l'extension, on renvoie après le

ARTICLE IV.

DE LA RÉSISTANCE D'UN SOLIDE PRISMATIQUE A LA RUPTURE PRODUITE PAR UN EFFORT DIRIGÉ PERPENDICULAIREMENT A LA LONGUEUR DE CE SOLIDE.

112. Les fibres des corps, quand on les soumet à des extensions ou à des accourcissements très-petits, s'étendent ou s'accourcissent de la même quantité sous un même poids, comme on l'a dit n°s 76 et 77. Alors, si la section transversale est rectangulaire, les fibres dont la longueur ne varie pas lors de la flexion du corps sont au milieu de la hauteur de cette section. Quand les variations de longueur des fibres sont plus considérables, ces fibres peuvent, sous le même effort, s'étendre plus ou moins qu'elles ne s'accourcissent. Alors les fibres invariables s'éloignent ou s'approchent de la face qui devient convexe lors de la flexion. La rupture a lieu quand les fibres étendues ne peuvent plus l'être davantage sans se séparer, ou quand les fibres comprimées ne peuvent plus l'être davantage sans s'écraser.

La rupture s'opère d'une manière différente selon les corps. Dans les pierres, le verre, les métaux fondus, il se fait une séparation brusque et totale sur toute la hauteur de la section. Dans les bois, les fibres sont écrasées vers la face concave, et arrachées irrégulièrement vers la face convexe. Dans les métaux forgés, la rupture n'est pas toujours accompagnée d'une séparation totale ou partielle. Les molécules, sans cesser d'être adhérentes, paraissent avoir pris près de la section de rupture de nouvelles po-

---

n° 168 au *complément* des articles I à VI, ces n°s de 94 à 111, contenant des résultats d'expériences, auxquels on joindra ceux fort nombreux qui ont été obtenus depuis 1833.

Qu'il nous suffise de dire ici, pour donner une idée générale des valeurs du nombre E, et nous mettre à même de présenter quelques exemples de calcul numérique, qu'on a environ, pour le bois de chêne ou de sapin, $E = 1\,200\,000\,000$; pour le fer, $E = 20\,000\,000\,000$; pour la fonte, $E = 12\,000\,000\,000$.

sitions d'équilibre, en vertu desquelles la figure du solide a changé.

Les conditions de la rupture dépendent de l'équilibre qui s'établit entre les forces qui tendent à rompre les corps, et les résistances dues aux forces développées par l'effet des extensions et compressions des fibres dans la section transversale où la rupture va s'opérer. Pour évaluer exactement ces résistances, il faudrait connaître : 1° l'axe d'équilibre où sont placées les fibres invariables ; 2° la valeur de la force produite dans une fibre par une extension ou une compression donnée. A défaut de ces connaissances, que l'on ne pourrait acquérir que par des expériences délicates, on est obligé, pour obtenir au moins des évaluations approximatives, de recourir à des hypothèses.

113. L'hypothèse la plus simple, et généralement la moins éloignée de la vérité, consiste à admettre que les résistances des fibres, à l'instant où la rupture va s'opérer, sont encore proportionnelles aux extensions ou compressions de ces fibres, comme elles sont dans le cas d'une flexion très-petite. Alors l'état de la section transversale du corps, à l'instant où la rupture va s'opérer, ne diffère point de l'état considéré dans les n°s 77 et suivants. Seulement il faut concevoir que la fibre placée à la face convexe qui est la plus étendue, ou la fibre placée à la face concave qui est la plus accourcie, subissent le degré d'allongement ou d'accroissement qui est immédiatement suivi de la rupture.

La situation de l'axe d'équilibre, où sont placées les fibres invariables, se déterminera toujours par la même condition géométrique énoncée n° 78. Supposons cet axe ainsi déterminé, et conservons les dénominations du n° 77, qui se rapportent à la Fig. 1 ; appelons de plus

v' la distance à l'axe d'équilibre aa' de la fibre extrême située à la face convexe ou à la face concave du solide, qui est prête à rompre ;

R une constante exprimant la force nécessaire pour rompre un prisme dont la section transversale est l'unité superficielle, tiré dans le sens de la longueur.

En remarquant que la résistance des fibres situées à la distance v' de l'axe aa' est $dudv.\mathrm{R}$, et que la résistance des fibres situées à la distance v du même axe est $dudv\frac{\mathrm{R}v}{v'}$; on aura pour l'expression de la somme des moments de ces résistances, pris par rapport à l'axe aa',

$$\frac{\mathrm{R}}{v'}\left(\int_0^b du\int_0^{f_1 u} dv.v^2+\int_0^b du\int_0^{f_2 u} dv.v^2\right).$$

Nous nommerons cette expression *moment de rupture* du corps, et nous la désignerons par la lettre $\mathfrak{r}$ (*).

(*) § 1. *Deuxième expression du moment de flexion.*— Nous mettons ici $\mathfrak{r}$ au lieu de ρ déjà employé par Navier (nos 77, 86) pour le rayon de courbure. La dénomination *moment de rupture* n'a pas été adoptée par ses successeurs. M. de Guillebon, l'un deux, a fait observer que la formule ci-dessus, susceptible d'être écrite, avec les simplifications de la note du no 80

$$\frac{\mathrm{R}}{v'}\int v^2 d\omega \quad \text{ou} \quad \mathrm{R}\frac{\mathrm{I}}{v'},$$

n'est autre chose qu'une *deuxième expression* du moment de flexion M qui a reçu à la même note une *première expression* $\mathrm{M}=\frac{\mathrm{EI}}{\rho}$; R désignant, dans la deuxième, l'effort supporté par une fibre à la distance v' de la ligne des fibres invariables, pour l'unité superficielle de sa section; et cette distance peut être arbitraire au lieu d'être la plus grande.

§ 2. *Cette deuxième expression ou équation* $\mathrm{M}=\mathrm{R}\frac{\mathrm{I}}{v'}$ *est tout aussi exacte que la première* $\mathrm{M}=\frac{\mathrm{EI}}{\rho}$ *dans les mêmes limites. Son établissement direct et simple.* — Elle est exacte comme l'autre, tant que les proportions des extensions et des compressions n'ont pas encore dépassé les limites de leur égalité sous des efforts égaux et opposés et de leur proportionnalité à ces efforts, limites où l'on se tient ordinairement en définitive, comme on verra, lorsqu'on l'applique. On peut l'établir d'une manière directe ainsi que celle $\int_0^\omega v d\omega=0$, don-

(Du n° 112).

nant les fibres invariables, sans invoquer le n° 78 et sans même parler du coefficient d'élasticité E ni de la courbure $\frac{1}{\rho}$, en admettant seulement, comme on a fait au n° 77 et aux notes, que les fibres résistent à l'extension comme si elles étaient isolées et que les longueurs des petites portions comprises entre deux sections voisines, sont les mêmes que si ces sections étaient restées des plans. En effet, sur ces deux plans très-voisins il y a une ligne, parallèle à leur intersection, à travers laquelle les portions de fibre n'ont pas varié de longueur, et les dilatations éprouvées par les autres sont proportionnelles à leurs distances v, v' à cette ligne, en sorte que $R\frac{v}{v'}d\omega$ exprime la résistance ou tension de celle qui est située à la distance v et dont la section est $d\omega$, si les résistances sont restées dans le même rapport que ces dilatations positives ou négatives; d'où il suit que l'équilibre de translation et l'équilibre de rotation de la partie du prisme comprise entre la section ω et une extrémité, ont bien pour expressions $\frac{R}{v'}\int v d\omega = o$ et $\frac{R}{v'}\int v^2 d\omega =$ le moment M, autour de la même ligne, des forces extérieures agissant sur cette partie.

§ 3. *Elle n'est pas applicable au delà de ces limites, si ce n'est en faisant varier le coefficient* R *qui représente alors autre chose que ce que donnent les expériences de rupture par extension ou compression longitudinale. — Cas de sections ou semblables ou ramenables les unes aux autres par augmentation des ordonnées ou des abscisses.* — Mais les dilatations cessent pour l'ordinaire, longtemps avant la rupture, d'être proportionnelles aux efforts qui les produisent (§ 8 de la note du n° 21), et les contractions d'être égales aux dilatations pour mêmes efforts ; aussi l'équation précédente $M = R\frac{I}{v'}$ qu'on peut écrire $P = R\frac{I}{av'}$ en appelant 2P la force transversale agissant au milieu d'une pièce de longueur $2a$ appuyée aux deux bouts (n°s 90, 122), ne donne pas, même approximativement, la grandeur que doit avoir cette force 2P pour produire la rupture immédiate ou prochaine, en y mettant pour R la valeur qui résulte des expériences de rupture par traction et pour v' l'ordonnée des

(Du n° 113).

fibres les plus tendues du côté devenu convexe. On n'obtient pas davantage cette grandeur au moyen de l'équation toute pareille

$$M = R' \frac{I}{v''}, \quad \text{ou} \quad P = R' \frac{I}{av''}$$

dans laquelle v'' est l'ordonnée des fibres qui sont les plus comprimées du côté devenu concave, et R' la force de compression produisant une contraction longitudinale qui entraîne des dilatations transversales reconnues capables de disjoindre latéralement les fibres (§ 7, 8 de la note du n° 3), coefficient qui peut être fourni directement aussi (§ 9 de id.) par des expériences d'écrasement, et qui, très-supérieur à R pour les métaux, lui est généralement inférieur pour les bois.

On trouve bien, il est vrai, en faisant des expériences sur des pièces rectangulaires, que la force 2P rompant par flexion, est non-seulement en raison inverse de la longueur $2a$ (ce qui doit avoir lieu pour toutes les pièces prismatiques), mais encore, en raison directe de la largeur b et du carré c^2 de l'épaisseur ou hauteur des sections conformément à l'équation qui, pour $I = \frac{bc^3}{12}$, $v' = \frac{c}{2}$ prend la forme $P = R \frac{bc^2}{6a}$; et l'on verra, à la note du n° 151, qu'on a la même chose pour toutes les sections semblables, ou pour toutes celles qui, comme le rectangle ou l'ellipse, peuvent se transformer les unes dans les autres en amplifiant ou réduisant dans une même proportion toutes les abscisses ou toutes les coordonnées. Mais ce qu'on en tire alors pour R, après des expériences de rupture par flexion, est plus grand que la valeur de ce coefficient déduite d'expériences de rupture par extension et en est souvent plus que double, par exemple pour les pièces de fonte à section rectangle (ce qu'on expliquera à la note du n° 151). Et, pour des sections de diverses formes comparées non ramenables ainsi les unes aux autres, les expériences de rupture par flexion ne sauraient même être représentées par une équation telle que $P = R \frac{I}{av'}$ avec un coefficient R quelconque, à moins qu'on ne le fasse varier pour même matière avec la forme des sections, et même avec leur situation par rapport à la direction des

(Du n° 113).

forces extérieures ; car, pour les pièces de fonte en T, par exemple, il faudrait un nombre R plus grand en les retournant de manière à mettre en haut la plus petite nervure d'abord en bas (ci-après note du n° 120).

C'est seulement au moyen d'une pareille adaptation de la valeur variable du coefficient R aux diverses formes et situations des sections qu'on peut arriver à prévoir par la formule $P = R \frac{I}{av'}$ le poids capable de rompre les pièces d'échafaudages, barraquements et autres constructions temporaires dans lesquelles on peut approcher bien près du maximum des charges moyennant une surveillance active et des précautions journalières (voyez note du n° 151).

§ 4. *Elle donne cependant la résistance à l'énervation ou à la rupture éloignée. — Coefficient* R_0 *de cette résistance permanente.* — Heureusement que les calculs les plus fréquents et les plus utiles sont ceux de résistance des *constructions permanentes*. Or l'observation prouve que pour celles-ci (ainsi qu'on a dit à la fin de la note du n° 21 et que l'exprimera Navier à la fin du n° 151), si l'on veut prévenir une rupture plus ou moins éloignée, due à l'altération de la contexture ou à l'énervation de la matière avec le temps et les circonstances accidentelles, il faut que la plus grande dilatation ou contraction longitudinale excède très-peu ou point celles qui varient d'une manière exactement proportionnelle aux efforts qui les produisent. En conséquence en appelant, comme à la fin des notes des n°s 21 et 3,

$$R_0, R'_0,$$

les efforts (bien moindres que ceux qui sont appelés R et R'), répondant par unité de section à cette dilatation ou contraction, limite de celles que les fibres peuvent supporter indéfiniment sans danger, les équations

$$M = \text{ou} < R_0 \frac{I}{v'}, \quad M = \text{ou} < R_0' \frac{I}{v''}$$

expriment aussi exactement qu'on peut le désirer la double condition de non-énervation ou de stabilité indéfinie de la cohésion de la matière, condition à remplir partout, pour les fibres les plus éten-

(Du n° 113).

dues du côté devenu convexe et pour les fibres les plus contractées du côté devenu concave.

Ainsi la recherche d'équations capables de représenter des états de flexion plus voisins de la rupture, et les changements successifs de position de l'*axe neutre* ou ligne des fibres invariables n'a qu'un intérêt secondaire (ci-après note du n° 151); et les expériences sur la manière dont les pièces rompent, ou plutôt dont les ruptures s'achèvent une fois commencées, ne peuvent nullement être invoquées contre la théorie qui nous a conduits à l'équation précédente dont l'emploi permet (et c'est là l'essentiel) de prévenir le *commencement* de la rupture ou plutôt de l'énervation, sans s'occuper de ce qui suit, dont la considération peut seulement aider à la détermination des coefficients R_0, R'_0 des formules.

§ 5. *Restriction relative à la nécessité de prendre en considération les glissements quelquefois.* — Nous observerons toutefois que l'équation $M = R_0 \frac{I}{v'}$ n'exprime complétement la condition de *dilatations au plus égales à* $\frac{R_0}{E}$ que quand c'est bien dans le sens des fibres qu'a lieu la dilatation la plus grande; or, cela exige qu'il n'y ait pas de *glissements* transversaux ou qu'ils soient négligeables, car ils produisent des écartements moléculaires se composant avec les écartements longitudinaux pour amener un écartement résultant, légèrement oblique aux fibres. Nous apprendrons plus loin, (note des n°s 152 à 155) à calculer cette influence des glissements, qui peut généralement être négligée lorsque le plus grand bras de levier des forces qui fléchissent excède sensiblement l'épaisseur de la pièce, ainsi que Coulomb l'avait pressenti (mémoire cité de 1773).

§ 6. *Équation d'élasticité. Équation de cohésion ou de stabilité. Section dangereuse. Point dangereux. Formes d'égale résistance.*— L'équation

$$M = \frac{EI}{\rho},$$

et l'équation

$$\text{Maximum de } M = \text{au plus } R_0 \frac{I}{v'} \text{ ou } R'_0 \frac{I}{v''}$$

(Du n° 113).

dont les analogues sont $P = EI$, $P = R_0\omega$ ou $R'_0\omega$ pour le cas simple de l'action longitudinale (notes des n°s 21 et 3), seront quelquefois appelées, la première, *équation d'élasticité*, et la seconde, *équation de cohésion permanente*, ou de *stabilité*, ou de *résistance à la rupture éloignée.*

Celle-ci (en nous bornant, pour fixer les idées, à considérer ici le côté des fibres étendues) donne

$$\frac{I}{v'} = \text{maximum de } \frac{M}{R_0},$$

ce qui servira à régler les dimensions transversales d'une pièce prismatique d'après le nombre R_0 relatif à sa matière, et d'après la plus grande valeur du moment variable M des forces qui la sollicitent.

La section pour laquelle ce moment est le plus grand a été appelée par M. Poncelet, *section dangereuse;* et le point où elle est traversée par la fibre la plus tendue et le plus en danger de rompre, *point dangereux.* Cette section se trouve au milieu de la pièce lorsqu'elle est posée sur deux appuis et sollicitée comme aux n°s 122, 125, 126, et se trouve à l'encastrement dans le cas des n°s 121, 124. Le point dangereux est celui qui répond à la plus grande ordonnée $v = v'$ *quand on ne tient pas compte des glissements.*

En effaçant *Maximum* ou en posant $\frac{I}{v'} = \frac{M}{R_0}$ on a une équation dont on tire des dimensions transversales variables avec le moment M, ou avec les distances du point d'application des forces et telles que toutes les sections seront *également dangereuses* ou ne fatigueront pas plus l'une que l'autre. On reviendra aux n°s 498 à 507, section quatrième, sur ces formes dites *d'égale résistance* ou de moindre volume considérées par Galilée dès l'origine de la théorie de la résistance des solides.

§ 7. *Cas où il faut poser l'équation d'élasticité, ou calculer les déplacements des points, avant d'établir l'équation de cohésion.* — Celle-ci peut être posée directement dans les problèmes particuliers, toutes les fois que le moment M des forces sollicitantes est connu *à priori*, ou déterminable directement aussi. Mais il faut se servir

(Du n° 113).

d'abord de la première, ou calculer préalablement les flexions ou les déplacements des points :

1° Lorsque ces déplacements modifient sensiblement les bras de levier qui entrent dans M, comme il arrive notamment pour les pièces sollicitées *debout* ou très-obliquement.

2° Lorsque tout ou partie des forces qui entrent dans ce même moment sont des réactions de points fixes ou des actions mutuelles de pièces, ne pouvant être fournies en fonction des forces données par les seules équations d'équilibre de translation et de rotation générale de la statique élémentaire. Alors il faut (comme on verra surtout à la section quatrième), poser d'abord des expressions des déplacements en fonction des forces tant connues qu'inconnues, afin de déduire celles-ci des conditions que les déplacements doivent remplir aux points particuliers où elles agissent, par exemple de la nullité de ces déplacements aux points fixes, de leur direction obligée aux encastrements, de leur égalité pour deux pièces ou des portions d'une même pièce à leur jonction, etc., en ne calculant, au reste, à chaque jonction ou encastrement, que les résultantes et les moments résultants des réactions inconnues quand elles sont en nombre indéfini (ainsi qu'on l'a fait voir en 1837-1838 à des feuilles lithographiées de leçons de mécanique à l'École des ponts et chaussées, n°s 46, 47, 48, 49, 82, et en 1843 aux Comptes rendus de l'Académie, t. XVII, p. 954 et p. 1025 à 1028).

3° Enfin, lorsqu'il y a lieu de composer ensemble des effets simultanés de divers genres, comme une flexion avec un glissement ou une torsion. (Voyez notes des n°s 152 à 155, et de l'article V).

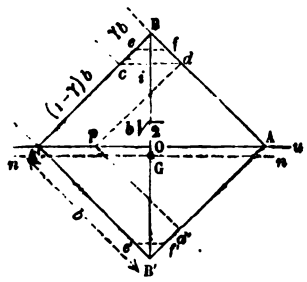
Il est d'ailleurs toujours utile de revenir souvent à la considération des déplacements et des dilatations, quand ce ne serait que pour ne pas se laisser égarer, comme ont fait quelques auteurs anglais, par la considération exclusive des efforts intérieurs qui ne sont pas directement, comme les dilatations, ce qu'il est nécessaire de limiter, et qui n'ont pas toujours entre eux des rapports simples.

§ 8. *Cas où* $\frac{I}{v'}$ *ou* $\frac{I}{v''}$ *augmente en tronquant la section.* — *Supposer alors la troncature qui donne à ce quotient sa plus grande valeur.* — La rupture ou la disjonction des fibres les plus tendues

(Du n° 112).

ou les plus comprimées n'entraîne pas toujours celle des autres fibres, et souvent la soustraction d'un certain nombre d'entre elles ne fait qu'augmenter la grandeur de ce quotient $\frac{I}{v'}$ ou $\frac{I}{v''}$ par lequel nous estimons la résistance spécifique des diverses sections.

Soit, par exemple, un prisme à section carrée ABA'B' sollicité à fléchir dans le plan des diagonales BB', et dont on suppose d'abord que la matière (comme les métaux fondus), est bien plus sujette à se désagréger ou à s'énerver par la tension que par une compression égale. Soit retranché de cette section, le triangle isocèle cBd traversé par les fibres les plus dilatées. On aperçoit de suite, si les côtés $Bc = Bd$ de ce triangle sont très-petits, que la fraction $\frac{I}{v'}$ augmentera, car, en même temps que le numérateur ne sera diminué que d'une quantité très-petite du second ordre, le dénominateur le sera d'une quantité du premier ordre.



Pour voir jusqu'où va une pareille augmentation de $\frac{I}{v'}$ qui primitivement, si b est le côté du carré, avait une valeur donnée par

$$I = \frac{b^4}{12},\ v' = \frac{b\sqrt{2}}{2},\ \frac{I}{v'} = \frac{b^3}{6\sqrt{2}}$$

appelons γ la proportion de la troncature des côtés supérieurs du carré, en sorte que $Bc = Bd = \gamma . b$. On obtiendra, d'abord, la position du centre de gravité G de la section tronquée, ou sa distance GO à la diagonale AA', en divisant par l'aire nouvelle de la section :

$$\omega_1 = b^2 - \frac{\gamma^2 b^2}{2}$$

son moment statique par rapport à cette diagonale. Comme le moment de la section primitive ou entière est nul, le moment (aussi statique) de la section nouvelle est égal, au signe près, à celui du triangle retranché cBd, ou à

(Du n° **113**).

$$\frac{\gamma^2 b^2}{2}\left(\frac{b\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{3}\gamma\,\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{b^3\sqrt{2}}{12}(3\gamma^2-2\gamma^3);$$

on a donc pour la distance cherchée

$$\mathrm{GO}=\frac{b\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{3\gamma^2-2\gamma^3}{2-\gamma^2};$$

d'où, pour la distance nouvelle $\mathrm{G}i=v'_1$ de la ligne des fibres invariables $n\mathrm{G}n$ parallèle à AA', à celle cd ou aux fibres les plus tendues

$$v_1'=\frac{b\sqrt{2}}{2}(1-\gamma)+\frac{b\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{3\gamma^2-2\gamma^3}{2-\gamma^2}=\frac{b\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{6-6\gamma+\gamma^3}{2-\gamma^2}.$$

Pour avoir le moment d'inertie I_1 nouveau ou autour de $n\mathrm{G}n$, prenons-le d'abord autour de la diagonale AA'. On aura, en partageant la figure en deux demi-carrés AB'A', Adp dont les côtés sont b, $(1-\gamma)\,b$, et en un parallélogramme A'cdp dont la base est $\gamma b\sqrt{2}$ et la hauteur $(1-\gamma)\frac{b\sqrt{2}}{2}$, la valeur suivante de ce moment autour de AA':

$$\frac{b^4}{24}+\frac{(1-\gamma)^4 b^4}{24}+\gamma b\sqrt{2},\frac{1}{3}\left[(1-\gamma)\frac{b\sqrt{2}}{2}\right]^3;$$

d'où, en retranchant (paragraphe 4 de la note du n° 81, p. 48), $\omega_1\times\overline{\mathrm{GO}}^2=b^2\,\frac{2-\gamma^2}{2}\cdot\left[\frac{b\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{3\gamma^2-2\gamma^3}{2-\gamma^2}\right]^2$ et en divisant par v'_1

$$\frac{\mathrm{I}_1}{v'_1}=\frac{b^3}{6\sqrt{2}},\ \frac{12-42\gamma^2+48\gamma^3-18\gamma^4+\gamma^6}{12-12\gamma+2\gamma^3}.$$

Le maximum de ce quotient a lieu pour $\gamma=0{,}2440$ et a pour valeur

$$\frac{\mathrm{I}_1}{v'_1}=1{,}1134\,\frac{b^3}{6\sqrt{2}}=1{,}1134\,\frac{\mathrm{I}}{v'};$$

en sorte que pour avoir théoriquement la résistance spécifique la plus grande possible, il faut retrancher, de la section, un triangle dont les côtés soient les 0,2440 (ou presque le quart) de ceux du carré, et cette résistance est, ainsi, plus forte des 0,1134, ou de 1/9 à 1/8, que celle qui est offerte par le carré non tronqué.

On aurait le même résultat, mais en faisant la troncature à l'angle opposé, si la matière était sensiblement plus sujette à s'énerver par

(Du n° 112).

contraction suivie de disjonction latérale (§ 8 de la note du n° 3), que par dilatation des fibres, comme il arrive pour certains bois.

Mais si les fibres ont une égale disposition à se désagréger pour des dilatations et pour des contractions égales, il faut supposer la soustraction simultanée de deux petits triangles égaux B*ef*, B'*e'f'*. En appelant toujours γb leurs côtés, on trouve pour le nouvel état

$$I_1 = \frac{(1-\gamma)^4 b^4}{12} + 2\frac{b^4}{6}\gamma(1-\gamma)^3, \quad v'_1 = (1-\gamma)\frac{b\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{I_1}{v'_1} = \frac{b^3}{6\sqrt{2}}(1+3\gamma)(1-\gamma)^2;$$

Le maximum de cette expression a lieu pour

$$\gamma = \frac{1}{9}$$

résultat déjà signalé par Emerson [1], mais en l'appliquant à une section triangulaire telle que ABA' et non à une section carrée, parce qu'il supposait la matière *incompressible*, ce qui revient à placer le *neutral axis* ou la ligne des fibres invariables sur la base inférieure.

De cette troncature du carré du 1/9 des deux côtés il résulte

$$\frac{I_1}{v'_1} = \frac{256}{243}\frac{b^3}{6\sqrt{2}} = 1{,}0535\frac{I}{v'}$$

ou une augmentation des 0,0535 ou de $\frac{1}{19}$ à $\frac{1}{18}$ dans $\frac{I}{v'}$.

Si l'on considère comme Emerson la section triangulaire isocèle, mais en faisant passer la ligne *neutre* ou des fibres invariables par le centre de gravité du trapèze qui résulte de la troncature au sommet, on trouve, par les dernières formules du § 3 de la note du n° 82 :

$$I_1 = \frac{b^4}{72}\frac{(1-\gamma)^3(1+4\gamma+\gamma^2)}{1+\gamma}, \quad v'_1 = \frac{b\sqrt{2}}{3}(1-\gamma)\frac{2+\gamma}{2+2\gamma}.$$

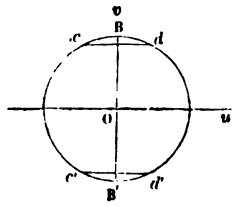
Le maximum de $\frac{I_1}{v'_1}$ répondra à $\gamma = 0{,}1304$ et aura pour va-

[1] *Emerson's Mechanics*, sect. VIII, p. 114. Ce passage est cité par M. Tredgold (*Force du fer coulé*, traduction de 1826, n° 85), et par M. Hodgkinson (*Recherches expérimentales*, etc. 1846, p. 76 de la traduction de M. Pirel, insérée en 1855 aux *Annales des ponts et chaussées*, 1er semestre).

(Du n° 113).

leur 1 fois,0922 celle $\frac{b^3}{24\sqrt{2}}$ relative au triangle non tronqué.

Cette augmentation de $\frac{I}{v'}$ par des troncatures a lieu même lorsque la section, au lieu d'offrir des pointes, se termine par des parties arrondies B, B'; car, si l'on en retranche deux segments cBd, $c'B'd'$ dont les cordes soient parallèles à l'axe Ou du moment, et dont les flèches soient très-petites de l'ordre 1, le dénominateur de $\frac{I}{v'}$ diminuera d'une quantité du même ordre, mais le numérateur diminuera d'une quantité bien plus petite puisqu'elle sera de l'ordre 3/2, d'où il suit bien que cette troncature aura augmenté le quotient.



Par exemple soit une section circulaire pour laquelle on a, r étant le rayon, et le moment étant pris autour du diamètre Ou

$$I=\frac{\pi r^4}{4},\ v'=r,\ \frac{I}{v'}=\frac{\pi r^3}{4}.$$

Soit γr la flèche très-petite des segments retranchés, supposés égaux; leur corde est $2\sqrt{\gamma r\,(2r-\gamma r)}$; l'aire de chacun est à peu près

$$\frac{2}{3}\cdot\gamma r.\ 2\sqrt{\gamma r.\ 2r}=\frac{4}{3}\,r^2\gamma\sqrt{2\gamma};$$

le moment d'inertie nouveau est environ $I_1=\frac{\pi r^4}{4}-r^2.\frac{8}{3}\,r^2\gamma\sqrt{2\gamma}$, et comme la nouvelle valeur de v' est $v'_1=r\,(1-\gamma)$, l'on a, à cela près de quantités d'ordre supérieur, $\frac{I_1}{v'_1}=\frac{\pi r^3}{4}\left(1+\gamma-\frac{32\sqrt{2}}{3\pi}\,\gamma^{\frac{3}{2}}\right)$, dont le maximum, répondant à $\gamma=\frac{\pi^2}{512}=0{,}0193$, est

$$\frac{\pi r^3}{4}\left(1+\frac{\pi^2}{1536}\right)=1{,}0064\,\frac{\pi r^3}{4}.$$

On obtient la solution exacte en appelant 2α l'angle au centre de chacun des deux segments retranchés, et en se servant de la quatrième formule du § 3 de la note du n° 84, qui donne

$$I_1=\frac{\pi r^4}{4}-r^4\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\sin 4\alpha}{8}\right),\ v'_1=r\cos\alpha,$$

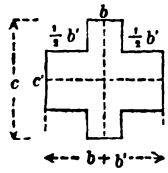
(Du n° **113**).

en sorte que le maximum de $\frac{I_1}{v'_1}$, répondant à $\alpha = 0{,}1343\,\frac{\pi}{2}$, ou à $\gamma = 0{,}0222$, est

$$1{,}006\,93\,\frac{\pi r^3}{4}$$

et donne ainsi une résistance surpassant des $0{,}00693 = \frac{1}{144}$ environ celle qu'on avait avant la troncature.

Pour une section rectangle, sollicitée parallèlement à deux côtés, le quotient $\frac{I}{v'}$ n'augmente pas en diminuant ainsi la hauteur. Mais



il en peut être autrement d'une section composée de plusieurs rectangles, telle que la croix d'équerre ayant latéralement deux parties de largeur $\frac{1}{2}b'$ et de hauteur c', et au milieu une partie de largeur b et de hauteur $c > c'$, ce qui fait deux *nervures* de largeur b et de saillie $\frac{1}{2}(c - c')$ sur un rectangle de largeur $b + b'$ et de hauteur c'. On a pour cette section

$$I = \frac{bc^3}{12} + \frac{b'c'^3}{12},\ v' = \frac{c}{2},\ \frac{I}{v'} = \frac{bc^3 + b'c'^3}{6.c}.$$

Si l'on réduit à c_1 la hauteur c du rectangle comprenant la nervure, et si l'on appelle $\frac{I_1}{v'_1}$ la nouvelle valeur de $\frac{I}{v'}$ qui en résulte, on a la différence

$$\frac{I_1}{v'_1} - \frac{I}{v'} = (c - c_1)\,\frac{b'c'^3 - bcc_1\,(c + c_1)}{6.cc_1} =$$
$$= \left(\frac{c}{c_1} - 1\right)\frac{bc^2}{6}\left[\frac{b'c'^3}{bc^3} + \frac{1}{4} - \left(\frac{c_1}{c} + \frac{1}{2}\right)^2\right].$$

Cette différence sera positive pour toute valeur de c_1 plus petite que c si l'on a $\frac{b'c'^3}{bc^3} + \frac{1}{4} > \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$, ou

$$b'c'^3 > 2.bc^3\,;$$

alors toute diminution de la hauteur des nervures augmentera le

(Du n° 113).

quotient $\frac{I}{v'}$ par lequel nous mesurons la résistance à la rupture. Et si cette condition $b'c'^3 > 2.bc^3$, n'est pas remplie, ou si $\frac{I}{v'}$ diminue d'abord quand on réduit très-peu la hauteur c, on rendra toujours ce quotient plus grand qu'il n'était primitivement en prenant c_1 suffisamment petit; mais comme c_1 ne saurait être au-dessous de c' il faudra qu'on ait pour cela

$$b'c'^3 > bcc'(c+c'), \quad \text{ou} \quad b'c'^2 > bc^2\left(1+\frac{c'}{c}\right).$$

Toutes les fois que cette dernière condition sera satisfaite, ou que la résistance à la rupture offerte par la partie $b' \times c'$, excédera $\left(1+\frac{c'}{c}\right)$ fois (moins de deux fois) la résistance à la rupture offerte par la partie $b \times c$, *on augmentera* $\frac{I}{v'}$ *en supprimant les deux nervures ou saillies* $b \times \frac{c-c'}{2}$.

L'existence de fibres inutiles, qui rompent ou s'énervent d'abord sans le reste, ne saurait diminuer en rien la résistance d'un solide à la rupture. Il faudra donc, toutes les fois que cette circonstance se présentera, c'est-à-dire lorsque le quotient $\frac{I}{v'}$ augmentera en tronquant la section comme on vient de voir, prendre pour valeur définitive de ce quotient sa plus grande valeur, résultant d'une troncature convenable, faite soit du côté des fibres étendues, soit du côté des fibres comprimées, soit des deux côtés à la fois suivant la nature de la matière.

Ainsi, pour la section carrée sollicitée diagonalement, si la cohésion résiste sensiblement plus aux compressions qu'aux extensions ou réciproquement, on prendra $1^{\text{fois}},1134$ la valeur $\frac{b^3}{6\sqrt{2}}$ de $\frac{I}{v'}$ relative à la section entière ou non tronquée, et l'on prendra $1^{\text{fois}},0535$ seulement *si la cohésion s'altère autant par des compressions que par des extensions égales*, dépassant une certaine limite, et après le même temps d'action.

Dans cette dernière supposition, *qu'il faudra toujours faire par*

(Du n° 113).

prudence s'il y a incertitude (vu qu'elle est la plus défavorable), si la section est circulaire, on prendra $\frac{I}{v'}$ égal à 1 fois,00693 la valeur $\frac{\pi r^3}{4}$ relative à une troncature nulle.

Et si la section est un rectangle avec nervure faisant saillie sur ses bases, on calculera $\frac{I}{v'}$ en supprimant les nervures lorsqu'on aura (figure d'autre part) $b'c'^2 > bc^2\left(1 + \frac{c'}{c}\right)$.

Et ainsi des autres.

On sera même assuré d'une résistance un peu supérieure à celles qui seront mesurées par les valeurs de $\frac{I}{v'}$ ainsi augmentées; car les fibres *surtendues* ou *surpressées* que nous regardons comme inutiles parce que leur soustraction ne fait qu'accroître ce quotient, ne laissent pas, tout en éprouvant un commencement de désagrégation, d'apporter une quote part à la résistance totale. Elles ne rompent pas d'une manière patente et complète si le reste ne rompt pas; tout au plus subissent-elles ces petites disjonctions intérieures et invisibles que nous avons dit constituer, probablement, l'énervation de la matière (fin du § 9 de la note du n° 21), et qui ne font que diminuer la section effectivement résistante de chacune des fibres sans l'annuler. (Voyez aussi § 16 ci après).

Aussi, dans une expérience comparative de rupture immédiate faite par M. Hodgkinson, un prisme triangulaire a offert plus de résistance avant qu'après la troncature du sommet de la section [1].

On peut donc avec sécurité adopter, pour les sections entières, les valeurs les plus grandes de $\frac{I}{v'}$ relatives aux sections tronquées, c'est-à-dire $1,0535\,\frac{b^3}{6\sqrt{2}}$ pour le carré sollicité diagonalement, $1,0069\,\frac{\pi r^3}{4}$ pour le cercle, etc.

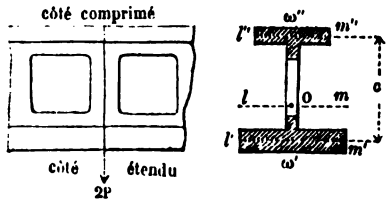
On voit au reste que les coefficients numériques ajoutent peu aux

[1] *Recherches*, etc., citées tout à l'heure. Les figures 53, 54 de la traduction insérée aux *Ann. des ponts et ch.*, en 1855, ne sont pas en rapport avec les pages 73 (expériences 12 et 13) et 76 du texte, où l'on ne parle que de sections *pleines* et ayant d'autres proportions.

(Du n° **113**).

valeurs de $\frac{1}{v'}$ calculées pour les sections entières. Aussi, tout en appelant l'attention sur les considérations qui précèdent afin d'y avoir égard dans quelques occasions, nous calculerons presque toujours par la suite les résistances sans supposer de troncatures.

§ 9. *Moyen commode de poser une équation de cohésion approchée dans certains cas.* — On a remarqué, à la fin de la note du n° **80**, que l'équation d'équilibre de rotation peut être posée autour de toute ligne tracée sur une section ω à une distance quelconque $\pm d$ de celle des fibres invariables, et cette équation $M = \int \frac{R}{v'} v(v \pm d)\, d\omega$ se réduit toujours à $M = \frac{RI}{v'}$, vu que $\int v d\omega = 0$. Il est commode de prendre, ainsi, l'axe des moments des forces successivement autour de deux lignes $l'm'$, $l''m''$ tracées vers le haut et vers le bas d'une section lorsqu'elle se compose de deux parties ω', ω'' séparées par un intervalle beaucoup plus grand que leurs hauteurs, et liées entre elles par une ou deux plaques minces évidées, dont on puisse négliger la résistance et le moment d'inertie. En effet, c étant la distance des milieux de ces parties, ou des lignes $l'm'$, $l''m''$ supposées parallèles à l'*axe neutre* lm que traversent les fibres invariables, pour que la partie ω' supporte par unité superficielle la limite R des tractions non dangereuses et celle ω'' la limite R' des pressions aussi sans danger ou ne donnant pas lieu à des dilatations transversales dangereuses (§ 3 et § 13), on aura deux équations de moments très-simples :



$$M'' = R'\omega''c \quad \text{autour de} \quad l'm',$$
$$M' = R\omega'c \quad \text{autour de} \quad l''m'',$$

où nous avons mis, aux premiers membres, des moments différents M'', M' afin d'embrasser le cas où les forces extérieures ont une composante longitudinale totale comme celle Q du § 8 de la note du

(Du n° 113).

n° 80. On peut vérifier au reste que les seconds membres sont identiques à

$$R'\frac{I}{v''}, \quad R\frac{I}{v'},$$

v'', v' étant respectivement les distances de $l''m''$, $l'm'$ à la ligne lm ou au centre de gravité de la section, car on a

$$v'' = \frac{\omega'}{\omega' + \omega''}c, \quad v' = \frac{\omega''}{\omega' + \omega''}c, \quad I = \omega' v'^2 + \omega'' v''^2 = \frac{\omega'\omega''}{\omega' + \omega''}c^2.$$

Ces deux équations de moments autour de $l'm'$, $l''m''$ montrent qu'on doit, lorsque $M' = M'' = M$ ou lorsqu'il n'y a pas de pression ou traction longitudinale totale, proportionner les parties ω', ω'' de la section aux inverses des résistances R, R' à la rupture par traction et à la rupture par pression, et elles donnent les superficies à leur attribuer pour qu'elles *fatiguent* également ou que l'une ne coure pas plus de risque de rompre que l'autre. C'est par cette méthode approximative que M. Edwin Clark et d'autres ingénieurs anglais calculent les dimensions des pièces de fer laminé des *ponts tubulaires* qu'ils projettent, et dont la base ω' et le toit ω'' sont composés de cellules rectangulaires (1). Nous verrons toutefois qu'elle peut donner des résultats fautifs (voy. §§ 16 à 18 de la note du n° 120), et que si on se dispense de tenir compte de la partie verticale et des hauteurs des parties horizontales des sections à double T, on risque de se tromper quelquefois du simple au double dans l'évaluation du rapport $\frac{v'}{v''}$ des distances du centre de gravité aux deux bases.

§ 10. *Détermination directe des coefficients* R_0 *et* R'_0 *de résistance permanente.* — La difficulté principale qui se rencontre dans l'application des équations de cohésion *permanente* telles que celle M ou $Pa = R_0\frac{I}{v'}$ ou $R'_0\frac{I}{v''}$ du cas de flexion (§§ 3 à 6), et celles (note du n° 21, § 12, et du n° 3, § 9) $P = R_0\omega$, $P = R'_0\omega$ des cas d'extension et de compression simple par des forces longitudinales,

(1) *The Britannia and Conway tubular Bridges*, 1850, ou *Notice sur les ponts tubulaires*, par M. Yvert, 1851.

réside dans la détermination, pour chaque espèce de matière, de la constante

$$R_0 \text{ ou } R'_0,$$

ou (comme le coefficient d'élasticité E est toujours facile à obtenir) dans la détermination de la dilatation ou contraction

$$i' = \frac{R_0}{E} \text{ ou } \frac{R'_0}{E},$$

limite de celles qui n'offrent aucun danger, même à la longue, même avec intermittence et petites augmentations périodiques dues aux vibrations, et eu égard aussi aux autres circonstances accidentelles dont on a parlé § 12 de la note du n° 21.

On détermine i' ou R_0, R'_0, lorsqu'on le peut, comme on a déjà dit alors ainsi qu'à la note du n° 3, par l'examen de constructions existantes et déjà anciennes, soumises aux mêmes causes de fatigue et de destruction, et réputées *hardies*, ou n'ayant, au jugement de constructeurs expérimentés qui en ont vu s'écrouler d'autres plus légères, que tout juste les dimensions nécessaires pour résister. Comme on n'a pas souvent à sa disposition ce moyen de détermination, l'on s'est quelquefois servi, conformément à un conseil de Young (sous-note du § 10 de la note du n° 21) d'expériences d'extension ou plutôt de flexion, en observant la dilatation ou la flèche qui commence à avoir une partie *persistante* sensible (ce que les Anglais appellent *set* ou *defect of elasticy*) (1) en se tenant en deçà (2).

(1) M. Hodgkinson. *Experimental researches on the Strength and other properties of cast iron.* London, 1846, n° 99 (ou traduction de M. Pirel).

(2) C'est ainsi que M. Tredgold a adopté, pour construire la table II° de l'Introduction de son *Practical Essay on the Strength of cast iron* (page 26, article 6 de la traduction, *Essai sur la force du fer coulé*, faite en 1826 par M. Duverne sur la 2e édition), une valeur de R_0 résultant d'une expérience (art. 45, p. 87) où une barre de bonne fonte, de 34 pouces anglais de longueur entre les deux appuis, et de 1 pouce d'équarrissage, a commencé à prendre une flèche permanente sous une charge de 410 livres (pounds) au milieu, ce qui, en réduisant la charge à 300 livres (art. 106, p. 193 de la même traduction), ou en faisant $2P = 300$, $2a = 34$, $b = c = 1$ dans la formule $M = R_0 \frac{I}{v'}$ ou $\frac{2P.2a}{4} = R_0 \frac{bc^2}{6}$, donne $R_0 = 15300$ *lbs* par pouce carré ou 10 753 000 kilogrammes par mètre carré; ce qui répond, d'après la flèche observée qui était 0pouce,16 et d'après les expressions $i' = \frac{R_0}{E}$, $E = \frac{2P(2a)^3}{4bc^3.f}$

(Du n° 113).

Mais, comme nous l'avons observé (§§ 9 et 10 de la note du n° 21), cette partie persistante, qui se manifeste quelquefois avec les dilatations les plus faibles, n'est pas un signe de perte d'élasticité ni de cohésion; et il conviendrait, en donnant une très-longue durée aux expériences, d'observer plutôt le point où la matière cesse de s'*écrouir* et commence à s'*énerver* (notes des n°s 1 et 21), sauf à se tenir fortement en deçà dans l'adoption de la charge dont on déduira par les formules (exactes ordinairement jusqu'à cette valeur réduite) la limite des dilatations, ou celle des tensions, afin de laisser une large part aux circonstances accidentelles qu'on vient de rappeler et que le calcul ne peut embrasser.

Il convient aussi, comme a fait la commission d'enquête anglaise instituée le 27 août 1847 [1], de soumettre les pièces à une longue série de chocs ou bien d'alternatives de fatigue et de relâchement, afin d'apprécier l'effet désorganisateur de ces mouvements répétés, dont chacun peut modifier la contexture un peu autrement que les précédents (§ 12 de la note du n° 21).

§ 11. *Usage d'expériences de rupture immédiate, par traction ou par compression, pour des comparaisons de valeurs des coefficients* R_0 *ou* R'_0 *relatives aux diverses variétés d'une même matière.* — Mais les expériences dont nous venons de parler § 10 sont dispendieuses

ou simplement d'après celle $i = \frac{3v'f}{a^2}$ (fin de la note du n° 87 ci-dessus), en faisant $a = 17$, $f = 0{,}16$, $v' = \frac{c}{2} = \frac{1}{2}$, à $i = \frac{0{,}24}{289} = \frac{1}{1204} = 0{,}000830 45$ que M. Tredgold propose d'adopter comme limite de la dilatation non dangereuse de la fonte de fer.

Mais M. Hodgkinson (*Experimental researches*, etc., ou traduction française de M. l'ingénieur Pirel, aux *Annales des ponts et chaussées*, 1855, 1er semestre, p. 58), oppose d'autres expériences qui paraissent prouver que la charge de 300 *lbs*, s'élevant à plus du tiers de celle qui est capable de rompre la barre de M. Tredgold, donnait probablement déjà une flèche permanente, qui eût été manifestée par une plus longue action ou par des moyens de mesurage plus délicats. Il pense aussi que sous cette même charge les dilatations et les contractions des fibres devaient être inégales pour mêmes efforts et non proportionnelles à ces efforts, en sorte que la ligne neutre ne devait pas passer par le centre de gravité comme le suppose la formule dont Tredgold a tiré les valeurs de R_0 et de i', que M. Hodgkinson trouve en conséquence trop fortes (voyez *Complément* ci-après des art. I à VI).

[1] *Report of the Commissioners appointed to inquire into the application of iron to Railway structures.* London, 1849.

(Du n° **113**).

et difficiles ; celles qui sont relatives, notamment, au point de séparation de l'écrouissage et de l'énervation sont délicates et ont besoin d'être extrêmement longues pour qu'on puisse en tirer des conclusions applicables. On ne peut espérer qu'elles seront entreprises pour toutes les matières et leurs diverses variétés et qualités. En attendant, les expériences promptes et infiniment plus faciles de rupture immédiate peuvent très-bien, comme l'observe M. Poncelet [1] (et comme nous avons déjà énoncé aux §§ 9 de la note du n° 3 et 12 de celle du n° 21), fournir au moins des rapports approchés entre les nombres R_0 ou R'_0 relatifs aux diverses variétés d'une même espèce de matériaux, comme le bois, la pierre dure ou tendre, le fer, la fonte. Connaissant donc par les constructions anciennes, etc., R_0 ou R'_0 pour une variété et sachant qu'il est, par exemple, le 1/8 du coefficient de *cohésion* instantanée R ou $R' = \frac{P}{\omega}$ ou de la force P qui fait rompre immédiatement par traction longitudinale ou par écrasement, divisée par l'aire ω de la section, on adoptera, pour les autres variétés ou provenances, aussi le 1/8 de cette charge de prompte rupture.

On n'aura pas pour cela la dilatation limite $i' = \frac{R_0}{E}$ ou $\frac{R'_0}{E}$ égale au 1/8 de la dilatation finale positive ou négative, puisque la proportionnalité des efforts aux effets cesse longtemps avant. Mais on aura un certain rapport aussi à peu près constant entre ces deux dilatations.

§ 12. *Usage (pour les mêmes comparaisons) d'expériences de rupture immédiate par flexion. Cet usage n'implique nullement la supposition fausse d'un rapport constant entre les efforts et les dilatations ou contractions jusqu'à la fin.* — On peut même, pour les comparaisons dont on vient de parler, se servir également des expériences de *rupture par flexion*, ordinairement plus faciles que celles de rupture par extension et même par écrasement, et qui, d'ailleurs, mettent les pièces dans des circonstances plus analogues à celles où on veut les employer. Rien donc n'empêche de prendre pour les coefficients R_0 ou R'_0 relatifs à chaque matière, une fraction

[1] Introduction à *la Mécanique industrielle*, n° 253.

(Du n° 113).

constante de ceux R ou R′ tirés de l'équation $2P = R.\frac{2}{a}\frac{I}{v'}$ ou $R'.\frac{2}{a}\frac{I}{v''}$, dans laquelle 2P représente le poids rompant immédiatement par flexion des barres de chacune des variétés de cette matière. En effet, supposons d'abord que la rupture ne se fasse que du côté étendu ou devenu convexe. Il est bien vrai que les R ainsi obtenus ne représentent nullement (ainsi qu'on l'a montré au § 3) la tension de la fibre la plus dilatée à l'instant de la rupture; mais si l'on a trouvé pour une variété, au sujet de laquelle on est fixé sur R_o, qu'il est le 1/6 du R obtenu par flexion, on peut approximativement prendre aussi le 1/6 pour les autres variétés. Cela n'implique nullement la supposition fausse de la proportionnalité constante des efforts aux dilatations des fibres jusqu'à rupture, comme le prétendent les adversaires de la théorie. Cela consiste simplement à admettre que la charge transversale $2P_o = R_o\frac{2I}{av'}$, susceptible d'être portée indéfiniment sans danger par une pièce d'une certaine forme, soumise en outre aux chances accidentelles de destruction, est, pour les diverses variétés, une même fraction de celle $2P = R\frac{2I}{av'}$ qui la ferait rompre au bout de peu d'instants; ce qui est tout aussi plausible, comme approximation, que la supposition analogue faite dans le cas de la traction longitudinale dont la formule simple n'est l'objet d'aucune attaque. Seulement, pour la flexion, cette fraction numérique devrait être un peu différente, selon qu'on ferait les expériences de rupture avec des barres ayant des sections rectangles ou des sections d'une autre forme (ci-après, n° 151 et sa note).

Aussi, comme l'ont proposé en même temps M. Couche, ingénieur en chef professeur à l'École des mines et M. Love, ingénieur civil, il conviendrait de faire toutes les expériences de rupture sur un même échantillon, pour lequel le second de ces deux auteurs propose une barre carrée de 0m,50 de longueur sur 0m,025 de côté, afin d'établir déjà des comparaisons avec des expériences nombreuses faites en Angleterre sur les fontes.

Les mêmes choses peuvent être dites pour le côté concave ou

pour les fibres comprimées, *si l'on est certain que la rupture commence par l'écrasement de ce côté* (§ 8 de la note du n° 3) ou par la disjonction transversale suivie, dans les bois, de la flexion en détail des fibres désunies. Adopter, pour le coefficient R'_0, une fraction constante de R' déterminé par la formule $2P = R' \frac{2I}{av''}$ appliquée aux expériences de rupture, c'est simplement supposer que la charge permanente non dangereuse est proportionnelle à la charge de prompte rupture pour les pièces de même forme et de diverses variétés d'une même matière, ce qui est très-plausible évidemment.

Cette distinction du côté concave ou convexe, par lequel peut commencer la rupture ou son danger éloigné, est même inutile pour les pièces rectangulaires et généralement pour toutes celles qui ont une section symétrique par rapport à une ligne perpendiculaire au plan de flexion; car, pour ces sections, on a $v' = v''$, et on peut se servir d'une seule formule $M = R_0 \frac{I}{v'}$, dans laquelle le coefficient R_0, une fois fixé pour une variété de matière, se déterminera pour toutes les autres au moyen d'expériences de rupture sans s'embarrasser de savoir s'il représente une tension-limite ou une pression-limite.

§ 13. *Suite. Détermination du rapport des deux coefficients* R'_0, R_0 *de maximum des pressions et du maximum des tensions longitudinales non dangereuses des fibres.* — Mais, pour les pièces à section non symétrique par rapport à cette ligne passant par le centre de gravité des sections, il est nécessaire, afin d'assurer la stabilité de la cohésion, de satisfaire à deux conditions

$$M = \text{ou} < R_0 \frac{I}{v'}, \quad M = \text{ou} < R'_0 \frac{I}{v''},$$

et par conséquent de connaître les valeurs à donner aux deux coefficients R_0, R'_0 ou aux deux limites $\frac{R_0}{E}$, $\frac{R'_0}{E}$ qu'il faut imposer à la dilatation et à la contraction longitudinale des fibres.

Si leur rapport $\frac{R'_0}{R_0}$ était connu, l'observation de constructions éprouvées, et, ensuite, des expériences de rupture par flexion (§ 12)

(Du n° 113).

faites sur des pièces à section rectangle ou autre symétrique de diverses variétés de la même matière, donneraient la valeur du plus petit de ces deux coefficients, et l'autre s'en déduirait.

Mais il s'agit d'obtenir ce rapport.

Pour pouvoir y arriver, rappelons que, d'après le principe général de résistance énoncé au § 4 de la note du n° 3 et appliqué déjà, § 7, aux matières d'égale contexture en tous sens, c'est par les dilatations latérales qu'elles provoquent que les contractions longitudinales amènent un danger ou un commencement de désagrégation. Appelons donc

E_t le coefficient d'élasticité de la matière d'un prisme, dans un sens transversal ou perpendiculaire aux arêtes;

R_t, R_{ot}, pour ce même sens, les valeurs des quantités qui sont appelées R, R_o pour le sens longitudinal, c'est-à-dire R_t la cohésion transversale instantanée ou la force qui séparerait immédiatement la matière dans le sens transversal, sur l'unité superficielle de section parallèle aux fibres, et R_{ot} la cohésion transversale permanente ou la force de traction, limite de celles qui peuvent être supportées sans danger un temps indéfini; ou appelons

$$\frac{R_{ot}}{E_t}$$

la limite des dilatations non dangereuses dans le même sens transversal.

Si η représente, comme aux notes des n°s 21 et 80, le rapport des dilatations transversales aux contractions longitudinales qui les provoquent, la dilatation transversale limite $\frac{R_{ot}}{E_t}$ répondra à une contraction longitudinale $\frac{1}{\eta}\frac{R_{ot}}{E_t}$, ou à la contraction que produit une force de compression longitudinale $E.\frac{1}{\eta}\frac{R_{ot}}{E_t}$ par unité de la section ω du prisme. Ce sera la valeur de la limite R'_o à imposer à ces compressions; on a donc, en divisant par R_o,

$$\frac{R'_o}{R_o} = \frac{1}{\eta}\frac{E}{E_t}\frac{R_{ot}}{R_o}.$$

(Du n° **113**).

Dans le second membre de cette égalité, E est connu; le coefficient E_t de l'élasticité transversale peut être tiré d'observations, ainsi que le rapport η, qui peut d'ailleurs être regardé comme ne variant qu'entre 1/5 et 1/2 (fin du § 5 de la note du n° 21).

Quant à la limite R_{ot} des *tractions transversales* non dangereuses, on ne voit pas par quel moyen elle pourrait se déterminer.

Mais nous pouvons, comme au § 11, prendre à peu près pour valeur du rapport $\frac{R_{ot}}{R_o}$ de deux cohésions permanentes, celui $\frac{R_t}{R}$ des deux cohésions instantanées, dont la seconde est connue, et dont la première, R_t, peut être trouvée par une expérience facile de rupture par traction d'un petit prisme taillé dans un sens perpendiculaire aux fibres. On peut donc poser approximativement

$$\frac{R'_o}{R_o} = \frac{1}{\eta}\frac{E}{E_t}\frac{R_t}{R}.$$

Cette expression se réduit à $\frac{1}{\eta}$ lorsqu'il y a égalité de contexture dans les deux sens, et par conséquent, comme nous avons déjà dit, si l'égalité a lieu dans tous, à

$$\frac{R'_o}{R_o} = 4$$

puisque l'analyse donne alors $\eta = \frac{1}{4}$.

Pour exemple d'un cas d'inégale contexture prenons le bois de chêne. Comme on a, d'après les expériences de MM. Wertheim et Chevandier [1],

Dans le sens du rayon de l'arbre	$E_t = 188\,700\,000$,	$R_t = 582\,000$,
Id. de la tangente aux couches	129 800 000,	406 000,
Et, pour le sens longitudinal (moyenne de 2 espèces de chêne)	949 800 000;	6 075 000.

on trouvera

$$\frac{E}{E_t}\frac{R_t}{R} = \begin{cases} 0{,}482 & \text{pour le sens du rayon,} \\ 0{,}489 & \text{pour le sens des couches.} \end{cases}$$

[1] Mémoire présenté le 5 octobre 1846 et inséré aux *Annales de chimie et de physique* en 1848, quatrième partie.

(Du n° **113**).

Quant au rapport η des dilatations transversales aux contractions longitudinales, aucune expérience ne l'a fait connaître pour les bois, et il n'est lié par aucune relation théorique avec le rapport des élasticités E, E_t. Mais en le regardant comme $= 1/4$ pour les matières d'égale contexture en tous sens, et en considérant que M. Wertheim a trouvé $\eta = 1/3$ pour le verre et pour le laiton, matières qui sont à coup sûr d'une élasticité moins inégale que le bois, prenons, pour celui-ci, $\eta = 0,4$ ou $0,45$, nous aurons pour le chêne

$$\frac{R'_o}{R_o} = \left(\frac{1}{0,40} \text{ ou } \frac{1}{0,45}\right) 0,4855 = 1,21 \text{ ou } 1,08.$$

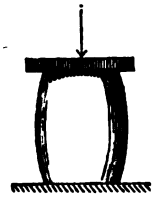
Pour les pièces de fonte de fer, comme les coefficients d'élasticité dans les deux sens doivent différer assez peu, ainsi que les cohésions, bien qu'il y ait une certaine différence de contexture, si nous réduisons $\frac{R'_o}{R_o}$ à $\frac{1}{\eta}$ et si nous adoptons la valeur $\eta = 1/3$ trouvée pour d'autres matières fondues, nous aurons

$$\frac{R'_o}{R_o} = 3.$$

La recherche de η et de E_t exige des expériences délicates. On pourrait, afin de s'en dispenser, être porté à prendre pour $\frac{R'_o}{R_o}$ le rapport $\frac{R'}{R}$ des forces qu'on trouve dans les expériences ordinaires de rupture immédiate par écrasement et par extension. Il en résulterait moins de 1 pour le bois, 8 à 10 pour la pierre, et environ 6 pour la fonte [1]. Mais l'adoption de ce dernier nombre serait évidemment contraire au conseil de prudence et même de simple logique qui doit, comme on a dit (§ 9 de la note du n° 3), faire limiter les écartements moléculaires transversaux du côté des fibres comprimées, comme leurs écartements du côté des fibres dilatées. Sans nier donc tout à fait qu'on puisse

[1] *Recherches*, etc., de M. Hodgkinson, p. 16 de la traduction de M. Pirel, où l'on trouve une moyenne de 6,6. Les expériences plus récentes du *Report of the commissioners*, etc., ont donné moyennement moins de 6.

tirer quelques lumières des valeurs du rapport $\frac{R'}{R}$, il paraîtra clair qu'on ne doit pas l'adopter pour $\frac{R'_0}{R_0}$ quand il a des valeurs aussi différentes de celles que peut probablement avoir $\frac{1}{\eta}\frac{E}{E_t}\frac{R_t}{R}$. On peut bien avec quelque probabilité substituer approximativement au rapport de deux tractions-limites celui des deux tractions produisant la rupture immédiate, mais il n'y a pas de raison de faire de même quand il s'agit du rapport d'une traction à une pression. L'évaluation expérimentale de la résistance R' à la rupture par compression est d'ailleurs toujours fort incertaine, car tantôt le prisme comprimé fléchit un peu, ce qui donne une résistance trop faible, tantôt on en obtient une beaucoup trop forte parce que le frottement sur ses bases s'oppose à sa dilatation latérale, comme on a dit au § 8 de la note du n° 3.



Un moyen plus rationnel, mais qui prête encore à erreur, consiste à soumettre à la rupture immédiate par flexion des pièces dont la section offre la forme d'un double T, ou est composée de deux parties ou *semelles* horizontales reliées par un *corps vertical* mince (§ 9, ou ci-après § 16 de la note du n° 120), et de faire varier le rapport des aires des deux semelles sans changer l'aire totale, ni la hauteur ni l'épaisseur du corps vertical qui les unit, jusqu'à ce qu'on arrive à la section qui exige la plus grande charge pour être rompue, et qui donne même des signes de rupture à la fois des deux côtés, savoir par arrachement du côté étendu, et par *séparation du coin* (§ 8 note du n° 3 page 10) du côté comprimé. C'est ce qu'a fait M. Hodgkinson pour la fonte de fer [1]. La forme de plus grande résistance à laquelle il est arrivé ainsi, et qu'il regarde comme la meilleure, est figurée au § 18 de la note du n° 120, où elle est l'objet d'un calcul. Le rapport des aires de la semelle dilatée à la semelle contractée est de 5,8 à 1; c'est, dit l'auteur, « à peu près le rapport des résistances moyennes de la

[1] *Recherches*, etc., déjà citées, ou traduction de M. Pirel, pages 87 à 101.

fonte à l'écrasement et à la rupture par extension. » Mais ce n'est pas une raison de l'adopter pour $\frac{R'_e}{R_e}$; car le calcul exact, fait en tenant compte du corps vertical, prouve qu'il n'y a cependant qu'un rapport de 2,859 (ci-après le § 18 cité) *entre la plus grande compression et la plus grande extension des fibres.* Si l'on adopte pour $\frac{R'_e}{R_e}$ ce dernier rapport, donné par celui des distances du centre de gravité aux deux bases, on a, comme on voit, un nombre différant peu de 3, que nous avons été déterminé à adopter pour la fonte en faisant des suppositions plausibles sur les éléments de la formule $\frac{1}{\eta}\frac{E}{E_t}\frac{R_t}{R}$, fondée sur la considération d'un état fort éloigné de la rupture.

Il a été fait en 1850 et 1851 sur des fers laminés, par M. Ferdinand Zorès, alors entrepositaire de produits d'usines [1], des expériences qu'on peut regarder comme ayant quelque analogie avec celles de M. Hodgkinson sur la fonte. Mais leurs résultats sont loin d'offrir la même concordance avec la théorie; car l'expérimentateur ayant remarqué que la rupture par flexion des fers à double T symétriques ou à semelles égales s'opérait toujours par la semelle supérieure « refoulée sur elle-même, *rejetée à droite ou à gauche*, sans que la semelle inférieure (ou dilatée) éprouve d'altération, » a adopté un profil dans lequel cette semelle supérieure ou comprimée a une aire double à peu près de l'autre, ce qui a produit une *augmentation de plus d'un cinquième* dans les résistances à la rupture, à poids égal et à hauteur égale des pièces.

En calculant la position du centre de gravité de quelques-unes des sections ainsi constituées, on trouve que le rapport des plus grandes contractions aux plus grandes dilatations des fibres dans la flexion, est 0,84 au minimum et 0,91 au maximum. Mais nous ne voyons pas de raison d'adopter de pareils nombres pour valeurs de $\frac{R'_e}{R_e}$ relatives au fer forgé ou laminé; ils sont trop éloignés de $\frac{1}{\eta}\frac{E}{E_t}\frac{R_t}{R}$, qui doit évidemment surpasser 2, car pour cette matière,

[1] *Recueil de fers spéciaux*, publié en 1853.

(Du n° **113**).

$\frac{E}{E_t}\frac{R_t}{R}$ doit différer peu de l'unité. Leur adoption ne ferait trouver d'ailleurs qu'un avantage de 1/13 à 1/27 à rendre les semelles inégales. L'avantage de 1/5, manifesté par les expériences de 1851 (que des expériences toutes récentes n'ont point confirmées) tenait probablement à des effets compliqués ; par exemple à ce que la semelle supérieure, fortement comprimée, fléchissait latéralement à la manière des *pièces debout*, surtout lorsqu'il y avait un peu de *déversement* (note ci-après du n° 120, §§ 4 et 13) ; et c'est ce que semble même indiquer le compte rendu des expériences, où la semelle supérieure était « rejetée à droite ou à gauche. »

Il faut bien d'ailleurs se souvenir que l'état pour lequel on pose les équations de résistance permanente est bien éloigné de l'état où se trouvent les pièces dans les expériences de rupture. L'avantage d'une plus grande superficie de la semelle supérieure, s'il est réel pour les fortes charges produisant la rupture immédiatement, est plus que douteux lorsqu'il s'agit de charges permanentes incomparablement moindres, ne déterminant dans la semelle supérieure qu'une simple compression longitudinale accompagnée des dilatations transversales ordinaires, sans atteindre la grandeur capable de déterminer le commencement de sa flexion latérale (ci-après, n° 383) ; c'est-à-dire n'offrant que le danger de la rupture *éloignée*, qui doit dépendre des seuls écartements moléculaires.

Nous ne croyons donc pas que pour le fer forgé ou laminé on doive jamais prendre $\frac{R'_0}{R_0}$ moindre que 1 ; nous pensons qu'on pourrait adopter plutôt pour ce rapport la valeur 2.

Cela n'empêche pas, comme on verra surtout aux §§ 17 et 18 de la note du n° 120, les sections à semelles égales ou peu inégales d'être avantageuses à un autre point de vue, savoir celui de la *résistance élastique à la flexion* ou de la petitesse des flèches, et de pouvoir, par suite, résister mieux, même à la rupture éloignée, sous des charges qui ne seraient pas immobiles ni d'une intensité constante (§ 12 de la note du n° 21).

§ 14. *Examen de la méthode consistant à adopter une même limite des dilatations pour les diverses qualités ou variétés d'une même ma-*

(Du n° 113).

tière. — Plusieurs auteurs, après avoir déterminé la grandeur de la limite $i' = \frac{R}{E}$ des dilatations pour une certaine matière, d'après des constructions où elle est employée, etc. (§§ 10 à 13), semblent conseiller d'adopter la même grandeur i' (soit 0,0006, par exemple, pour le fer) pour toutes les autres variétés ou qualités de la même matière, sans avoir égard aux expériences comparatives de rupture immédiate.

Cette méthode revient à prendre les *cohésions permanentes* $R_0 = Ei'$ proportionnelles aux *coefficients d'élasticité* E des diverses variétés, au lieu de les prendre proportionnelles aux *cohésions instantanées* R mesurées au moyen de la rupture par extension ou bien par flexion.

Bien qu'il soit évidemment plus naturel de proportionner R_0 à R qu'à E, nous ne condamnons pas entièrement cette méthode, vu la difficulté du sujet. Mais nous pensons qu'il faut en réduire l'usage à obtenir une sécurité de plus.

Si donc il résulte, de l'adoption des cohésions permanentes R_0 proportionnelles aux cohésions instantanées R, quelque valeur de $i' = \frac{R_0}{E}$ trop au-dessus de celle qu'on aura été déterminé à adopter pour la variété à laquelle on compare les autres, on la réduira de manière à ne pas excéder celle-ci du tiers ou de moitié par exemple : en sorte que si, pour une certaine qualité de fer forgé, on avait adopté $i' = 0.0006$, on ne prendra pas au delà de $i' = 0.0008$ ou 0.0009 pour les autres qualités; car l'énervation ou la désagrégation doit bien dépendre des écartements moléculaires.

§ 15. *Cas où la contexture varie dans l'étendue des sections.* — Supposons qu'on veuille tenir compte, comme aux §§ 7 des notes du n° 21 et du n° 80, du défaut d'homogénéité de la matière, pour le cas où nous avons posé, au lieu de $M = \frac{EI}{\rho}$, en appelant E_0 le coefficient d'élasticité de toute la partie centrale, e une constante relative à une couche mince d'une contexture différente sur les bords, et j le moment d'inertie du périmètre (ou plutôt de la ligne moyenne

(Du n° **113**).

de la couche dont le module d'élasticité excède celui du reste, de e divisé par son épaisseur)

$$M = \frac{E_0 I + ej}{\rho}.$$

Et bornons-nous aux matières qui cèdent par l'extension des fibres du côté que la flexion rend convexe. Comme on a $\frac{v}{\rho} = \frac{\mathbf{R}}{E}$ pour la dilatation d'une fibre quelconque dont la tension est appelée $\mathbf{R}$, si l'on élimine ρ, on obtient, au lieu de l'équation $M = R\frac{I}{v}$ des §§ précédents,

$$M = \frac{\mathbf{R}}{Ev}(E_0 I + ej).$$

Il faut, dans cette équation, pour qu'elle soit celle de cohésion permanente, substituer à $\mathbf{R}$ la limite des tensions non compromettantes pour la qualité de matière de la fibre quelconque à la distance v, et écrire, R désignant cette limite,

$$M = \text{ou} < \text{minimum de } \frac{R}{Ev}(E_0 I + ej).$$

Dans cette équation, $\frac{R}{Ev}$ n'est pas constant comme était $\frac{\mathbf{R}}{Ev} = \frac{1}{\rho}$ dans la précédente; il varie d'une fibre à l'autre. Il faut mettre sa valeur relative à la fibre la plus exposée, ou pour laquelle ce quotient est le plus petit. Si l'on a des raisons de penser que c'est la fibre la plus dilatée, comme quand la matière est homogène, ou que la contexture hétérogène est telle que le rapport $\frac{R}{E}$ varie moins que v, l'équation sera, en désignant comme à l'ordinaire par v' la grandeur de l'ordonnée de cette fibre, et par E', R' les valeurs correspondantes de E, R :

$$M = \frac{E_0}{E'} R' \frac{I}{v'} + \frac{e}{E'} R' \frac{j}{v'},$$

ou bien, R et r désignant deux constantes dépendant comme E_0 et e de la nature de la matière et de son mode de forgeage ou de fusion :

$$M = R\frac{I}{v'} + r\frac{j}{v'}.$$

(Du n° 112).

Si l'on veut représenter par une équation de cette forme les expériences de *rupture immédiate* des barres rectangulaires par exemple, on déterminera les constantes R, r (dont nous ôtons alors les indices $_0$, § 4), de manière à rendre aussi petits que possible, en les compensant mutuellement, les *écarts* ou les différences entre le premier et le second membre. Comme ce sont les écarts proportionnels plutôt que les écarts absolus qu'il s'agit d'atténuer, on écrira, en divisant par $\frac{I}{v'}$,

$$M \cdot \frac{v'}{I} = R + r\frac{j}{I}$$

ou, b, c étant la largeur et la hauteur de la section, b', c' les mêmes dimensions diminuées de la demi-épaisseur présumée de la couche d'une contexture différente du reste

$$M \cdot \frac{6}{bc^2} = R + \frac{6b'c'^2 + 2c'^3}{bc^3} \cdot r.$$

Et l'on obtiendra les deux coefficients R, r par les méthodes dont on se sert pour déterminer les deux paramètres des formules des eaux courantes [1], afin de remplacer (§ 7 de la note du n° 80) le mieux possible, par une ligne droite, la suite des points ayant les $\frac{j}{I}$ pour abscisses et les $M\frac{v'}{I}$ pour ordonnées. Cette ligne doit passer par le centre de gravité général des points, pour que la somme des écarts en moins soit égale à la somme des écarts en plus; mais il ne sera pas toujours facile de choisir *visuellement* sa meilleure direction. Alors on se servira soit de la méthode de Laplace qui atténue le plus possible la somme des valeurs absolues des écarts [2], soit de la méthode plus connue de la *moindre somme de leurs carrés*, soit de la méthode d'interpolation bien plus expéditive et très suffisante de M. Cauchy [3], souvent employée par les astro-

(1) Voyez *Recherches physico-mathématiques*, de Prony, — ou bien *Mémoire sur des formules et des tables nouvelles pour les eaux courantes*, in-8°, 1852, n°s 3 et 6; et aussi *Annales des mines*, 4e série, t. XX, 1852, p. 187 à 202.

(2) *Mécanique céleste*, 1re partie, liv. 3, n° 40.

(3) *Journal Liouville*, mai 1837.

nomes [1], et qui revient dans notre cas particulier de deux coefficients seulement, *à joindre ensemble les centres de gravité des deux groupes de points situés l'un à gauche l'autre à droite de l'ordonnée de leur centre de gravité général* [2], procédé aussi facile à retenir qu'à exécuter [3].

Si l'on n'applique cette équation que pour l'instant où commence le danger d'énervation, en sorte qu'elle exprime la condition de cohésion permanente et non celle de cohésion instantanée, on l'écrira

$$M = R_0 \frac{I}{v'} + r_0 \frac{j}{v}.$$

Elle est alors exacte comme est celle $M = R_0 \frac{I}{v'}$ des §§ précédents relative à une matière dont les propriétés ne varient pas vers le périmètre ; et on pourra prendre pour R_0 et r_0 certaines fractions des valeurs R, r obtenues des expériences de rupture immédiate.

Pour les pièces de bois on aurait, r_1 étant comme au § 7 de la note du n° 80, le rayon de l'arbre dont on les a extraites, r_0 la distance du centre de leur section rectangulaire $b \times c$ au centre des couches ligneuses, une formule

$$M \frac{v'}{I} = R \mp r \left(\frac{1}{3} \frac{b^2}{4r_1^2} + \frac{3}{5} \frac{c^2}{4r_1^2} + \frac{r_0^2}{r_1^2} \right),$$

dont on déterminerait les coefficients R, r par plusieurs expériences, comme on vient de dire.

§ 16. *Possibilité de dépasser beaucoup la limite de dilatation adoptée pour les cas ordinaires, lorsqu'il y a simultanément et dans un autre sens, de fortes contractions.* — Nous avons déjà dit à

(1) Mémoire de M. Yvon Villarceau sur les étoiles doubles, à la *Connaissance des temps*, 1852.

(2) N° 6 du Mémoire cité sur les Eaux courantes.

(3) Nous avons ainsi trouvé par les 64 expériences du capitaine Henry James sur les barres de fonte (*Report of the Commissioners*, 1849, p. 250-253), en regardant la couche comme très-mince ou en supposant $b' = b$, $c' = c$, une formule représentant mieux les résultats que celle $M = R(1,18 - 0,04D) \frac{I}{v'}$ proposée par M. Love (Mémoire sur *la Résistance du fer et de la fonte*, 1852, p. 55), et où D désigne la plus petite des deux dimensions transversales sans distinction de sa direction par rapport aux forces. Nous aurions eu sans doute une approximation plus grande en supposant b', c', moindres que b, c d'un ou deux millimètres.

(Du n° 113).

la fin du § 8, que des fibres *surtendues*, ou dilatées jusqu'à éprouver ces petites disjonctions intérieures et en quelque sorte cellulaires qui constituent l'énervation probablement, pouvaient bien malgré cela, et même sous un effort indéfiniment continué, ne pas rompre d'une manière totale et patente, si les autres fibres du solide, moins dilatées, gardaient leur contexture et leur résistance.

Il y a plus encore. Divers faits établissent que lorsqu'un solide est très-fortement comprimé, en certains points et en certains sens, il peut éprouver, aux mêmes points et dans d'autres sens, des dilatations extrêmement considérables, sans rompre ni se désagréger aucunement, comme si les compressions comblaient les vides des disjonctions produites par les dilatations.

Ainsi, dans une expérience de MM. Easton et Amos, dont nous avons déjà parlé au § 8 de la note du n° 3 et sur laquelle nous reviendrons (1) le diamètre intérieur d'un cylindre creux en fonte de fer, contenu extérieurement par un cylindre plus fort (où on l'avait introduit en chauffant celui-ci) a été porté de 89 à 94 millimètres par une énorme compression exercée sur de l'étain dont on l'avait rempli, ce qui a fait éprouver à la circonférence de l'évidement une dilatation de près de $\frac{1}{18} = 0,0556$, ou de trente-trois fois la proportion de l'allongement de rupture immédiate d'une barre de fonte.

Dans une autre expérience (2) où la pression exercée sur du plomb avait constamment fendu, en commençant par l'intérieur, les cylindres de fonte non contenus, un cylindre de *fer forgé* avait seul pu résister, en se dilatant aussi beaucoup intérieurement mais non extérieurement.

On sait d'ailleurs, pour ce dernier métal, par son étirage à froid en fils, par son martelage aussi à froid, et, pour le cuivre, par l'emboutissage presque instantané des rondelles dont on fait des capsules, etc., que des extensions considérables peuvent être opé-

(1) *The Britannia and Conway tubular Bridges, by Edwin Clarke*, 1850, note de la page 311. Cette expérience est citée par M. Couche à la page 445 du *Mémoire* inséré au t. XX des *Annales des mines*.

(2) Même ouvrage de M. Clarke, p. 305, cité par M. Morin à la 2e édition (1857) des *Leçons sur la résistance des matériaux*, p. 112.

rées sans disjonction ou énervation lorsque les molécules sont fortement retenues dans un sens perpendiculaire à celui de l'extension.

D'où l'on peut inférer que de fortes dilatations au centre des pièces solides ou dans les parties des bords qui sont serrées par d'autres solides ne doivent pas inquiéter, et qu'il n'y a lieu de les limiter que vers les surfaces libres ou en contact avec l'atmosphère; surfaces dont les points, au reste, sont ceux pour lesquels les extensions longitudinales, ou les dilatations transversales dues aux compressions, sont ordinairement les plus fortes.

Il serait désirable que des expériences plus ou moins analogues à celles de MM. Easton et Amos pussent être faites sur d'autres matériaux, par exemple sur les pierres dures et les bois.

§ 17. *Dimensions déterminées en vue de limiter la flexion, etc., des pièces, et non les proportions des dilatations les plus grandes de leurs parties.* — Remarquons que dans quelques circonstances ce n'est pas en vue de la crainte d'une rupture qu'il faut modérer les charges ou régler les dimensions des pièces, c'est en vue de limiter des déformations qui deviendraient nuisibles.

Ainsi, une solive de plancher, un rail de chemin de fer qui, sans rompre, prendrait une flèche trop considérable, deviendrait par cela seul incapable de remplir sa destination; il en serait de même d'un arbre tournant de machine qui se tordrait d'un angle trop considérable.

Alors les formules pratiques sont plus faciles à dresser. On les tire simplement de celles de *l'élasticité*, comme a fait M. Tredgold qui a donné il y a longtemps, pour calculer l'équarissage des pièces chargées au milieu, une formule $\left(\text{revenant à } 2P = \frac{1}{10}\frac{EI}{(2a)^2}\right)$ et une table basée sur la limitation, à $\frac{1}{480}$, du rapport $\frac{f}{2a}$ de la flèche de courbure à la longueur [1].

[1] Table I ou n° 5 de l'Introduction de l'*Essai pratique sur la résistance du fer coulé*, traduit en 1826. Nous avons dit à la sous-note du § 10 que la Table II, basée sur un autre principe, celui de la limitation de la tension ou de la dilatation des fibres, donnait des dimensions telles que la charge n'atteigne pas les trois quarts de celle qui commence à altérer, suivant M. Tredgold, la force élastique.

114. Si la section transversale peut être partagée en deux parties symétriques par une ligne perpendiculaire à la direction de la force qui agit sur le corps, l'axe d'équilibre est placé dans cette ligne. Les deux intégrales sont égales, et l'on a

$$\mathrm{r} = \frac{2\mathrm{R}}{v'} \int_0^b du \int_0^{f_1 u} dv . v^2$$

pour l'expression du moment de rupture.

En comparant ces formules avec celles qui ont été trouvées n° 80 pour représenter le moment de flexion, on reconnaît que l'expression du moment de rupture peut être déduite de celle du moment de flexion en écrivant R à la place de E, et en divisant par v', c'est-à-dire par la distance à l'axe d'équilibre contenant les fibres invariables, de la fibre qui en est le plus éloignée. D'après cela, les expressions des n°s 81 et suivants donneront immédiatement les résultats ci-après.

115. La section est un rectangle (Fig. 2) dont b et c sont la largeur et l'épaisseur, $v' = \frac{c}{2}$, et l'expression du moment de rupture est

$$\mathrm{r} = \frac{2\mathrm{R}}{c} \cdot \frac{bc^3}{12} = \mathrm{R}\,\frac{bc^2}{6}.$$

116. La figure de la section étant formée de deux triangles égaux (Fig. 3) dont les côtés sont p et q, le moment de la résistance à la rupture est

$$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{R}}{q} \cdot \frac{pq^3}{6} = \mathrm{R}\,\frac{pq^2}{6}.$$

117. La figure de la section étant un rectangle dont les côtés sont b, c, et l'axe contenant les fibres invariables formant l'angle φ avec le côté b, le moment de rupture est

$$\mathrm{r} = \mathrm{R}\,\frac{b^3c^2\sin^2\varphi + bc^3\cos^2\varphi}{6(b\sin\varphi + c\cos\varphi)}.$$

Quand la section est un carré cette formule se réduit à

$$r = R\,\frac{b^3}{6(\sin\varphi + \cos\varphi)};$$

et si la pièce est fléchie dans le sens d'une des diagonales du carré, l'on a

$$r = R\,\frac{b^3}{6\sqrt{2}}.$$

Ainsi une pièce à base carrée fléchie dans le sens des diagonales de la base résiste moins à la rupture qu'elle ne le fait quand elle est fléchie dans le sens des côtés de cette base, dans le rapport de 1 à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (*).

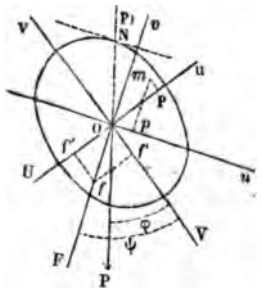
(*) § 1. *Erreur où peut faire tomber la première formule du n° 117.* — La fin de ce numéro, relative au cas où la section est un carré, est exacte, parce que tout prisme dont la section est une figure ayant ses moments d'inertie égaux autour de toutes les droites tracées sur son plan par son centre de gravité (§ 8 de la note du n° 83), fléchit toujours *dans le plan même où il est sollicité pour fléchir* (§ 1 de la même note) ou dans le plan du moment sollicitant $M = P(a - x)$ ou $= Pa$ des n°s 77, 86, 121, etc.

Mais la formule $r = R\,\frac{b^3c\sin^2\varphi + bc^3\cos^2\varphi}{6(b\sin\varphi + c\cos\varphi)}$ du commencement, comme celle $\varepsilon = \ldots$ du n° 83 (p. 52) n'est propre qu'à induire dans une erreur où l'on tombera nécessairement avec quelques auteurs si l'on pose, comme il est indiqué au n° 121, $r = M = Pa$ en y mettant pour r l'expression signalée.

Cela vient (comme on a déjà dit à la note du n° 83) de ce que la flexion ne s'effectue pas *dans le plan de sollicitation à fléchir*, lorsque ce plan n'est pas parallèle à l'un des deux axes principaux d'inertie des sections.

§ 2. *Établissement direct de l'équation de cohésion pour une sollicitation oblique aux axes principaux des sections.* — Si φ dé-

(Du n° 117).



signe, comme à la note du n° 83, et pour une section de forme quelconque, l'angle aigu POV que fait le plan de sollicitation P_1OP avec l'axe d'inertie Ov prolongé, et ψ celui vOv que fait avec le même axe principal Ov, le plan de flexion effective FOv, ou l'angle égal uOu de la ligne des fibres invariables Ou, perpendiculaire à OF, avec l'autre axe d'inertie Ou de la section, on a (note du n° 83), pour déterminer cet angle ψ non connu *à priori*, $\operatorname{tang}\psi = \frac{I'}{I''}\operatorname{tang}\varphi$, I', I'' étant les moments d'inertie de la section autour des axes principaux Ou, Ov.

Mais, plutôt que de mettre cet angle à la place de φ dans la formule $r = \ldots$ du texte relative au rectangle ayant ses côtés b, c parallèles à Ou, Ov, et de l'égaler à la composante $M\cos(\psi - \varphi)$ du moment M ou Pa autour de la ligne des fibres invariables Ou, il est bien plus simple de poser, autour des deux axes principaux, deux équations d'équilibre de rotation entre les forces extérieures et les forces intérieures qu'on peut exprimer comme au n° 112 (sans parler de E ni du rayon ρ) par

$$\frac{R}{v'}\,v\,d\omega.$$

Il en résulte, en effet, en remplaçant (comme à la note du n° 83, p. 54) v par sa valeur $v\cos\psi + u\sin\psi$, où v et u sont les distances d'une fibre quelconque m aux deux axes principaux Ou, Ov, deux équations

$$M\cos\varphi = \frac{R}{v'}\,I'\cos\psi, \quad M\sin\varphi = \frac{R}{v'}\,I''\sin\psi$$

qui, ajoutées ensemble après avoir multiplié la première par $\frac{v}{I'}$ et la seconde par $\frac{u}{I''}$ donnent

$$M\left(v\,\frac{\cos\varphi}{I'} + u\,\frac{\sin\varphi}{I''}\right) = R\,\frac{u\cos\psi + v\sin\psi}{v'} = R\,\frac{v}{v'};$$

d'où, en faisant $v =$ sa plus grande valeur v', et $R = R_0$ limite des efforts non dangereux, cette équation *de cohésion permanente* :

(Du n° 117).

$$M = \text{minimum de } \frac{R_0}{\frac{v}{I'}\cos\varphi + \frac{u}{I''}\sin\varphi}.$$

Elle convient à des prismes ayant des sections de toutes les formes, sollicités obliquement à leurs axes principaux.

§ 3. *Application à la section rectangle dont les côtés sont b et c.* — Comme les plus grandes valeurs des coordonnés v et u sont $\frac{1}{2}c$ et $\frac{1}{2}b$, et comme $I' = \frac{bc^3}{12}$, $I'' = \frac{b^3c}{12}$, on a

$$M \text{ ou } Pa = \frac{R_0}{\frac{6}{bc^2}\cos\varphi + \frac{6}{b^2c}\sin\varphi} = \frac{R_0}{6}\,\frac{b^2c^2}{b\cos\varphi + c\sin\varphi}.$$

Cette formule est très-différente de celle $M \text{ ou } Pa = \frac{R_0}{6}\,\frac{b^3c\sin^2\varphi + bc^3\cos^2\varphi}{b\sin\varphi + c\cos\varphi}$ qu'on poserait d'après ce qui est dit au texte. Nous avons remarqué ailleurs, depuis longtemps [1], et on peut vérifier facilement que cette dernière équation inspirerait une fausse sécurité; car si, par exemple, l'angle φ est demi-droit, la valeur qu'elle donne pour la charge P est $\frac{b^2+c^2}{2bc}$ fois celle qui résulte de la formule exacte qu'on vient de donner; et ce rapport $\frac{b^2+c^2}{2bc}$, toujours plus grand que l'unité, a pour valeurs. . . . 1,083, 1,250, 1,667, etc.
selon que le rapport de l'un des deux côtés du rectangle à l'autre côté est. . . . . 3/2, 2, 3, etc.

Le sens de sollicitation le *plus dangereux* est celui pour lequel $b\cos\varphi + c\sin\varphi$ est le plus grand, ou pour lequel

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{c}{b},$$

ce qui donne le sens perpendiculaire à l'une des deux diagonales du rectangle. Alors $M \text{ ou } Pa = \frac{R_0}{6}\cdot\frac{b^2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$.

(1) 30 octobre 1843, aux *Comptes rendus de l'Académie*, t. XVII, p. 949.

(Du n° 117).

Généralement, toutes les fois que u, v, répondant au maximum du dénominateur $\frac{v}{I'}\cos\varphi + \frac{u}{I''}\sin\varphi$, ont une valeur fixe, ce maximum par rapport à φ a lieu pour

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{u}{v}\frac{I'}{I''},$$

ce qui donne pour condition de résistance permanente

$$M = \frac{R_0}{\sqrt{\frac{v^2}{I'^2} + \frac{u^2}{I''^2}}}$$

§ 4. *Établissement élémentaire de ces formules.* — On l'opère en considérant (comme au § 9 de la note du n° 83) le prisme comme *éprouvant simultanément deux flexions* dues, l'une, à des forces qui ont un moment $M' = M\cos\varphi$, l'autre à des forces qui ont un moment $M'' = M\sin\varphi$, et produisant des déplacements qui se composent d'après le principe de simultanéité du § 2 de la note du n° 21. On dira donc simplement que si la fibre située à la distance v' de l'axe du premier moment et à la distance u' de l'axe du second éprouve une dilatation due à une tension R par unité de section, celle qui est située aux distances v, u des mêmes axes éprouvera une dilatation due à la tension $R\frac{v}{v'}$ si le moment ou couple M' agit seul, et une dilatation due à la tension $R\frac{u}{u'}$ si le couple M'' agit seul pour fléchir respectivement autour de ces deux axes supposés principaux ; et l'on aura, aussi respectivement, $M' = R\frac{I'}{v'}$, $M'' = R\frac{I''}{u'}$ pour l'équilibre de rotation. Si ces deux couples agissent à la fois, la fibre éprouvera une dilatation totale, somme des deux dilatations partielles, ou due à la tension totale

$$R\frac{v}{v'} + R\frac{u}{u'} = M'\frac{v}{I'} + M''\frac{u}{I''}.$$

Donc, pour que cette dilatation atteigne la limite des dilatations non dangereuses, ou soit celle qui est due à la tension-limite R_0, on doit avoir l'équation suivante (donnée en octobre et novembre 1843 aux articles cités des *Comptes rendus*) :

118. La figure de la section transversale étant un cercle (Fig. 4) dont r est le rayon, l'expression du moment de la résistance à la rupture est

$$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{R}}{r}\,\frac{\pi r^4}{4} = \mathrm{R}\,\frac{\pi r^3}{4}.$$

Les moments de rupture, pour le carré et le cercle inscrit, sont entre eux dans le rapport de 1 à $\frac{3\pi}{16}$, le même qui a lieu pour le cas de la flexion (*).

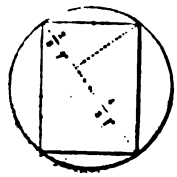
119. A l'égard d'un tuyau, r' et r'' étant les rayons des deux cylindres extérieur et intérieur, remarquant que le moment de rupture du vide intérieur supposé plein est

---

$$\mathrm{R}_{\prime\prime} = \text{maximum de } \mathrm{M}'\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{I}'} + \mathrm{M}''\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{I}''},$$

d'où $\mathrm{M} = \text{minimum de } \dfrac{\mathrm{R}_{\prime\prime}}{\dfrac{\mathrm{v}}{\mathrm{I}'}\cos\varphi + \dfrac{\mathrm{u}}{\mathrm{I}''}\sin\varphi}$ comme à la fin du § 2.

(*) *Perte de force des arbres équarris.* — Si c'est un cercle *circonscrit* que l'on compare au carré pour la flexion, le rapport, au lieu de 1 à $\frac{3\pi}{16} = 0{,}5890$, est de 1 à $\frac{3\pi\sqrt{2}}{8} = 1{,}6661$. Un arbre perd ainsi considérablement de sa force lorsqu'on l'équarrit. Et cela a lieu même lorsqu'on en tire la pièce à section rectangle ci-après (du n° 120), dont les deux côtés sont entre eux dans le rapport 1 à $\sqrt{2}$ $\left(\text{fournis par les équations } b^2 + c^2 = 1,\ \frac{d(bc^2)}{db} = 0\right)$ ou par la construction ci-contre où l'on divise le diamètre en deux parties comme 1 est à 2; car le rapport des résistances du rectangle et du cercle est de 1 à $\frac{9\pi\sqrt{3}}{32} = 1{,}53039$.



$$\frac{R}{r'} \cdot \frac{\pi r''^4}{4},$$

on a, pour le moment cherché,

$$\mathfrak{r} = R \frac{\pi(r'^4 - r''^4)}{4r'}.$$

A sections transversales égales, un cylindre plein et un tuyau offrent des résistances à la rupture qui sont entre elles dans le rapport de

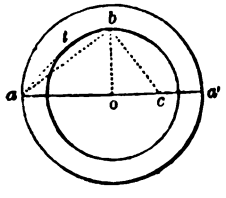
$$(r'^2 - r''^2)^{\frac{3}{2}} \text{ à } \frac{r'^4 - r''^4}{r'}.$$

A résistances égales, les sections transversales du cylindre et du tuyau sont entre elles dans le rapport de

$$\left(\frac{r'^4 - r''^4}{r'}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ à } r'^2 - r''^2 \text{ (*)}.$$

(*) Ces deux rapports qui sont plus simplement, le premier, celui de $\sqrt{1 - \frac{r''^2}{r'^2}}$ à $1 + \frac{r''^2}{r'^2}$, et, le second, l'inverse élevé à la puissance de 2/3, résultent de la division, l'une par l'autre, des expressions qui seront données §§ 6 et 7 de la note du numéro suivant (120) : 1° en supposant $\omega^{\frac{3}{2}}$ le même pour le cylindre et pour le tuyau; 2° en supposant $\frac{I}{v'}$ le même, et tirant le rapport des sections ω.

M. Poncelet a trouvé que le premier rapport est celui de at, tangente menée au cercle intérieur par un point a de la circonférence du cercle extérieur, à ac, longueur déterminée par ob perpendiculaire à ao, et par bc perpendiculaire à ab, o étant le centre et $aoca'$ un diamètre.



Ce rapport est aussi, à peu près, la racine carrée de celui de l'épaisseur au diamètre moyen du tuyau.

120. Connaissant l'expression du moment de rupture pour une base de fracture rectangulaire, on peut se proposer d'inscrire dans un cercle un rectangle déterminé par la condition de rendre cette expression un maximum. Le diamètre étant 1, les côtés de ce rectangle seront respectivement $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (*).

(*) (Voyez note du n° 118).

§ 1. *Comparaison des sections à égale superficie ou égale quantité de matière.*—Nous allons donner ici les valeurs de $\frac{I}{v'}$, et, aussi, les valeurs du moment d'inertie I, par complément aux n°s 81 à 85 (et ainsi que nous l'avons annoncé), en mettant les expressions sous une forme telle qu'on puisse comparer quant à ces valeurs, les diverses sections *à égale superficie* ou à égale quantité du métal dont on compose les prismes. Nous parlerons ici déjà, pour rendre le tableau plus complet, des sections de prismes à *côte* ou à nervure, dont Navier ne fait mention dans son texte qu'à la SECTION IV (Charpente), art. VII, n°s 493 à 497.

Le moment d'inertie I est du quatrième degré ou est un produit de quatre dimensions linéaires; le quotient $\frac{I}{v'}$ est du troisième degré; la superficie ω est du deuxième degré. Il faudra donc, pour les comparaisons des sections sous le double rapport de la résistance à la simple flexion et à la rupture par flexion, donner respectivement pour forme, à I et à $\frac{I}{v'}$, le produit de ω^2 et de $\omega^{\frac{3}{2}}$ par un nombre ou par une fonction des rapports mutuels des dimensions des diverses parties de la section.

§ 2. *Résistances spécifiques à la flexion et à la rupture par flexion* $\left(\text{ou quantités remplaçant I et } \frac{I}{v'}\right)$ *lorsque la sollicitation est oblique aux axes principaux d'inertie des sections.* — Alors la résistance spécifique à la flexion, au lieu d'être représentée par I, le sera (note du n° 83) par

(Du n° 120).

$$\rho\frac{M}{E}=\frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{I'^2}+\frac{\sin^2\varphi}{I''^2}}}=\frac{I'}{\cos\varphi}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{I'}{I''}\tang\varphi\right)^2}};$$

I′ et I″ étant les moments d'inertie principaux de la section, φ étant l'angle du plan de sollicitation ou du moment M des forces extérieures avec l'axe de I″, et ρ étant le rayon de courbure.

Et la résistance spécifique à la rupture par flexion au lieu d'être représentée par $\frac{I}{v'}$, le sera (note du n° 117) par

$$\frac{M}{R}=\frac{1}{\frac{v'}{I'}\cos\varphi+\frac{u'}{I''}\sin\varphi}$$

u′ et v′ étant les coordonnées u, v, par rapport aux axes des moments principaux I′, I″, de la fibre la plus tendue, ou rendant $\frac{v}{I'}\cos\varphi+\frac{u}{I''}\sin\varphi$ un maximum; et R la traction qu'elle supporte par unité superficielle.

Si l'angle φ est indéterminé ou si la pièce peut être sollicitée sous diverses inclinaisons, comme l'arbre tournant d'une machine, il faut prendre l'*inclinaison la plus dangereuse*, ou la valeur de φ qui rend un minimum cette expression de $\frac{M}{R}$. Et si u′, v′ sont constants, comme quand le contour est composé de lignes à angle droit, ce minimum a lieu pour $\tang\varphi=\frac{I'}{I''}\frac{u'}{v'}$, et est

$$\frac{M}{R}=\frac{1}{\sqrt{\frac{v'^2}{I'^2}+\frac{u'^2}{I''^2}}}.$$

Mais si le contour est continu, u′ et v′ sont fonctions de φ, et l'on a un autre minimum.

§ 3. *Section rectangle dont b et c sont les dimensions.*— Si b est la *largeur*, c la *hauteur* ou *épaisseur*, c'est-à-dire si la sollicitation a lieu dans un plan parallèle à c, on a :

$$\omega=bc,\quad v'=\frac{c}{2}.$$

Résistance spécifique à la flexion élastique $I=\frac{bc^3}{12}=\omega\frac{c^2}{12}=\frac{1}{12}\frac{c}{b}\omega^2.$

Idem à la rupture par flexion $\frac{I}{v'}=\frac{bc^2}{6}=\omega\frac{c}{6}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{c}{b}}\cdot\omega^{\frac{3}{2}},$

(Du n° 120).

Ainsi, *à égale superficie de la section* ω, ou *à égale quantité* de matière d'un prisme de longueur donnée, la *résistance à la flexion* (ou le poids capable de donner une flèche déterminée à ce prisme appuyé aux deux bouts et sollicité au milieu), est comme le rapport $\frac{c}{b}$ de la hauteur à la largeur.

Et la *résistance à la rupture par flexion* (ou le poids appliqué de même, qui fléchit de manière à donner une dilatation ou une contraction déterminée à la fibre la plus tendue ou la plus comprimée, et qui, par conséquent, peut mettre la matière en danger de rompre ou de s'énerver) est comme la racine carrée $\sqrt{\frac{c}{b}}$ du même rapport.

§ 4. *Même section rectangle si la sollicitation est oblique. Cause qui limite (en partie) l'avantage d'employer des pièces de champ à section haute et mince.* — Si le plan de sollicitation ou du moment M, au lieu d'être parallèle au côté c, fait avec ce côté un angle φ, on a (d'après ce qu'on vient de dire § 2)

Résistance à la flexion.
$$P\frac{M}{E}=\frac{bc}{12\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{c^4}+\frac{\sin^2\varphi}{b^4}}}=\frac{\omega c^2}{12\sqrt{\cos^2\varphi+\frac{c^4}{b^4}\sin^2\varphi}}=\frac{1}{12}\frac{c}{b}\frac{\omega^2}{\cos\varphi}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{c^4}{b^4}\tan}}$$

Id. à la rupture par flexion.
$$\frac{M}{R}=\frac{1}{6}\frac{b^2c^2}{b\cos\varphi+c\sin\varphi}=\frac{1}{6}\frac{\omega c}{\cos\varphi+\frac{c}{b}\sin\varphi}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{c}{b}}\cdot\frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{\cos\varphi}\frac{1}{1+\frac{c}{b}\tan\varphi}.$$

Si une pièce a une largeur b très-petite par rapport à sa hauteur c, il suffit qu'on prenne $\tan\varphi=\frac{b}{c}$, ou que le plan de sollicitation ait seulement la petite inclinaison $\frac{b}{c}$ de la diagonale sur le grand côté c de la section, pour que le dénominateur $\cos\varphi+\frac{c}{b}\sin\varphi$ devienne $2\cos\varphi$, c'est-à-dire à peu près $=2$, et que, par conséquent, la résistance $\frac{M}{R}$ à la rupture par flexion *soit deux fois*

(Du n° 120).

moindre que quand la sollicitation est exactement parallèle au grand côté c.

En même temps $\left(\text{c'est-à-dire pour } \operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{c} \text{ ou pour la sollicitation diagonale}\right)$ on a une résistance à la flexion $\rho\frac{M}{E} = \frac{\omega c^2}{12}\operatorname{tang}\varphi = \frac{\omega c^2}{12}\frac{b}{c}$, *ou* $\frac{c}{b}$ *fois moindre* que si la sollicitation était parallèle à c. Et, à *égale superficie de la section*, l'on a seulement la même résistance $\frac{\omega^2}{12}$ à la flexion *qu'avec une section carrée.*

Aussi, comme il est difficile d'empêcher que l'action ne devienne un peu oblique, quand ce ne serait que par suite d'une légère torsion due à ce que la charge n'agit pas exactement au milieu de la largeur b de la pièce, les constructeurs évitent d'employer des pièces *de champ* trop minces ou de rendre trop grand le rapport $\frac{c}{b}$ de la hauteur à la largeur, afin de prévenir le *déversement* dénoté par la formule, et, aussi, une sorte de flexion de la pièce dans le sens de la hauteur de la section.

Si l'angle φ du plan de sollicitation n'est pas déterminé ou si la pièce peut être sollicitée transversalement sous toutes les inclinaisons, il faut prendre l'*inclinaison la plus dangereuse.* Ce sera, quant à la rupture par flexion, celle qui a pour valeur $\operatorname{tang}\varphi = \frac{c}{b}$ si $c > b$, et on aura, pour cette sollicitation qui est perpendiculaire à une des diagonales,

$$\text{Plus petite résistance à la rupture par flexion, ou Minimum de } \frac{M}{R} = \frac{1}{6}\frac{b^2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{\frac{c}{b}}{1+\frac{c^2}{b^2}}}\cdot\omega^3;$$

Il est évident, au reste, que la plus grande flexion est donnée par $\varphi = 0$ ou $\varphi = \frac{\pi}{2}$ selon que $I' <$ ou $> I''$, ou, pour le rectangle, selon que $b >$ ou $< c$.

(Du n° 120).

§ 5. *Section carrée.* — Les expressions précédentes, en faisant $b = c$, donnent

Sollicitation dans un plan parallèle à l'un des côtés

$$\omega = b^2, \quad v' = \frac{b}{2}$$

Résist. à la flexion $\quad I = \frac{b^4}{12} = \frac{\omega b^2}{12} = \frac{\omega^2}{12} = 0{,}08333\,\omega^2$

Id. à la rupt. par flex. $\quad \frac{I}{v'} = \frac{b^3}{6} = \frac{\omega b}{6} = \frac{1}{6}\omega^{\frac{3}{2}} = 0{,}16667\,\omega^{\frac{3}{2}}$

Sollicitation oblique

$$\rho\frac{M}{E} = \frac{b^4}{12} = \frac{\omega^2}{12} = 0{,}08333\,\omega^2$$ (comme pour la sollicitation parallèle, et, cela, quel que soit φ)

$$\frac{M}{R} = \frac{b}{6}\,\frac{1}{\cos\varphi + \sin\varphi} = \frac{1}{6(\cos\varphi + \sin\varphi)}\,\omega^{\frac{3}{2}}$$

Sollicitation diagonale (ou sous l'inclinaison la plus dangereuse)

$$\frac{M}{R} = \frac{b^3}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\,\omega^{\frac{3}{2}} = 0{,}11785\,\omega^{\frac{3}{2}}$$

§ 6. *Section circulaire pleine, rayon* r.

$$\omega = \pi r^2, \quad v' = r$$

$$I = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\omega r^2}{4} = \frac{1}{4\pi}\,\omega^2 = 0{,}079577\,\omega^2$$

$$\frac{I}{v'} = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\omega r}{4} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\,\omega^{\frac{3}{2}} = 0{,}141047\,\omega^{\frac{3}{2}}.$$

§ 7. *Section circulaire évidée (section de tuyau); rayon extérieur* r'; *intérieur* r''

$$\omega = \pi\,(r'^2 - r''^2), \quad v' = r'$$

$$I = \pi\frac{r'^4 - r''^4}{4} = \frac{r'^2 + r''^2}{4}\,\omega = \frac{\omega r'^2}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{r''^2}{2r'^2}\right) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{1 + \left(\frac{r''}{r'}\right)^2}{1 - \left(\frac{r''}{r'}\right)^2}\,\omega^2.$$

$$\frac{I}{v'} = \pi\,\frac{r'^4 - r''^4}{4r'} = \frac{\omega r'}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{r''^2}{r'^2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1 + \left(\frac{r''}{r'}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{r''}{r'}\right)^2}}\,\omega^{\frac{3}{2}}.$$

(Du n° 120).

Si l'on fait le rayon moyen $\frac{r'+r''}{2}=r$, et l'épaisseur $r'-r''=e$, on a

$$\omega=\pi\left[\left(r+\frac{e}{2}\right)^2-\left(r-\frac{e}{2}\right)^2\right]=2\pi re,\ v'=r+\frac{e}{2}.$$

$$I=\frac{\omega r^2}{2}\left(1+\frac{e^2}{4r^2}\right)=\frac{\frac{r}{e}}{4\pi}\left(1+\frac{e^2}{4r^2}\right)\omega^2$$

$$\frac{I}{v'}=\frac{\omega r}{2}\,\frac{1+\frac{e^2}{4r^2}}{1+\frac{e}{2r}}=\frac{\sqrt{\frac{2r}{e}}}{4\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1+\frac{e^2}{4r^2}}{1+\frac{e}{2r}}\,\omega^{\frac{3}{2}}.$$

(Voyez les conséquences, note du n° 119).

§ 8. *Prise en considération des troncatures qui augmentent la valeur de l'expression* $\frac{I}{v'}$ *ou* $\frac{M}{R}$ *de la résistance spécifique à la rupture.* — D'après ce qu'on a dit au § 8 de la note du n° 113 (p. 100) comme l'existence de fibres inutiles ou susceptibles de rompre d'abord *seules*, ne diminue en rien la résistance du reste, il convient, à l'égard des sections pour lesquelles le quotient $\frac{I}{v'}$ augmente en en retranchant une partie ou en les supposant tronquées, d'attribuer à ce quotient sa plus grande valeur, résultant de la troncature qui le rend un maximum.

En conséquence il faut, si l'on veut avoir des expressions plus exactes de la résistance spécifique à la rupture $\frac{I}{v'}$ ou $\frac{M}{R}$ multiplier celles qui sont données aux § précédents ou suivants par des nombres un peu au-dessus de 1, comme ceux du § 8 cité de la note du n° 113.

Et ces expressions seront, encore, plutôt au-dessous qu'au-dessus de la résistance réelle d'après ce qu'on a dit page 101 et que l'expérience confirme, de la petite part que les fibres comptées comme inutiles ne laissent pas de prendre à cette résistance.

Ainsi, au lieu de $\frac{I}{v'}=\frac{1}{6\sqrt{2}}\,\omega^{\frac{3}{2}}=0{,}11785\,\omega^{\frac{3}{2}}$ du § 5 pour le carré

(Du n° 120).

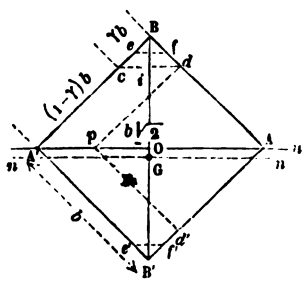
sollicité diagonalement on prendrait $\frac{I}{v'} = \frac{1,1134}{6\sqrt{2}}\omega^{\frac{3}{2}} = 0,13121\omega^{\frac{3}{2}}$, si la matière résiste sensiblement plus aux compressions qu'aux extensions ou réciproquement ;

Et $\frac{M}{R} = \frac{1,0535}{6\sqrt{2}}\omega^{\frac{3}{2}} = 0,1242\,\omega^{\frac{3}{2}}$ si elle résiste autant aux unes qu'aux autres ou s'il y a incertitude.

Au lieu de $\frac{I}{v'} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\omega^{\frac{3}{2}} = 0,141047\omega^{\frac{3}{2}}$ pour le cercle, on prendra $\frac{I}{v'} = \frac{1,00693}{4\sqrt{\pi}}\omega^{\frac{3}{2}} = 0,142024\omega^{\frac{3}{2}}$ pour une troncature haut et bas.

Et ainsi des autres, même pour le cas de *flexion oblique* en y appliquant les principes du § 8 de la note du n° 113 lorsqu'on croira devoir pousser l'approximation à un pareil degré, ce dont on peut ordinairement se dispenser.

§ 9. *Cas où les troncatures auraient effectivement lieu.* — Si l'on a retranché les *fibres dites inutiles* en fondant les pièces de métal ou en taillant les pièces de bois, il est évident que pour comparer les résistances des sections *à superficie égale*, il faut mettre à la places de ω la surface de la section *tronquée* ou débarrassée des parties répondant à ces fibres.



Alors 1°. S'il est question d'un carré sollicité diagonalement et tronqué *seulement à l'angle supérieur ou à l'angle inférieur*, comme au premier exemple du § 8 de la note du n° 113, p. 95 et 96, on a

$$\omega = b^2 - \frac{\gamma^2 b^2}{2} \text{ d'où } b = \left(\frac{2\omega}{2-\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et par conséquent

$$\frac{I}{v'} = \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{2}}\sqrt{2}.\frac{12-42\gamma^2+48\gamma^3-18\gamma^4+\gamma^6}{(6-6\gamma+\gamma^2)(2-\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

2° S'il s'agit du même carré, tronqué à la fois et symétrique-

(Du n° 120).

ment à ces deux angles, comme au deuxième exemple, p. 97, on aura

$$\omega^2 = b^2 - \gamma^2 b^2, \quad \frac{I}{v'} = \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{2}} \frac{(1+3\gamma)(1-\gamma)^{\frac{1}{2}}}{(1+\gamma)^{\frac{3}{2}}}.$$

3° Enfin si ce même carré est tronqué également aux quatre angles, comme il conviendra si c'est la section d'un arbre tournant de machine, il faudra retrancher $\frac{\gamma^4 b^4}{12}$ de l'expression de I_1 (page 97) relative au cas de deux troncatures et on aura $\omega^2 = b^2 - 2\gamma^2 b^2$, et

$$I = \frac{1 - 6\gamma^2 + 8\gamma^3 - 4\gamma^4}{12} b^4, \quad \frac{I}{v'} = \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{2}} \frac{1 - 6\gamma^2 + 8\gamma^3 - 4\gamma^4}{(1-\gamma)(1-2\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}$$

où il ne faut pas supposer γ plus grand que $\frac{1}{2}$.

Si l'on se sert de ces expressions pour chercher quelle troncature il faut faire dans chacun de ces trois cas pour avoir la plus grande résistance $\frac{I}{v'}$ à superficie égale ω on trouve ceci :

Cas (1°), ou d'une seule troncature. Ce maximum de résistance pour ω constant est obtenu en faisant $\gamma = 1$ c'est-à-dire *en supprimant entièrement le demi-carré supérieur* ou en réduisant la section à un triangle rectangle isocèle, la base tournée du côté dilaté si c'est par dilatation que la matière risque le plus de céder. Inutile de dire que cette forme de section n'est pas la plus avantageuse entre toutes celles qu'on peut donner si l'on a le choix d'autres formes.

Cas (2°), ou de deux troncatures du carré sollicité diagonalement. On a le maximum de $\frac{I}{v'}$ pour ω constant en faisant, $\gamma = \frac{1}{5}$ et ce maximum est $\frac{1}{6\sqrt{2}} \omega^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = 1{,}08866 \frac{1}{6\sqrt{2}} \omega^{\frac{3}{2}} = 0{,}12830\omega^{\frac{3}{2}}$.

Cas (3°) de quatre troncatures. il faut, pour le maximum, faire $\gamma = \frac{1}{2}$ ce qui revient à remplacer le carré sollicité parallèlement à

ses diagonales par un carré sollicité parallèlement à ses côtés C'est ce qu'on pouvait prévoir d'après ce qu'on a vu (§ 5) de la supériorité de résistance dans cette dernière situation. Mais si la pièce est tournante, comme la supériorité disparaîtrait lorsque la diagonale deviendrait verticale, il conviendra de tronquer en octogone régulier. Et si l'on admet de nouvelles troncatures produisant plus de huit côtés, on est conduit simplement à ce résultat, que la forme circulaire est la meilleure pour le contour de la section d'une pièce tournante fléchie successivement dans tous les plans passant par son axe de figure (Voyez ci-après § 19).

§ 10. *Section elliptique*, b *et* c *étant le plus petit et le plus grand diamètre.* — Le plan de sollicitation étant parallèle à c, on a

$$\omega = \frac{\pi bc}{4}, \quad v' = \frac{c}{2}$$

$$I = \frac{\pi bc^3}{64} = \frac{\omega c^2}{16} = \frac{1}{4\pi}\frac{c}{b}\omega^2$$

$$\frac{I}{v'} = \frac{\pi bc^2}{32} = \frac{\omega c}{8} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{c}{b}}\cdot\omega^{\frac{3}{2}}.$$

Le plan de sollicitation faisant un angle φ avec le côté c :

Résist. spéc. à la flexion.
$$\rho\frac{M}{E} = \frac{\pi bc}{64\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{c^4}+\frac{\sin^2\varphi}{b^4}}} = \frac{\omega c^2}{16\sqrt{\cos^2\varphi+\frac{c^4}{b^4}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{4\pi}\frac{c}{b}\frac{\omega^2}{\cos\varphi}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{c^4}{b^4}\tan^2\varphi}}$$

Id. à la rupture.
$$\frac{M}{R} = \frac{\pi b^2c^2}{32\sqrt{b^2\cos^2\varphi+c^2\sin^2\varphi}} = \frac{\omega c}{8\sqrt{\cos^2\varphi+\frac{c^2}{b^2}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{c}{b}}\cdot\frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{\cos\varphi\sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}\tan^2\varphi}}$$

§ 11. *Sections comparées ayant des formes ramenables les unes aux autres* (comme toutes les ellipses, ou tous les rectangles, etc.) *en amplifiant ou réduisant dans une même proportion toutes les abscisses ou toutes les ordonnées parallèles à un axe principal d'inertie ainsi qu'au plan de sollicitation.*

$I = K\omega c^2$ ou proportionnel à l'aire ω et au carré de la hauteur c de la section.

$\frac{I}{v'} = K'\omega c$ ou proportionnel à l'aire et à la hauteur de la section.

(Du n° 120).

Et non-seulement la charge susceptible d'être portée indéfiniment sans danger, mais même celle de rupture immédiate, quelle que soit la loi qui lie les extensions ou compressions des fibres aux efforts qu'elles supportent, suit cette dernière proportionnalité (Voyez la note du n° 151).

§ 12. *Sections rectangles évidées symétriquement.* — Elles peuvent l'être de deux manières, ou en tuyau rectangulaire, ou en double T symétrique. Dans l'un comme dans l'autre cas, soient :

b, c la largeur et la hauteur du rectangle extérieur,

b', c' celles du rectangle intérieur ou d'évidement qui, dans le second cas, est partagé en deux parties ayant b' pour somme de leurs largeurs (figure page suivante)

$$\omega = bc - b'c', \quad v' = \frac{c}{2}$$

$$I = \frac{bc^3 - b'c'^3}{12} = \frac{\omega^2}{12}\frac{c}{b}\frac{1 - \frac{b'}{b}\frac{c'^3}{c^3}}{\left(1 - \frac{b}{b}\frac{c'}{c}\right)^2}$$

$$\frac{I}{v'} = \frac{bc^3 - b'c'^3}{6c} = \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{6}\sqrt{\frac{c}{b}} \cdot \frac{1 - \frac{b'}{b}\frac{c'^3}{c^3}}{\sqrt{\left(1 - \frac{b'}{b}\frac{c'}{c}\right)^3}}$$

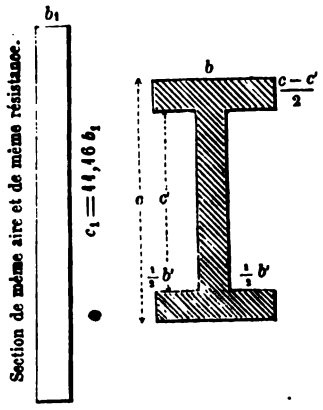
Si par exemple on a $\frac{b - b'}{b} = \frac{c - c'}{c} = \frac{1}{4}$, ou $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{3}{4}$, ces expressions donnent

$$I = \frac{\omega^2}{12} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{25}{7} = 3{,}571\,\frac{c}{b}\frac{\omega^2}{12}; \quad \frac{I}{v'} = \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{6}\sqrt{\frac{c}{b}} \cdot \frac{25}{4\sqrt{7}} = 2{,}362\sqrt{\frac{c}{b}} \cdot \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{6};$$

le solide résiste $3^{\text{fois}},571$ plus à la flexion et $2^{\text{fois}},362$ plus à la rupture par flexion qu'un solide à section rectangle, de même superficie ω, pour laquelle le rapport $\frac{c}{b}$ serait le même.

(Du n° 120).

§ 13. *Rapport de la hauteur à la largeur d'une section simplement rectangle qui offrirait même résistance que la section en double T symétrique. Utilité de la forme en T pour s'opposer au déversement.*— Pour qu'une pièce ayant une section rectangle *pleine* de même superficie résiste autant à la rupture ou ait le même $\frac{I}{v'}$ que la pièce en double T symétrique, il faut



c_1 et b_1 étant sa hauteur et sa largeur,

qu'on ait cette équation, qui s'obtient en égalant les expressions de $\frac{I}{v'}$ du § 8 et du § 12,

$$\frac{c_1}{b_1} = \frac{c}{b}\,\frac{\left(1-\frac{b'}{b}\,\frac{c'^3}{c^3}\right)^2}{\left(1-\frac{b'}{b}\,\frac{c'}{c}\right)^3}.$$

Par exemple si $\frac{b-b'}{b} = \frac{c-c'}{c} = \frac{1}{4}$ il faut que $\frac{c_1}{b_1}$ soit $\frac{625}{112} = 5^{\text{fois}},580$ plus grand que $\frac{c}{b}$, ou il faut que

$$\frac{c_1}{b_1} = 11,16 \text{ si l'on a } \frac{c}{b} = 2,$$

$$\text{et} \quad = 16,74 \quad \text{si} \quad \frac{c}{b} = 3.$$

De pareils rapports entre la hauteur c_1 et la largeur b_1 seraient trop forts d'après ce que nous avons dit, § 4, du danger de diminution considérable de résistance que courent les pièces à section rectangle haute et étroite pour peu qu'elles *déversent* ou que la charge les sollicite dans un plan légèrement oblique au grand côté, ce qui a pour conséquence, comme on l'a démontré, de les ployer dans un autre plan bien plus oblique.

(Du n° 120).

Il y a donc lieu de donner en général, aux poutres ou solives métalliques, des côtes ou une forme en double T. Leur résistance au *déversement* dépend du rapport $\frac{I'}{I}$ des moments d'inertie principaux de la section, I' désignant celui qui est pris autour de l'axe de symétrie parallèle à la hauteur c. Celui-ci a pour formule (toujours en nous bornant ici au cas où les deux semelles sont égales).

$$I' = (c - c')\frac{b^3}{12} + c'\frac{(b - b')^3}{12}$$

Son rapport à l'autre moment $\frac{1}{12}(bc^3 - b'c'^3)$ est

$$\frac{I'}{I} = \frac{b^2}{c^2}\,\frac{n^2}{m^2}\,\frac{m^3 + n - 1}{mn^3 - (m-1)(n-1)^3} \text{ si on fait } \frac{b - b'}{b} = \frac{1}{m},\ \frac{c - c'}{c} = \frac{1}{n}$$

expression qui se réduirait à $\frac{b^2}{c^2}$ pour m ou $n = 1$, et qui est de la forme générale $K\frac{b^2}{c^2}$, K ayant les valeurs numériques données par le tableau suivant :

Valeurs du dénominateur K de $\frac{\frac{b^2}{c^2}}{K} = \frac{I'}{I}$

Pour $\frac{1}{m} =$	$\frac{b'-b}{b} = 1$	$\frac{b'-b}{b} = \frac{1}{3}$	$= \frac{1}{4}$	$= \frac{1}{5}$	$= \frac{1}{6}$	$= 0$
Pour $\frac{1}{n} = \frac{c'-c}{c} = 1$	K = 1	1	1	1	1	1
$= \frac{1}{3}$	1	K = 2,24	2,26	2,25	2,24	2,11
$= \frac{1}{4}$	1	2,59	2,61	2,59	2,56	2,31
$= \frac{1}{5}$	1	2,87	2,90	2,86	2,81	2,44
$= \frac{1}{6}$	1	3,11	3,14	3,21	3,04	2,53

(Du n° 120).

Or, comme les plus grandes valeurs des coordonnées u, v (§ 2) sont ici $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$, si nous les substituons à u', v' dans l'expression $\frac{M}{R} = \frac{1}{\frac{v'}{I}\cos\varphi + \frac{u'}{I'}\sin\varphi}$, nous avons, en mettant $\frac{1}{K}\frac{b^2}{c^2}$ pour $\frac{I'}{I}$,

$$\frac{M}{R} = \frac{I}{v'} \cdot \frac{1}{\cos\varphi} \cdot \frac{1}{1 + K\frac{c}{b}\tang\varphi},$$ (K variant généralement de 2,24 à 3,21).

Le 1er facteur de cette expression, $\frac{I}{v'}$, représente la résistance de la pièce non déversée ou sollicitée bien perpendiculairement et au milieu des semelles.

Le 2e, $\frac{1}{\cos\varphi}$, peut être remplacé par 1, l'angle φ étant toujours supposé petit.

La 3e montre que si la sollicitation oblique s'opérait suivant la diagonale du rectangle circonscrit $b \times c$, ou si l'on avait $\frac{c}{b}\tang\varphi = 1$, la résistance spécifique $\frac{M}{R}$ serait réduite aux $\frac{1}{3,2}$ à $\frac{1}{4,2}$ de sa valeur $\frac{I}{v'}$ relative à une sollicitation normale, tandis qu'elle est le $\frac{1}{2}$ pour une section pleine (§ 4), en sorte que celle-ci résisterait plus au *déversement* que la section en double T.

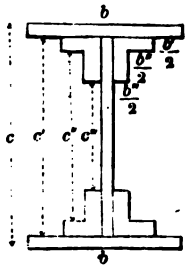
Mais il en est autrement si, comme on doit toujours le supposer, l'obliquité de la sollicitation est faible. Si, par exemple, dans l'hypothèse $\frac{b-b'}{b} = \frac{c-c'}{c} = \frac{1}{4}$ où l'on a $K = 2,612$, cette obliquité est celle de la diagonale du rectangle plein $b_1 \times c_1$, dont nous avons calculé tout à l'heure les dimensions et qui offrirait la même résistance, à surface égale, que le rectangle évidé $b \times c - b' \times c'$, ou si l'on prend $\tang\varphi = \frac{b_1}{c_1} = \frac{1}{5,580}\frac{b}{c}$. Le 3e facteur sera alors

$$\frac{1}{1 + 2,612\frac{c}{b}\frac{b_1}{c_1}} = \frac{1}{1 + \frac{2,612}{5,580}} = \frac{1}{1,47}.$$

Il est, comme on voit, supérieur à $\frac{1}{2}$. Cette considération et celle d'une plus grande stabilité qui laisse moins de champ à la torsion résultant du déversement, assure une supériorité réelle aux pièces à double T symétrique sur les pièces à section rectangulaire mince et de champ d'égale superficie.

On voit toutefois qu'il ne faut pas s'exagérer cette supériorité.

§ 14. *Cas de l'évidement par plusieurs rectangles.* — Si le rectangle $b \times c$ est évidé par plusieurs autres



$$\frac{b'}{2}c' + \frac{b'}{2}c', \quad \frac{b''}{2}c'' + \frac{b''}{2}c'', \quad \frac{b'''}{2}c''' + \frac{b'''}{2}c''',$$

comme dans la figure cotée ci-contre où les plaques de tôle horizontales et verticale sont assemblées par des cornières, on aura simplement

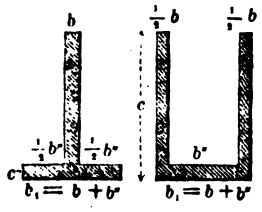
$$\omega = bc - b'c' - b''c'' - b'''c''',$$

$$I = \frac{bc^3}{12} - \frac{b'c'^3}{12} - \frac{b''c''^3}{12} - \frac{b'''c'''^3}{12}, \quad v' = \frac{c}{2}.$$

§ 15. *Section en* T *simple, et en* U. — Navier considère ces deux espèces de rectangle évidé non symétrique à la Section IV° (ci-après n° 497). Il pose l'expression de leur moment de flexion ou d'inertie autour de la ligne encore inconnue des fibres invariables et il dit de mettre, pour la distance de cette ligne à l'une des bases, sa valeur tirée de l'équation d'équilibre de translation $\int v d\omega = 0$ du n° 78 qui exprime qu'elle passe par le centre de gravité.

Dans le cours de l'École de Metz M. Michon a simplifié ce calcul en prenant d'abord le moment d'inertie par rapport à la base et en retranchant l'aire multipliée par le carré de sa distance au centre de gravité, distance qui s'obtient simplement, elle-même, en divisant par l'aire le moment statique de la section par rapport à la même base. Soient

(Du n° 120).



c la hauteur totale de la section.

b la largeur du corps vertical du T renversé, ou la somme des largeurs des deux branches de l'U.

b'' la largeur de l'évidement qui est en deux parties pour le T.

c'' la hauteur de la table ou semelle, ou $c - c''$ la hauteur de l'évidement.

On aura :

Moment statique par rapport à la base inférieure $\frac{1}{2}bc^2 + \frac{1}{2}b''c''^2$,

D'où, divisant par l'aire $\omega = bc + b''c''$;

$$v' = \frac{1}{2}\frac{bc^2 + b''c''^2}{bc + b''c''}.$$

Moment d'inertie autour de la même base $\frac{1}{3}bc^3 + \frac{1}{3}b''c''^3$

D'où, en retranchant $\omega v'^2$ (théorème général du § 4 de la note du n° 81, page 48).

$$I = \frac{bc^3 + b''c''^3}{3} - \frac{1}{4}\frac{(bc^2 + b''c''^2)^2}{bc + b''c''} = \frac{(bc^2 + b''c''^2)^2 - 4bc.b''c''(c - c'')^2}{12(bc + b''c'')}$$

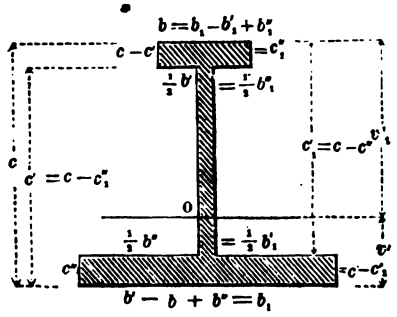
La section en simple T est, au reste, un cas particulier de la suivante.

§ 16. *Section en double* T *non symétrique.* (Côté inférieur pris pour celui des fibres étendues).

Nous supposerons constamment désormais (comme les auteurs anglais) que le côté supérieur des sections est le côté comprimé, et que le côté inférieur est le côté des fibres étendues, parce que le cas d'une pièce posée sur deux appuis est bien plus fréquemment à considérer que le cas d'une pièce encastrée à un bout et sollicitée à l'autre.

Or les formules relatives à la section en double T ou à deux semelles peuvent être obtenues facilement et sous une forme simple comme il suit. Soient :

(Du n° 120).



b la largeur de la semelle supérieure.

c la hauteur totale de la section.

b' la somme des largeurs et c' la hauteur de l'évidement qui aurait lieu si la section était en simple T ou s'il n'y avait pas de semelle inférieure.

En sorte que $b - b'$ est l'épaisseur du *corps* de la section ou de la barre verticale du T.

c'' la hauteur de la semelle inférieure, b'' la somme des largeurs qu'elle ajoute en deux parties à côté de ce corps vertical.

v' et $v'_1 = c - v'$ les distances du centre de gravité O ou de la ligne des fibres invariables à la base inférieure $b - b' + b''$ et à la base supérieure b; ou, ce qui revient au même, v, et v'_1 les distances respectives des fibres invariables aux fibres les plus dilatées et aux fibres les plus comprimées.

On aura

Aire de la section, $\omega = bc - b'c' + b''c''$

Moment statique de cette aire par rapport à la base inférieure $b - b' + b''$

$$\frac{bc^2}{2} - \frac{b'c'^2}{2} + \frac{b''c''^2}{2}$$

Quotient, ou distance, à cette base inférieure, du centre de gravité O

$$v' = \frac{1}{2} \frac{bc^2 - b'c'^2 + b''c''^2}{bc - b'c' + b''c''}$$

Moment d'inertie de la section autour de cette même base inférieure

$$\frac{bc^3}{3} - \frac{b'c'^3}{3} + \frac{b''c''^3}{3}.$$

(Du n° 120).

En retranchant $\omega v'^2$ (§ 4 de la note du n° 81) on aura cette expression assez simple du moment d'inertie autour de la ligne des fibres invariables.

$$I = \frac{1}{3}(bc^3 - b'c'^3 + b''c''^3) - \frac{1}{4}\frac{(bc^2 - b'c'^2 + b''c''^2)^2}{bc - b'c' + b''c''}$$

D'où, résistance spécifique à la rupture du côté dilaté :

$$\frac{I}{v'} = \frac{2}{3}\frac{(bc - b'c' + b''c'')(bc^3 - b'c'^3 + b''c''^3)}{bc^2 - b'c'^2 + b''c''^2} - \frac{1}{2}(bc^2 - b'c'^2 + b''c''^2).$$

Quant à v'_1, distance de la ligne des fibres invariables à la base supérieure ou aux fibres les plus comprimées, il est égal à

$$c - v'.$$

On lui donne, ainsi qu'à $\frac{I}{v_1'}$, les mêmes formes qu'à v' et $\frac{I}{v'}$ en faisant

$$b - b' + b'' = b_1,\ b' = b''_1,\ b'' = b'_1,\ c - c' = c''_1,\ c - c'' = c'_1.$$

Alors

$$\omega = b_1c - b'_1c + b''_1c''_1,\ v'_1 = \frac{1}{2}\frac{b_1c^2 - b'_1c'^2_1 + b''_1c''^2_1}{b_1c - b'_1c'_1 + b''_1c''_1},$$

$$I = \frac{1}{3}(b_1c^3 - b_1'c'^3_1 + b''_1c''^3_1) - \frac{1}{4}\frac{(b_1c^2 - b'_1c'^2_1 + b''_1c''^2_1)^2}{b_1c - b'_1c'_1 + b''_1c''_1}$$

$$\frac{I}{v'} = \frac{2}{3}\frac{(b_1c - b'_1c'_1 + b''_1c''_1)(b_1c^3 - b'_1c'^3_1 + b''_1c''^3_1)}{b_1c^2 - b'_1c'^2_1 + b''_1c''^2_1} - \frac{1}{2}(b_1c^2 - b'_1c'^2_1 + b''_1c''^2_1).$$

Et l'on a le rapport de la plus grande compression à la plus grande extension

$$\frac{v'_1}{v'} = \frac{b_1c^2 - b'_1c'^2_1 + b''_1c''^2_1}{bc^2 - b'c'^2 + b''c''^2}.$$

Au reste le moment d'inertie peut aussi être écrit sous cette forme très-symétrique.

$$I = \frac{(bc^2 - b'c'^2 + b''c''^2)^2 - 4b'c'.\,b''c''(c' - c'')^2 + 4b''c''.\,bc(c - c'')^2 - 4bc.\,b'c'(c - c')^2}{12(bc - b'c' + b''c'')}$$

et sous une forme toute semblable avec des indices 1 à toutes les lettres hors c.

(Du n° 120).

D'où

$$\frac{I}{v' \text{ ou } v'_1} = \frac{\text{le numérateur de l'expression précédente ou un autre pareil avec les indices 1}}{6(bc^2 - b'c'^2 + b''c''^2) \text{ ou } 6(b_1c_1^2 - b'_1c'^2_1 + b''_1c''^2_1)};$$

Il est facile, en divisant ces expressions de I, $\frac{I}{v'}$, $\frac{I}{v'_1}$ par $bc - b'c' + b''c'' = b_1c - b'_1c'_1 + b''_1c''_1$ élevé au carré ou à la puissance $\frac{3}{2}$, et multipliant par ω^2 ou $\omega_1^{\frac{3}{2}}$, d'avoir, comme aux paragraphes précédents, des expressions comparables à superficie égale de la section.

Pour que la section n'ait que les justes dimensions nécessaires à la résistance, il faut à la fois, M étant le plus grand des moments des forces extérieures, et R_0, R'_0 (§ 4, et note du n° 113, § 13) les limites des tractions et pressions longitudinales non dangereuses des fibres,

$$M = R_0 \frac{I}{v'}, \quad M = R'_0 \frac{I}{v_1}.$$

Ainsi les deux tables, semelles ou doubles nervures ne *fatigueront* pas plus l'une que l'autre, et l'on aura, toutes choses d'ailleurs égales, la plus grande économie de matière, si

$$\frac{v'_1}{v'} = \frac{R'_0}{R_0}$$

ou $$b_1c^2 - b'_1c'^2_1 + b''_1c''^2_1 = \frac{R'_0}{R_0}(bc^2 - b'c'^2 + b''c''^2).$$

Cette relation peut s'écrire, en remplaçant c'_1 par $c - c''$, c' par $c - c''_1$ et faisant $b - b' = b_1 - b'_1 = e$ épaisseur du corps vertical, puis mettant, après réduction, $b'' = b'_1$ pour $b_1 - e$, $b''_1 = b'$ pour $b - e$,

$$(2b''c'' + ce)c - (b''c''^2 - b''_1c''^2_1) = \frac{R'_0}{R_0}[(2b''_1c''_1 + ce)c + (b''c''^2 - b''_1c''^2_1)].$$

Elle se réduirait, si les différences de termes affectés des carrés c''^2, c''^2_1 des épaisseurs des nervures étaient négligeables, à

$$b''c'' + \frac{ce}{2} = \frac{R'_0}{R_0}\left(b''_1c''_1 + \frac{ce}{2}\right),$$

montrant qu'en partageant la section par une horizontale à égale distance des deux bases, l'aire de la partie inférieure devrait être $\frac{R'_0}{R_0}$ fois plus grande que l'aire de la partie supérieure.

(Du n° 120).

Mais l'exemple numérique du § 18 nous montrera que ce rapport différera souvent d'une manière sensible du rapport exact.

A plus forte raison ne pourra-t-on que rarement y substituer le rapport des aires des semelles

$$b_1c'' : bc''_1,$$

ce qui exigerait qu'on effaçât encore, dans la dernière équation posée, les termes $\frac{ce}{2}$ en remplaçant en outre b'' par $b_1 = b'' + e$, et b''_1 par $b = b''_1 + e$, c'est-à-dire qu'on négligeât tout à fait le corps vertical de la section, comme nous avons supposé pouvoir le faire au § 9 de la note du n° 113.

§ 17. *Comparaisons diverses des sections à double* T *non symétriques et symétriques d'égale superficie.* — Il nous suffira, pour avoir les résultats les plus généraux de ces comparaisons, de considérer le cas où l'on peut faire la première simplification du paragraphe précédent, c'est-à-dire négliger les termes affectés des carrés et des produits des épaisseurs c'', c''_1, e, mais en tenant compte de l'influence du corps vertical de la section. Soient :

e l'épaisseur de ce corps vertical ;

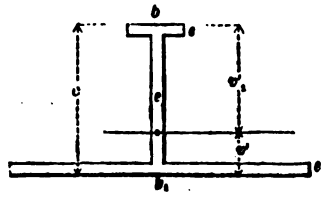
be, b_1e les superficies des semelles supérieure et inférieure, ou soient

b, b_1 leurs longueurs *réduites ou amplifiées de manière à les ramener fictivement à l'épaisseur* e,

c la hauteur totale.

Soit enfin :

$\frac{1}{\eta_1}$ le rapport $\frac{R'_o}{R_o}$, quel qu'il soit, entre la pression-limite et la tension-limite, rapport que nous avons trouvé $= \frac{1}{\eta}\,\frac{E}{E_t}\,.\,\frac{R_{ot}}{R_o}$ au § 13 de la note du n° 113 et qui se réduit à $\frac{1}{\eta}$ égal à 4 dans les corps d'égale contexture en tous sens.



(Du n° 120).

On trouve en réduisant les formules du paragraphe précédent, et plus facilement d'une manière directe :

$$\omega = e(b+b_1+c), v' = \frac{e\frac{c^2}{2} + be.c}{e(b+b_1+c)} = \frac{c}{2}\frac{2b+c}{b+b_1+c}, v'_1 = \frac{c}{2}\frac{2b_1+c}{b+b_1+c}$$

$$I = e\frac{c^3}{3} + be.c^2 - \omega v'^2 = \frac{ec^2}{12}.\frac{c^2+4bc+4b_1c+12bb_1}{b+b_1+c}.$$

Pour que la plus grande dilatation soit une fraction η_1 de la plus grande contraction, on doit avoir

$$\frac{v'}{v'_1} = \eta_1, \text{ ou } \eta_1 = \frac{2b+c}{2b_1+c} \text{ d'où } v' = \frac{\eta_1 c}{1+\eta_1}, v'_1 = \frac{c}{1+\eta_1},$$

$$b = \eta_1 b_1 - \frac{1-\eta_1}{2}c,$$

qui, introduits dans les expressions précédentes, donnent

$$\omega = \frac{1+\eta_1}{2}e(2b_1+c), \quad I = ec^2.\frac{6\eta_1 b_1 - (1-2\eta_1)c}{6(1+\eta_1)}$$

$$\frac{I}{v'} = ec\frac{6\eta_1 b_1 - (1-2\eta_1)c}{6\eta_1}, \quad \frac{I}{v'_1} = ec\frac{6\eta_1 b_1 - (1-2\eta_1)c}{6}.$$

Ces expressions particularisées deviennent :

$$\text{Quand } \eta_1 = \frac{1}{4}\begin{cases} \omega = 5e\frac{2b_1+c}{8}, v' = \frac{c}{5}, v'_1 = \frac{4c}{5} \\ b = \frac{2b_1-3c}{8}, I = ec^2\frac{3b_1-c}{15}, \frac{I}{v'} = ec\frac{3b_1-c}{3} \end{cases}$$

$$\text{Quand } \eta_1 = \frac{1}{3}\begin{cases} \omega = 2e\frac{2b_1+c}{3}, v' = \frac{c}{4}, v'_1 = \frac{3c}{4} \\ b = \frac{b_1-c}{3}, I = ec^2\frac{6b_1-c}{24}, \frac{I}{v'} = ec\frac{6b_1-c}{6}. \end{cases}$$

On voit par les valeurs de b que pour que la condition $\frac{v'}{v'_1} = \eta_1$ soit remplie, la semelle inférieure b_1e doit avoir une surface de plus de 1 fois $\frac{1}{2}$ celle ce du corps vertical quand $\eta_1 = \frac{1}{4}$, et plus de 1 fois

(Du n° 120).

quand $\eta_1 = \frac{1}{3}$; on peut même dire plus de 3 fois et de 2 fois, car alors $b =$ seulement $\frac{1}{8} b_1$ et $\frac{1}{6} b_1$.

Pour une section symétrique ou à semelles égales de même surface ω, si l'on désigne par des accents les quantités analogues, on a (en faisant dans les premières formules ci-dessus $b = b_1 = b'$, ou $\eta_1 = 1$ dans les secondes) :

$$\omega' = e'(2b' + c'),\ v'' = v''_1 = \frac{c'}{2},\ I' = e'c'^2 \frac{6b' + c'}{12},\ \frac{I'}{v''} = e'c' \frac{6b' + c'}{6}.$$

Pour comparer les résistances à la rupture offertes par cette section et par celle qui a des semelles inégales, on doit bien faire attention de prendre le rapport de $\frac{I'}{v''}$ (qui multiplié par R, en est la mesure pour la section à semelles égales) à $\frac{I}{v'}$ (qui serait, pour l'autre, à multiplier par le même coefficient R, limite des *tensions*), et non pas à $\frac{I}{v'_1}$ qui serait à multiplier par $R'_0 = \frac{R_0}{\eta_1}$, valeur de la *limite des pressions*, supposée plus grande que celle de la limite R_0 des tensions.

Donc :

1° Si les deux sections ont même hauteur $c' = c$, même surface $\omega' = \omega$ et même épaisseur $e' = e$, on aura d'abord par cela seul, pour la seconde :

$$2b' + c = \frac{1 + \eta_1}{2}(2b_1 + c),\ \text{d'où}\ b' = \frac{1 + \eta_1}{2} b_1 - \frac{1 - \eta_1}{4} c,$$

$$I' = ec^2 \cdot \frac{6(1+\eta_1)b_1 - (1 - 3\eta_1)c}{24},\ \frac{I'}{v''} = ec\frac{6(1+\eta_1)b_1 - (1 - 3\eta_1)c}{12}$$

(Du n° 120).

Il en résultera

	Rapport des résist. à la rupture.	Rapport des résist. à la flexion.
Quand $\eta' = \frac{1}{4}$,	$\frac{I'}{v''} : \frac{I}{v'} = \frac{1}{16} \frac{30 \frac{b_1}{c} - 1}{3 \frac{b_1}{c} - 1}$;	$\frac{I'}{I} = \frac{5}{32} \frac{30 \frac{b_1}{c} - 1}{3 \frac{b_1}{c} - 1}$
Quand $\eta_1 = \frac{1}{3}$,	$\frac{I'}{v''} : \frac{I}{v'} = \frac{4 \frac{b_1}{c}}{6 \frac{b_1}{c} - 1}$;	$\frac{I'}{I} = \frac{8 \frac{b_1}{c}}{6 \frac{b_1}{c} - 1}$.

D'où

		$\frac{b}{c}$	$\frac{b}{b_1}$	$\frac{b'}{c}$	Rapport des résistances à la rupture.	Rapport des résistances à la flexion.
Quand $\eta_1 = \frac{1}{4}$	Pour $\frac{b_1}{c} = 3/2$	0	0	0,750	0,786	1,964
	2	1/8	1/16	1,062	0,737	1,844
	3	5/8	1/8	1,687	0,695	1,738
	4	3/8	5/32	2,312	0,676	1,690
Quand $\eta_1 = \frac{1}{3}$	Pour $\frac{b_1}{c} = 1$	0	0	0,500	0,800	1,600
	3/2	1/6	1/9	0,833	0,750	1,500
	2	1/3	1/6	1,167	0,727	1,455
	3	2/3	2/9	1,833	0,706	1,412
	4	1	1/4	2,500	0,696	1,391

On voit ainsi que pour même superficie et même hauteur la section à semelles égales résiste moins à la rupture que la section à semelles inégales telle que $\frac{v'}{v'_1} = \eta_1$, mais toutefois sans que le désavantage excède $\frac{1}{5}$ à $\frac{3}{10}$, car le rapport des résistances varie de 0,80 à 0,68 en ne faisant pas b_1 plus grand que $4c$.

Et, en même temps, la pièce dont la section est à semelles

(Du n° **120**).

égales résiste bien mieux à la flexion élastique, ou prend bien moins de flèche sous même charge. L'avantage est exprimé par un rapport qui varie de 1,4 à 1,9.

On voit aussi, par la colonne $\frac{b}{b_1}$, que ce rapport des aires des deux semelles est bien moindre que le rapport $\eta_1 = \frac{v'}{v'_1}$ des plus grandes tensions et pressions des fibres, auquel il serait égal si l'on négligeait l'influence du corps vertical. Il faut donc prendre ce corps en considération.

2° Si l'on donne à ces deux sections des hauteurs différentes, de manière qu'elles offrent même résistance à la rupture, ou qu'avec $\omega' = \omega$ on ait $\frac{I'}{v''} = \frac{I}{v'}$, ce qui s'exprime par

$$e'(2b'+c') = \frac{1+\eta_1}{2} e\,(2b_1+c), \quad e'c'\frac{6b'+c'}{6} = ec\,\frac{6\eta_1 b_1 - (1-2\eta_1)c}{6\eta_1},$$

on trouvera, en divisant la seconde égalité par la première

$$\frac{c'}{c} = \frac{2}{\eta_1(1+\eta_1)} \cdot \frac{2\frac{b'}{c'}+1}{6\frac{b'}{c'}+1} \cdot \frac{6\eta_1\frac{b'}{c}-1+2\eta_1}{2\frac{b_1}{c}+1}; \text{ puis } \frac{I'}{I} = \frac{v''}{v'} = \frac{1+\eta_1}{2\eta_1}\frac{c'}{c};$$

$$\text{Et } \frac{e'}{c'} = \frac{e}{c}\,\frac{\eta_1^2(1+\eta_1)^3}{8}\,\frac{\left(6\frac{b'}{c'}+1\right)^2}{\left(2\frac{b'}{c'}+1\right)^3}\,\frac{\left(2\frac{b_1}{c}+1\right)^3}{\left(6\eta_1\frac{b_1}{c}-1+2\eta_1\right)^2}.$$

Faisons successivement sur le rapport des deux dimensions des sections à nervures égales les deux hypothèses $\frac{b'}{c'} = \frac{1}{2}$ et $\frac{b'}{c'} = \frac{1}{3}$; nous aurons $\left(\text{les nombres } \frac{c'}{c} \text{ et } \frac{e'}{c'} \text{ de la seconde hypothèse se déduisant de ceux de la première en les multipliant par } \frac{10}{9} \text{ et par } \frac{243}{250}\right)$:

(Du n° 120).

		Si $\frac{b'}{c'}=\frac{1}{2}$			Si $\frac{b'}{c'}=\frac{1}{3}$		
	Pour $\frac{b_1}{c}=\frac{3}{2}$	$\frac{c'}{c}=1,4$	$\frac{e'}{c'}=0,638\frac{e}{c}$	$\frac{I'}{I}=\frac{7}{2}$	$\frac{c'}{c}=1,556$	$\frac{e'}{c'}=0,620\frac{e}{c}$	$\frac{I'}{I}=\frac{35}{9}$
ıand $=\frac{1}{4}$	2	1,6	$0,610\frac{e}{c}$	4	1,778	$0,593\frac{e}{c}$	$\frac{40}{9}$
	3	1,829	$0,654\frac{e}{c}$	$\frac{32}{7}$	2,032	$0,636\frac{e}{c}$	$\frac{320}{63}$
	4	1,956	$0,744\frac{e}{c}$	$\frac{44}{9}$	2,173	$0,723\frac{e}{c}$	$\frac{440}{81}$
	Pour $\frac{b_1}{c}=1$	$\frac{c'}{c}=1,25$	$\frac{e'}{c'}=0,128\frac{e}{c}$	$\frac{I'}{I}=\frac{5}{2}$	$\frac{c'}{c}=1,389$	$0,124\frac{e}{c}$	$\frac{I'}{I}=\frac{25}{9}$
ıand $=\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	1,50	$0,593\frac{e}{c}$	3	1,667	$0,576\frac{e}{c}$	$\frac{10}{3}$
	2	1,65	$0,612\frac{e}{c}$	$\frac{33}{10}$	1,833	$0,595\frac{e}{c}$	$\frac{11}{3}$
	3	1,821	$0,703\frac{e}{c}$	$\frac{51}{14}$	2,024	$0,684\frac{e}{c}$	$\frac{85}{21}$
	4	1,917	$0,817\frac{e}{c}$	$\frac{23}{6}$	2,130	$0,794\frac{e}{c}$	$\frac{115}{27}$

On voit que le désavantage comparatif des sections à semelles égales disparaît si l'on augmente la hauteur; seulement, leur corps vertical devient plus grêle, car le rapport $\frac{e'}{c'}$ de l'épaisseur à la hauteur n'est que des 0,6 aux 0,8 du rapport $\frac{e}{c}$ relatif aux sections à semelles inégales de même résistance et de même superficie.

D'un autre côté, les semelles égales ont un avantage considérable sous le rapport de la résistance à la flexion, ou de la petitesse des flèches, qui sont en raison inverse des moments d'inertie I', I

dont nous donnons les rapports s'élevant à plus de 3 et de 4 à 1, si l'on exclut les valeurs de $\frac{b_1}{c}$ donnant $b = 0$.

§ 18. *Application de la formule exacte à la section jugée la mieux proportionnée par M. Hodgkinson. Conclusion de ce paragraphe et du précédent.* — Les approximations du § précédent pouvaient suffire à son objet; mais les formules du § 16 peuvent seules donner des résultats exacts.

Prenons pour exemple la section en double T en fonte que M. Hodgkinson présente comme la mieux proportionnée, d'après les expériences de *rupture immédiate* où il a fait varier successivement les dimensions [1], et qui a, en millimètres, des semelles inférieure et supérieure de 167,4 sur 16 et 59,2 sur 8, avec une hauteur 130 et un corps vertical de 6,7 de large, ou pour laquelle

$$e=6{,}7,\ b=59{,}2,\ c=130,\ b'=52{,}5,\ c'=122,\ b''=160{,}7,\ c''=16,$$
$$b_1=167{,}4\ c=130,\ b'_1=160{,}7,\ c'_1=114,\ b''_1=52{,}5,\ c''_1=8.$$

Nous trouvons d'abord

$$\frac{v'_1}{v'} = \frac{\frac{1}{2}b_1c_1^2-\frac{1}{2}b'_1c'^2_1+\frac{1}{2}b''_1c''^2_1}{\frac{1}{2}bc^2-\frac{1}{2}b'c'^2+\frac{1}{2}b''c''^2} = \frac{371982}{130104} = 2{,}859;$$

d'où $$v' = 33{,}687,\quad v'_1 = 96{,}313.$$

Si, pour ce rapport $\frac{v'_1}{v'}$ de la plus grande compression à la plus grande dilatation, nous avions pris le rapport des aires des semelles inférieure et supérieure en négligeant le corps vertical et les carrés des épaisseurs, nous aurions eu $\frac{b_1c''}{bc''_1} = \frac{167{,}4\times16}{59{,}2\times8} = \frac{2678{,}4}{473{,}6} = 5{,}6554$ ou *près du double* de la vraie valeur 2,859.

Et si, en tenant compte du corps vertical, nous avions encore négligé les termes provenant des carrés des épaisseurs, nous aurions

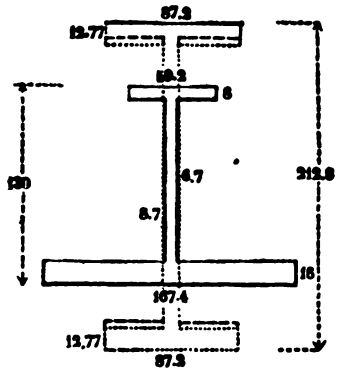
[1] Figure 66 (expériences 12 et 13) et pages 100 et 104 de la traduction libre faite par M. Pirel, des *Recherches expérimentales*, etc. (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1er semestre 1855.

(Du n° 120).

eu (§ 16) $\dfrac{b''c'' + \frac{1}{2}ce}{b''_1c''_1 + \frac{1}{2}ce} = \dfrac{3006,7}{855,5} = 3,514$, qui excède encore d'environ $\frac{1}{4}$ le vrai rapport 2,859.

En poursuivant le calcul rigoureux nous obtenons

$$\omega = 3862 \text{ mmè. carrés}, 2 ; \; I = 8\,581\,742, \; \frac{I}{v'} = 254\,749.$$



Maintenant, transformons cette section.

1° Si, en lui conservant sa superficie, sa hauteur totale $c = 130$ millimètres, et l'épaisseur 6,7 de son corps vertical, nous changeons ses nervures en d'autres qui soient égales entre elles et d'une épaisseur 12, nous trouvons que les semelles auront 131,33 de longueur et qu'on aura

$$v'' = \frac{c}{2} = 65 ; \; I' = 11\,674\,640, \; \frac{I'}{v''} = 179610.$$

La résistance à la flexion élastique est, comme on voit, augmentée dans la proportion $\frac{1167}{858} = 1,36$, mais la résistance à la rupture n'est plus que les $\frac{179610}{254749} = 0,705$ de ce qu'elle était.

2° Rendons à cette dernière résistance sa valeur en augmentant la hauteur de la section devenue symétrique. Soit C sa nouvelle hauteur, B la largeur extérieure ou la longueur des semelles, C' la hauteur et B' la largeur totale de l'évidement, on devra avoir (§ 12)

$$BC - B'C' = \omega = 3862,2 ; \; \frac{BC^3 - B'C'^3}{6C} = \frac{I}{v'} = 254749 ;$$

d'où, si l'on pose $B' = mB$, $C' = mC$:

(Du n° 120).

$$C = \frac{1-mn}{1-mn^3} \cdot \frac{6}{\omega} \cdot \frac{I'}{v}, \quad B = \frac{\omega}{C(1-mn)},$$

Si nous prenons $1-m=0,1$, $1-n=0,12$, ces formules nous donneront les dimensions suivantes :

$$B = 87,240, \quad C = 212,846; \text{ Épaisseur du corps } 8,724,$$

$$\text{Épaisseurs des semelles } \frac{C-C'}{2} = 12,7705,$$

ou la section figurée d'autre part en ponctué rond et qui offre, avec la même superficie et la même résistance à la rupture que la section en lignes pleines, une résistance à la flexion bien supérieure, car son moment d'inertie est

$$I' = \frac{I}{v'} \frac{C}{2} = 254\,749 \times 106,422 = 27\,111\,155,$$

ou plus que triple du moment d'inertie I de la section en lignes pleines.

3°. Si maintenant, en conservant la nouvelle hauteur $C = 212,85$ ainsi que la largeur 87,2 des semelles, nous réduisons l'épaisseur de la semelle supérieure aux deux tiers, c'est-à-dire à 8,51 en augmentant d'autant l'épaisseur de la semelle inférieure ou en la portant à 17,04, conformément aux deux lignes horizontales en *ponctué allongé*, les formules du § 16 donnent

$$v' = 90,19, \quad v'_1 = 122,66, \quad I = 25\,808\,319, \quad \frac{I}{v'} = 286\,370.$$

La résistance à la rupture est sensiblement augmentée puisqu'on a maintenant 286370 au lieu de 254749, et la résistance à la flexion, mesurée par la valeur de I, est fort peu diminuée et toujours un peu plus que triple de ce qu'elle était avec la section primitive en lignes pleines.

4° On aurait eu sensiblement le même résultat *en augmentant la largeur de la semelle inférieure ponctuée au lieu d'augmenter son épaisseur.* Et l'on aurait eu un profil plus conforme au conseil généralement donné de rendre le plus égales possibles les épaisseurs des diverses parties des pièces en métal fondu.

(Du n° 120).

De la discussion contenue dans ce paragraphe et dans le précédent, et à laquelle nous aurions pu donner plus d'étendue sans en épuiser l'utilité pratique, nous pouvons tirer ces conclusions :

A égale hauteur et à égale superficie, une pièce en métal ou autre matière pour laquelle la résistance permanente R'_0 à la compression longitudinale excède très-sensiblement la résistance R_0 à l'extension, résiste plus à la rupture éloignée si la semelle inférieure ou étendue de sa section en double T a plus de surface que la semelle supérieure ou comprimée, que si ces deux semelles sont égales, pourvu que l'inégalité ne soit pas telle que le rapport des distances du centre de gravité aux deux bases supérieure et inférieure excède $\frac{R'_0}{R_0}$, ou qu'elle n'aille pas jusqu'à produire du côté devenant concave des compressions longitudinales ayant pour conséquence des dilatations transversales plus *dangereuses* que les dilatations longitudinales du côté devenant convexe; pourvu aussi qu'il n'en résulte pas de déversement ni de flexion latérale de la semelle comprimée.

Ce rapport-limite $\frac{R'_0}{R_0}$ serait 4 si la matière était d'égale contexture en tous sens; il paraît convenable (jusqu'à recherches ultérieures) de le réduire à 3 pour les fontes et à 2 pour les fers.

Mais, même en lui donnant sa plus grande valeur 4, le calcul prouve que la résistance à la rupture obtenue avec les semelles inégales n'excède jamais les 3/2 de celle qu'on a avec des semelles égales pour même surface et même hauteur.

Et la résistance élastique *à la flexion* est considérablement diminuée par l'inégalité des semelles qui, ainsi, augmente beaucoup la flèche sous même charge.

En accroissant des 0,4 aux 0,7 la hauteur d'une section à semelles égales, on obtient, pour même superficie, l'excédant de résistance à la rupture qui est susceptible d'être obtenu en les rendant inégales pour même hauteur.

Et l'on augmente en même temps, dans une plus forte proportion, la résistance élastique à la flexion.

Lors donc qu'on ne sera pas gêné pour la hauteur, il sera avantageux d'employer, à l'augmenter, la plus grande partie de l'excédant de matière de la semelle inférieure de la section non symétrique qu'on aurait proportionnée de manière à offrir égalité de résistance sur les deux bases. Toutefois, la hauteur doit être limitée par la crainte du *déversement* (§§ 4 et 13) susceptible d'être produit par une charge légèrement oblique, et par celle de faciliter la flexion latérale de la semelle supérieure pressée longitudinalement. On devra, par la même considération, conserver aux semelles une certaine grandeur, et, le plus souvent, pour les fers laminés, faire la semelle supérieure égale à l'autre, les expériences de rupture citées à la fin du § 13 de la note du n° 113 ne paraissant pas offrir de motifs suffisants pour la faire plus grande que la semelle inférieure.

Dans chaque cas il conviendra de se rendre compte, par les formules exactes du § 16, ou par un calcul numérique de moments statiques et de moments d'inertie fait sur l'épure (surtout lorsque la section n'aura pas exactement la forme d'un double T à angles droits et prononcés), des résistances comparées de diverses formes avant d'adopter la forme définitive.

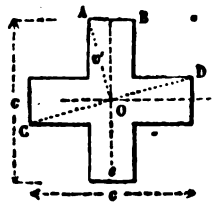
Nous reviendrons, au reste, sur ce sujet dans la partie expérimentale en discutant les résultats obtenus, auxquels il nous sera sans doute donné de joindre ceux d'épreuves toutes récentes, faites en grand sous la direction de M. Morin.

§ 19. *Discussion relative aux sections en croix ou à nervures égales dans deux sens rectangulaires.* — On emploie quelquefois pour les arbres tournants des machines, ou bien pour les poteaux et les bielles, des pièces à quatre nervures égales appelées aussi pièces à côtes ou à ailes, ou *axes emplumés* (feathered axis). Nous allons voir qu'elles n'offrent, à égales quantité de matière, que peu ou point d'avantage sur les sections circulaires quant à la flexion, à moins que les nervures ou ailes ne soient très-fortement saillantes, ce que d'autres considérations doivent faire souvent exclure.

Ces sections sont les suivantes.

Le moment d'inertie de chacune est le même autour de tous les axes tracés sur leur plan par leur centre de figure. On prend con-

(Du n° 120).



stamment pour valeur de v' le maximum de distance de la fibre la plus éloignée, pour les diverses positions de cet axe.

1° *Simple croix d'équerre.* Soient c la longueur des doubles bras, e leur épaisseur, on a

$$\omega = 2ce - e^2, \quad v' = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + e^2}, \quad I = \frac{ce^3}{12} + \frac{ec^3}{12} - \frac{e^4}{12}$$

ou $$I = \frac{\frac{c^3}{e^3} + \frac{c}{e} - 1}{12\left(2\frac{c}{e} - 1\right)^2}\omega^2, \quad \frac{I}{v'} = \frac{\frac{c^3}{e^3} + \frac{c}{e} - 1}{6\sqrt{\left(\frac{c^2}{e^2} - 1\right)\left(2\frac{c}{e} - 1\right)^3}}\omega^{\frac{5}{2}}.$$

On trouve en conséquence

Lorsque $\frac{c}{e} = 1$	(simple carré), $\frac{I}{\omega^2} = \frac{1}{12} = 0{,}0833$,		$\frac{I}{v'\omega^{\frac{5}{2}}} = 0{,}1176$
1,2	0,0820		0,1242
1,5	0,0807	(minimum)	0,1268
1,8	0,0818		0,1280
2,0	0,0833		0,1291
3	0,0967		0,1367
4	0,1139		0,1462

La résistance à la rupture par la flexion augmente constamment à mesure que le rapport $\frac{c}{e}$ du double bras à l'épaisseur augmente; mais la résistance $\frac{I}{\omega^2}$ à la flexion élastique n'augmente qu'après avoir eu, pour $b = 1,5.e$, un minimum très-peu différent de la valeur 0,0796 relative à la section circulaire, et être redevenue ensuite, pour $b = 2e$, la même qu'elle était pour $b = e$ ou pour le simple carré. On voit, au reste, que l'augmentation de la résistance à la rupture est peu rapide, et il faut que le rapport $\frac{b}{e}$ atteigne 3 1/2 pour que cette résistance $\frac{I}{v'\omega^{\frac{5}{2}}}$ d'une pièce à section en croix atteigne la va-

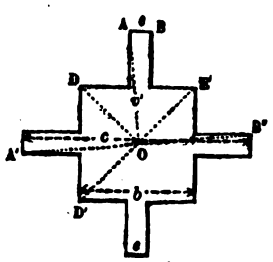
leur $0{,}14105 = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}$ qu'elle a dans une pièce cylindrique ou à section circulaire.

Nous n'avons pas calculé $\frac{I}{v'}$ eu égard aux augmentations de valeur pouvant résulter de la supposition de troncatures qui diminuent v' plus que I, parce que, lorsque l'axe du moment d'inertie est parallèle à la base supérieure $AB = e$, les deux conditions du § 8 de la note du n° 113 (p. 99 et 100) pour qu'une troncature augmente le quotient $\frac{I}{v'}$ sont, ici, $(c-e)e^3 > 2c^3e$ et $(c-e)e^3 > ce^2(c+e)$ qui ne se trouvent remplies ni l'une ni l'autre; d'où il suit que la seule troncature capable d'augmenter la résistance consisterait à échancrer un peu un angle tel que A lorsque l'axe du moment est CD perpendiculaire à OA, ce qui ne produirait qu'une augmentation négligeable.

2° *Section carrée avec quatre nervures.* On a, b étant le côté du carré servant de noyau, c la longueur d'une double nervure y compris la largeur de ce noyau, et e l'épaisseur des nervures

$$\omega = b^2 + 2(c-b)e, \quad I = \frac{1}{12}\left[ec^3 - eb^3 + (c-b)e^3 + b^4\right]$$

$$v' = \text{la plus grande des deux longueurs} \begin{cases} OD = \frac{1}{2}b\sqrt{2} \\ OA = \frac{1}{2}\sqrt{c^2+e^2}, \end{cases}$$



Ou la 1re longueur tant que $\frac{c}{b}$ n'atteint pas $\sqrt{2-\left(\frac{e}{b}\right)^2}$ ou que la section n'est pas inscriptible dans un cercle, en sorte qu'on ait $OA = OD$;

Et la 2e longueur ensuite.

D'où, en adoptant $\frac{e}{b} = \frac{1}{5} = 0{,}2$:

(Du n° 120).

Si $\frac{c}{b} = 1$ (carré sans nervures)	$\frac{I}{\omega^2} = 0{,}0833$,	$\frac{I}{v'\omega^{\frac{3}{2}}} = 0{,}1176$
1,2	0,0820	0,1205
1,4	0,0827	0,1275
1,6	0,0884	0,1220
1,8	0,0943	0,1197
2	0,1024	0,1205
3	0,1599	0,1427

On voit qu'à égale surface de section la résistance élastique est d'abord diminuée par l'addition de nervures; puis, passé la valeur $\frac{c}{b} = 1{,}4 = \sqrt{2 - \left(\frac{e}{b}\right)^2}$ qui rend la section inscriptible dans un cercle, cette résistance est augmentée. Quant à la résistance à la rupture par flexion, elle augmente d'abord jusqu'à $\frac{c}{b} = 1{,}4$ puis elle diminue, et redevient, pour $\frac{c}{b} = 1{,}8$, ou pour les nervures dont la saillie est un peu moindre que la demi-épaisseur du noyau, peu différente de ce qu'elle était sans nervures; elle n'augmente que pour des nervures plus saillantes. Et elle n'atteint la valeur 0,1410 relative au cercle que pour $\frac{c}{b} = 3$ environ, ou pour des nervures ayant leur saillie égale à la largeur du noyau.

Une troncature qui consisterait seulement à échancrer ou chanfreiner un peu l'angle D ou l'angle A parallèlement aux diagonales D'E', A'B'' augmenterait trop peu $\frac{I}{v'}$ pour qu'il y eût lieu de tenir compte de cette augmentation (§ 8 de la note du n° 113). Si elle consiste à accourcir la double nervure verticale en lui donnant une longueur c_1 un peu moindre que celle c conservée à la nervure horizontale, $\frac{I}{v'}$ devient, pour $v' = \rho A$, $\frac{ec_1^3 - eb^3 \quad (c-b)e^3 + b^4}{6\sqrt{c_1^2 + e^2}}$ dont la dérivée par rapport à c_1

$$c_1 \frac{(c_1^2 + e^2) \cdot 3ec_1 + eb^3 - (c-b)\, e^3 - b^4}{6(c_1^2 + e^2)\sqrt{c_1^2 + e^2}}$$

ne sera négative, quand $b = 5e$, que pour $\frac{c}{e} < 6{,}225$, ou $\frac{c}{b} < 1{,}245$. Comme cette valeur de $\frac{c}{b}$ est moindre que celle $\sqrt{2-\left(\frac{e}{b}\right)^2} = 1{,}4$ pour laquelle on cesse de prendre $v' = \text{OD} = \frac{1}{2} b\sqrt{2}$ pour commencer à prendre $v' = o\text{A} = \frac{1}{2}\sqrt{c^2+e^2}$, on voit que $\frac{\text{I}}{v'}$ n'augmentera pas en diminuant la longueur de la double nervure verticale.

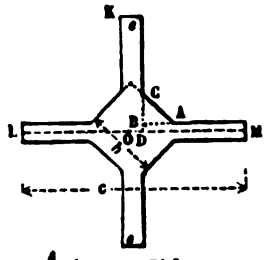
La prise en considération des troncatures possibles ne changera donc pas sensiblement les conclusions précédentes.

3° *Section carrée avec quatre nervures en prolongement des diagonales.* Soient

b le côté du carré,

c la longueur d'une double nervure y compris la diagonale qu'elle prolonge, et e son épaisseur.

Le moment d'inertie se compose de celui $\frac{1}{12}(ec^3 + ce^3 - e^4)$ de la croix d'équerre qui resterait en enlevant les quatre triangles tels que ABC, et de quatre fois le moment d'inertie de ce triangle. Comme on a ses côtés :



$$\text{AB} = \text{BC} = b\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\text{BD} = b\frac{\sqrt{2}}{2} - e,$$

et par conséquent l'aire de ce triangle $\omega' = \frac{1}{4}(b - e\sqrt{2})^2$, on peut, pour son moment d'inertie autour de la diagonale LM du noyau, appliquer la formule

$$\frac{\omega'}{6}(y^2 + y'^2 + y''^2 + y'y'' + y''y + yy')$$

du § 6 de la note du n° 82, en substituant les ordonnées de ses trois sommets A, B, C, $y = \frac{e}{2}$, $y' = \frac{e}{2}$, $y'' = b\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{e}{2}$. Le sextinôme entre parenthèses se réduit à $\frac{e^2}{2} + \frac{b^2}{2}$. Multipliant par $\frac{\omega'}{6}$,

(Du n° 120).

quadruplant et ajoutant le moment d'inertie de la croix, on obtient

$$I = \frac{ec^3}{12} + \frac{(c-e)e^3}{12} + \frac{(b - e\sqrt{2})^2 (b^2 + e^2)}{12}.$$

On a

$$v' = OK = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + e^2}$$

et l'aire $\omega = b^2 + c^2 + 2e(c - b\sqrt{2})$. D'où, adoptant $\frac{e}{b} = \frac{1}{4}$ ou l'épaisseur des nervures égale au quart du côté du carré :

Si $\frac{c}{b} = \sqrt{2} = 1,4142$;	$\frac{I}{\omega^2} = 0,0863$;	$\frac{I}{v'\omega^{\frac{3}{2}}} = 0,1239$	
1,50	 0,0892	. . . . .	0,1233
1,67	. . . . .	. . . . .	0,1239
2	 0,1121	. . . . .	0,1295
3	 0,1732	. . . . .	0,1585.

La résistance à la flexion élastique augmente constamment. Mais la résistance à la rupture par flexion n'augmente qu'après avoir diminué ; elle ne vient à surpasser sensiblement celle 0,14105 du cylindre à section circulaire que pour $\frac{c}{b} = 3$ ou pour des nervures comme celles de la figure, et qui sont très-saillantes.

De même que pour le cas précédent, la troncature d'un angle en chanfrein n'augmenterait $\frac{I}{v'}$ que d'une manière négligeable ; et toute réduction de la double nervure verticale à une longueur moindre que c, diminuerait $\frac{I}{v'}$, quand $\frac{e}{b} = \frac{1}{4}$ et $\frac{c}{b} =$ au moins $\sqrt{2}$. Il n'y a pas lieu de prendre les troncatures en considération.

(Du n° **120**).

4° Section composée d'un noyau circulaire de rayon r *et de quatre nervures ayant une épaisseur* e *et une saillie* s. — On peut la partager : 1° en un rectangle de largeur e et de hauteur $2r+2s$; 2° en deux autres rectangles de hauteur e et de largeur $m''n = s + \left[r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2}\right]$; 3° en quatre portions de cercle $p'm'm''p$ comme celles qui ont été considérées au (2°) du § 3 de la note du n° 84, et pour lesquelles l'arc $am'' = x' =$ arc sin $\frac{e}{2r}$. On a donc

$$\omega = e\,(2r + 2s) + 2e\left(s + r - \sqrt{r^2 - \frac{e^2}{4}}\right) + 4r^2\left(\frac{\pi}{4} - \text{arc sin}\,\frac{e}{r}\right),$$

$$v' = \sqrt{(r+s)^2 + \frac{e^2}{4}},$$

$$I = \frac{\pi r^4}{4} + \frac{e(2r+2s)^3 + e^3(2r+2s)}{12} - r^4\,\text{arc sin}\,\frac{e}{2r} - \frac{er^3}{6}\left(1 + \frac{e^2}{2r^2}\right)\sqrt{1 - \frac{e^2}{4r^2}}$$

Ce qui donne, en adoptant $\frac{e}{r} = \frac{1}{2}$:

Simple cercle $\frac{I}{\omega^2} = 0{,}07958$; $\frac{I}{v'\omega^{\frac{3}{2}}} = 0{,}14105$

$\frac{s}{r} = 0$	0,08097	0,14020
0,2	0,08350	0,12768
0,5	0,09373	0,12501
1	0,12002	0,13465
1,5	0,15226	0,1498
2	0,18760	0,16620

Les nervures augmentent constamment, à égale superficie, la résistance à la flexion, mais elles diminuent d'abord la résistance à la rupture par flexion, qui n'arrive à surpasser ce qu'elle était sans nervures ou pour la simple section circulaire, que lorsque la saillie de celles-ci atteint 1 fois 1/2 le rayon du noyau.

121. Considérons un solide prismatique (Fig. 9) encastré horizontalement à l'extrémité A, et chargé à l'autre extrémité M d'un poids. Nommons

r le moment de rupture, évalué conformément aux nos 113 et suivants, d'après la figure de la section transversale du solide;

P le poids suspendu à l'extrémité M du corps;

a la distance horizontale de la section A à la direction du poids P;

s la longueur AM du solide;

f la flèche de courbure CM.

Par le même motif que pour la section carrée avec nervures, il n'y pas lieu de s'occuper ici des troncatures possibles.

Conclusion de ce § 19. — On reconnaît ainsi qu'il y a nécessité absolue, avant d'adopter un profil à nervures ou à quatre *ailes*, de se rendre exactement compte des résistances qu'on peut en attendre à égale quantité de matière.

Et même, si l'on considère que les arbres de transmission de mouvement, pour lesquels surtout on a imaginé ces sortes de profils, sont en même temps soumis à la torsion, et que les nervures ont fort peu d'influence sur la résistance à la torsion, comme on verra aux notes des nos 156 à 160, en sorte qu'à égale quantité de matière elles diminuent très-sensiblement cette sorte de résistance, on partagera, quoique par une autre raison, l'avis de M. Tredgold (*Practical essay on the strength of cast iron*, 1824) qui préfère, pour ces arbres, les sections circulaires sans nervures.

Les sections en croix paraissent ainsi devoir être reservées pour les *pièces sollicitées debout*, comme les poteaux et les bielles, et à la condition que les bras de la croix seront assez longs pour augmenter très-sensiblement $\frac{I}{\omega^2}$ ou la résistance élastique à la flexion, qui est ce qu'il y a d'essentiel à considérer dans les pièces sollicitées de cette manière.

La rupture tend à se faire dans la section A, et les conditions de l'équilibre sont exprimées par

$$r = Pa, \quad \text{d'où} \quad P = \frac{r}{a};$$

ou à peu près, en supposant que la courbe du solide est l'élastique du n° 86, ce qui donne $s = a + \frac{3f^2}{5a}$,

$$P = \frac{r}{s - \frac{3f^2}{5a}}.$$

122. Considérons présentement un solide prismatique (Fig. 10), posé horizontalement sur deux appuis, et chargé au milieu. Nommons

$2P$ le poids suspendu au milieu A du solide ;
a la moitié CM de la distance des appuis ;
f la flèche de courbure AC ;
α l'angle de la tangente à la courbe en M, M' avec l'horizontale MM'.

La rupture du corps tend à s'effectuer au milieu A. L'effort exercé contre l'appui M (abstraction faite de la considération du frottement sur cet appui) est une force normale à la courbe du solide, dont la composante verticale est P, et la composante horizontale P tang α. Par conséquent, en supposant que la courbe du solide est l'élastique du n° 86, d'où tang $\alpha = \frac{3f}{2a}$, les conditions de l'équilibre s'expriment en posant

$$r = P.a + P.f \text{ tang } \alpha, \quad \text{ou} \quad r = Pa\left(1 + \frac{3f^2}{2a^2}\right);$$

d'où

$$2P = \frac{2r}{a + f \text{ tang } \alpha}, \quad \text{ou} \quad 2P = \frac{2r}{a\left(1 + \frac{3f^2}{2a^2}\right)}.$$

123. Considérons un solide prismatique droit encastré horizontalement à une extrémité, comme celui qui est représenté Fig. 9, et chargé de poids distribués arbitrairement sur la longueur AM. Nommant

x la distance horizontale d'un point quelconque du solide à l'extrémité A ;

p la valeur du poids suspendu en ce point, rapportée à l'unité de longueur, et donnée en fonction de x ;

a la distance AC ;

on aura, pour exprimer l'équilibre

$$\mathfrak{r} = \int_0^a dx \,.\, px.$$

124. Si les poids portés par chacun des éléments de la longueur du solide sont égaux entre eux, p est constante, et l'on a

$$\mathfrak{r} = \frac{pa^2}{2}, \qquad pa = \frac{2\mathfrak{r}}{a}.$$

Ainsi le solide serait également rompu par un poids distribué conformément sur sa longueur, ou par un poids moitié moindre, suspendu à l'extrémité B.

125. Lorsqu'un solide posé horizontalement sur deux appuis, comme on l'a supposé n° 122, est chargé par des poids distribués uniformément sur sa longueur, p représentant la charge correspondante à l'unité linéaire, on a pa et pa. tang α pour les composantes verticale et horizontale de la pression supportée par les appuis. Par conséquent, en supposant que la courbe du solide est l'élastique du n° 90, d'où tang $\alpha = \frac{8f}{5a}$, les conditions de l'équilibre sont exprimées par l'équation

$$\mathfrak{r} = pa \,.\, a + pa \,.\, f \text{ tang } \alpha - pa\,\frac{a}{2},$$

ou

$$r = pa\left(\frac{a}{2} + f \operatorname{tang} \alpha\right), \quad \text{ou} \quad 2pa = \frac{4r}{a\left(1 + \frac{16f^2}{5a^2}\right)}.$$

Ainsi $\left(\text{en négligeant le carré de } \frac{f}{a}\right)$ le solide est également rompu par un poids distribué uniformément sur sa longueur, ou par la moitié de ce poids placée au milieu.

126. Lorsque le solide prismatique, posé horizontalement sur deux appuis, est chargé à la fois du poids 2P placé au milieu, et du poids constant p sur chaque unité de longueur, l'équilibre est exprimé par l'équation

$$r = (P + pa)a + (P + pa)f \operatorname{tang} \alpha - pa \cdot \frac{a}{2},$$

ou

$$r = (P + pa)(a + f \operatorname{tang} \alpha) - \frac{pa^2}{2},$$

d'où

$$2P = \frac{2r - pa(a + 2f \operatorname{tang} \alpha)}{a + f \operatorname{tang} \alpha}.$$

Dans le cas dont il s'agit, en supposant la courbure du solide déterminée conformément à ce qui a été fait n° 90, on a $\operatorname{tang} \alpha = \frac{3P + 2pa}{8P + 5pa} \cdot \frac{4f}{a}$; cette valeur doit être substituée dans les équations précédentes (*).

(*) Cette expression de tang α résulte immédiatement de la division de la dernière par l'avant-dernière équation du § 3 de la note du n° 90 (page 82). On néglige les termes en $\left(\frac{a^2}{EI}\right)^3$ parce que la substitution de cette expression à tang α dans celle de 2P du texte ne donne que des termes en $\left(\frac{f}{a}\right)^2$ très-petits.

127. Pour appliquer les résultats précédents à un corps donné, il faudra substituer à la place de r l'expression du moment de rupture qui convient à la figure de la section transversale de ce corps, conformément aux nos 113 et suivants. On donnera ensuite à la constante R la valeur qui convient à la nature du corps, et qui doit être déterminée par l'observation.

Les observations au moyen desquelles on détermine la valeur de cette constante consistent à placer horizontalement un solide prismatique sur deux appuis, à le charger au milieu par des poids de plus en plus grands, et à observer simultanément le poids qui cause la rupture, et la flèche de courbure qui a lieu à l'instant où cette rupture est prête à s'opérer. La section transversale du solide étant un rectangle (Fig. 2) dont les côtés sont b et c, on a (n° 115) $r = R\frac{bc^2}{6}$, et (n° 122), $2P = \frac{2r}{a\left(1+\frac{3f^2}{2a^2}\right)}$, en faisant abstraction du poids du solide. Donc

$$2P = R\frac{bc^2}{3a\left(1+\frac{3f^2}{2a^2}\right)}, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{2P\,.\,3a\left(1+\frac{3f^2}{2a^2}\right)}{bc^2},$$

$2a$ étant l'intervalle des appuis, 2P le poids placé au milieu de la longueur du solide, f la flèche de courbure.

128. Si l'on a égard au poids du solide, il faut employer l'expression de 2P du n° 126. En nommant 2Π ce poids, cette expression devient

$$2P = \frac{Rbc^2 - 3\Pi(a + 2f\tang\alpha)}{3(a + f\tang\alpha)}$$

d'où

$$R = \frac{3[(2P + 2\Pi)(a + f\tang\alpha) - \Pi a]}{bc^2};$$

et l'on a

$$\tang\alpha = \frac{3P + 2\Pi}{8P + 5\Pi}\,.\,\frac{4f}{a}.$$

129. Lorsque les solides ont une petite longueur, ou ne prennent qu'une faible courbure à l'instant de la rupture, on peut négliger les termes du second ordre introduits par la considération de cette courbure : on a alors, en faisant abstraction du poids du solide,

$$2P = R\frac{bc^2}{3a}, \quad \text{d'où} \quad R = 2P\,.\,\frac{3a}{bc^2};$$

et, en tenant compte de ce poids,

$$2P = R\frac{bc^2}{3a} - \Pi, \quad \text{d'où} \quad R = (2P + \Pi)\frac{3a}{bc}.$$

On va maintenant rapporter les expériences faites pour évaluer la résistance à la rupture de divers corps, et au moyen desquelles on peut déterminer les valeurs de la constante R.

130 à 141 (*).

142. Les circonstances de la flexion et de la rupture des bois, telles que les allongements et accourcissements des fibres, et la situation de la fibre invariable, ont été étudiées dans des expériences faites par M. Ch. Dupin, mais qui n'ont pas encore été publiées (**). M. Barlow, dans un ouvrage déjà cité, a donné quelques recherches sur cet objet. Elles apprennent que quand un prisme en bois fléchit progressivement, les fibres situées sur la face concave s'accourcissent plus que les fibres situées sur la face convexe ne s'allongent. Le rapport de l'accourcissement des premières à l'allongement des secondes, égal à l'unité quand la flexion commence, croît progressivement jusqu'à devenir égal à 1,7 environ. La fibre invariable s'approche

(*) Expériences renvoyées, comme celles des n°s 4 à 20, 22 à 75 et 94 à 111, et par les mêmes motifs, après le n° 168 au *Complément* des articles I à VI, en y ajoutant celles qui ont été faites depuis 1833.

(**) Elles l'ont été aux *Leçons de Mécanique* du Conservatoire, publiées par ce savant. On les donnera au *Complément* des art. I à VI.

peu à peu de la face convexe. Dans les barreaux éprouvés par M. Barlow, elle a été observée communément, lors de la rupture, aux 5/8 de la hauteur de la section, à compter de la face concave.

Ces effets sont mis en évidence par une expérience remarquable, imaginée par Duhamel. Elle consiste à scier transversalement une pièce de bois du coté de la face concave, et à remplir le trait de scie par une cale de bois dur. La force de la pièce augmente un peu quand le trait de scie pénètre jusqu'au 1/3 de l'épaisseur; elle est la même quand il pénètre jusqu'à moitié environ, et elle est peu diminuée quand il pénètre aux 3/4 de l'épaisseur. Cette expérience a été répétée par M. Barlow, avec les mêmes résultats (*).

143 à **149** (**).

Notions sur les théories de la résistance à la rupture proposées par Galilée, et par Mariotte et Leibnitz.

150. La première consistait à placer l'axe horizontal d'équilibre au point inférieur de la section de rupture (Fig. 11), et à considérer la force intérieure développée en chaque point de cette section comme constante pour tous les points. Nommant

R la résistance pour l'unité de surface;
b la largeur de la section;
f_1u, f_2u les valeurs pm, pn de l'ordonnée du contour de la section qui répondent à une même abscisse u;
c la hauteur de la section;

(*) On a dit ci-dessus (§§ 13 de la note du n° 113 et 18 de celle du n° 120) et l'on verra aux tableaux d'expériences, que c'est le contraire pour la fonte de fer.

(**) Renvoyés comme les n°s 130 à 141.

on avait ainsi

$$R\int_0^b du\int_{f_1u}^{f_2u} dv\,.\,v$$

pour l'expression du moment de la résistance à la rupture. Cette expression, dans le cas où la section est un rectangle dont les côtés sont b, c, devient

$$R\,\frac{bc^2}{2}.$$

La théorie attribuée communément à Mariotte et à Leibnitz consistait à placer également l'axe horizontal d'équilibre au point inférieur de la section, et à supposer la force intérieure développée en chaque point proportionnelle à la distance de ce point à l'axe d'équilibre. Le moment de la résistance à la rupture était alors

$$\frac{R}{c}\int_0^b du\int_{f_1u}^{f_2u} dv\,.\,v^2.$$

Il devenait, dans le cas du rectangle

$$R\,\frac{bc^2}{3}. \qquad (*)$$

(*) Les considérations présentées par Galilée, le fondateur de la théorie de la résistance des solides, se trouvent à son *Dialogo secundo, Giornata secunda*, 1638 (1). Il place la puissance et la résistance aux extrémités d'un levier coudé ayant pour bras horizontal la longueur du parallélipipède ou du cylindre solide encastré, et pour bras vertical la moitié de la hauteur de ce solide; et il conclut que les poids capables de le rompre par sollicitation transversale et par traction longitudinale sont entre eux en raison inverse de ces deux bras. D'où il déduit déjà que les prismes posés résistent en raison directe de la largeur et du carré de la hauteur et en raison inverse de la longueur; que ceux qui sont creux (comme les os, les

(1) *Opere di Galileo Galilei*, édit. 1744, t. III, p. 63, article 556.

(Du n° 150).

plumes, etc.) ont plus de résistance sous même volume ; que, pour une largeur constante, il y aura *égale résistance* partout, si les hauteurs croissent comme les ordonnées d'une parabole dont les abscisses sont les distances du point d'application de la force transversale, etc.

La théorie de Leibnitz est exposée aux *Acta eruditorum, Lipsiæ*, 1684, p. 319, dans un article intitulé : *Demonstrationes novæ de resistentiâ solidorum.* Il place l'axe de rotation, comme Galilée, au bas de la section, mais le bras *moyen* vertical de son levier n'est plus que le tiers de la hauteur de la section rectangle.

Mariotte plaçait déjà cet axe ou cette *ligne des fibres invariables* au milieu de la hauteur, en considérant, comme on fait aujourd'hui, des fibres étendues au-dessus et des fibres comprimées au-dessous. Mais se trompant, ensuite, quant aux conséquences, d'une manière singulière qui revient à doubler en même temps un bras de levier et une force pour doubler leur produit [1], il trouve pour le moment des résistances « la même chose que si toutes les parties s'étendaient » ou que si l'axe de rotation était au bas.

On s'étonne de voir, vingt ans plus tard, Jacques Bernoulli commettre précisément la même méprise du simple au double [2] et affirmer que la position attribuée à l'axe de rotation est tout à fait indifférente, même lorsque les forces sont des fonctions quelconques des extensions ou compressions. C'est que n'apercevant pas encore, comme Coulomb, le principe de nullité de la somme des actions intérieures horizontales, il cherche à échapper par un raisonnement, qui se trouve être faux, à la nécessité de déterminer d'abord la position de cet axe (Voyez ci-après note du n° 151).

[1] *Traité* (posthume) *du Mouvement des eaux*, 1684, 5e partie, second discours, 13e alinéa.

[2] *Véritable hypothèse de la résistance des solides*, avec la Démonstration de la courbure des ressorts, lemme 4 (Académie des sciences, 1705 ; ou *Jacobi Bernoullii opera omnia*, t. II, p. 976).

Remarque sur la théorie de la résistance à la rupture.

151. La théorie présentée dans les nos 112 et suivants est fondée sur l'hypothèse que les fibres longitudinales, à l'instant de la rupture, offrent des résistances proportionnelles aux extensions et contractions de ces fibres, et qui sont égales pour des extensions et contractions égales. La situation de l'axe d'équilibre est déterminée par la condition énoncée nos 77 et 78, en sorte que cet axe est au milieu de la hauteur de la section, quand la section peut être partagée dans sa hauteur en deux parties symétriques, comme cela a lieu pour le rectangle et le cercle.

Si cette hypothèse était exactement conforme aux effets naturels, les valeurs de la constante R déduites, au moyen des formules précédentes, des expériences sur la rupture rapportées dans les nos 94 et suivants, ne différeraient point des résultats obtenus par les expériences directes sur la rupture des corps produite par extension ou par écrasement. Lorsque cet accord n'a pas lieu, on doit l'attribuer à ce que les fibres des corps n'opposant pas, quand la rupture vient à s'opérer, des résistances égales à l'extension et à la compression, l'axe d'équilibre change de situation, en sorte que les expressions du moment de rupture ne s'accordent pas avec l'état du solide.

On doit remarquer toutefois, 1° que les principaux résultats obtenus précédemment n'en sont pas moins vrais; en sorte que les résistances des bases rectangulaires sont toujours proportionnelles à la largeur et au carré de l'épaisseur, et que les résistances des bases de figures semblables le sont toujours aux cubes des dimensions homologues. Les rapports seuls des résistances pour les bases des diverses figures sont changés. 2° Dans les applications, on n'est point dans le cas de calculer les résistances respectives des corps en les considérant dans l'état qui précède la rupture : on les considère, au contraire, comme on le verra dans la suite, lorsqu'ils n'ont pu prendre encore qu'une légère

flexion, qui n'en a point altéré l'élasticité; et les résultats précédents conviennent alors sensiblement à la manière dont la résistance s'exerce (*).

(*) § 1. *Proportionnalité des résistances aux largeurs et aux carrés des hauteurs des sections semblables ou seulement transformables les unes dans les autres en réduisant ou amplifiant dans une même proportion leurs ordonnées ou leurs abscisses.* — La dernière remarque (2°) de Navier, très-importante, nous a servi précédemment (note du n° 113, §§ 2, 3, 4, 12) à la justification de toutes les formules de résistance à la *rupture éloignée*, posées avec R_0 au lieu de R.

Mais considérons maintenant ce qui a lieu pour la rupture *immédiate* ou prochaine.

Ce qu'il dit à la remarque (1°), à savoir « que les résistances sont toujours proportionnelles à la largeur et au carré de l'épaisseur » est vrai non-seulement pour les sections rectangulaires comparées, mais encore, plus généralement (comme on va voir) pour les diverses sections qui, comme les ellipses, etc., sont ramenées les unes aux autres lorsqu'on amplifie ou qu'on réduit dans un même rapport, ou toutes les abscisses, ou toutes les ordonnées, ou à la fois les unes et les autres supposées parallèles et perpendiculaires à la ligne finale des fibres invariables; et, cela, quelles que soient les expressions inconnues des efforts de tension et de pression des fibres en fonction de leurs dilatations et contractions; pourvu toutefois que ces dilatations et contractions soient encore, à l'instant de la rupture, *proportionnelles aux distances à cette ligne neutre*, traversée *alors* par les fibres dont la longueur est restée ou *est redevenue* la même qu'avant la flexion, comme si les sections voisines étaient demeurées planes ou s'étaient changées en une même surface peu courbe (§ 4 de la note du n° 80).

En effet, soient

φ et ψ les indices des fonctions des dilatations et contractions qui expriment les grandeurs des tensions ou pressions des fibres;

Et soient, *pour l'instant de la rupture :*

(Du n° 151).

v et v_1 les distances, à la ligne neutre (quelle que soit alors la situation de cette ligne), d'une fibre étendue et d'une fibre comprimée quelconques;

v' et v'_1 les plus grandes valeurs de v et v_1;

i' la dilatation de la fibre la plus étendue, ou de la fibre à la distance v';

U et U_1 les largeurs de la section aux distances v, v_1.

La dilatation et la contraction des deux fibres quelconques à ces distances de la ligne neutre seront

$$i'\frac{v}{v'} \quad \text{et} \quad i'\frac{v_1}{v'}.$$

On aura donc, M étant le moment des forces extérieures autour de cette ligne, les deux équations suivantes d'équilibre de translation longitudinale et de rotation

$$\int_0^{v'} U dv\ \varphi\left(i'\frac{v}{v'}\right) = \int_0^{v'_1} U_1 dv_1\ \psi\left(i'\frac{v_1}{v'}\right)$$

$$M = \int_0^{v'} U v dv\ \varphi\left(i'\frac{v}{v'}\right) + \int_0^{v'_1} U_1 v_1 dv_1\ \psi\left(i'\frac{v_1}{v'}\right).$$

Or si, dans la première équation, m et n étant deux nombres quelconques, nous remplaçons U, U_1 par mU, mU_1, et v, v', v_1, v'_1 dv, dv_1 par nv, nv', nv_1, nv'_1, ndv, ndv_1 sans changer la dilatation-limite i' qui ne dépend que de la matière, elle sera encore satisfaite, car les fonctions φ, ψ auront conservé les mêmes grandeurs pour les ordonnées nv, nv_1 qu'elles avaient pour celles v, v_1; ce qui montre déjà que lorsqu'on remplace une section par une autre dont les abscisses soient celles de la première multipliées par m et dont les ordonnées soient celles de la première multipliées par n, la ligne neutre y occupe, à l'instant où la dilatation i' infiniment peu dépassée détermine la rupture, une situation homologue à celle où elle était, ou telle que le rapport de ses distances à la fibre la plus étendue et à la fibre la plus contractée est toujours le rapport primitif de v' à v'_1.

Il en résulte qu'en faisant, dans le second membre de la deuxième équation, la même transformation, il exprimera la somme des mo-

(Du n° 151).

ments des forces intérieures à l'instant de la rupture du prisme ayant la nouvelle section, comme il l'exprimait pour le prisme ayant la section primitive. Or, M' étant le nouveau moment, on aura, en divisant la nouvelle équation par l'ancienne,

$$\frac{M'}{M} = mn^2.$$

Donc les résistances de ces deux prismes, ou les moments capables de produire leur rupture immédiate par flexion, sont bien proportionnelles aux largeurs et aux carrés des hauteurs des sections.

§ 2. *Formules pour le calcul approximatif des résistances à la rupture immédiate ou prochaine, principalement quand les sections sont rectangles* — Pour calculer les grandeurs de ces résistances en fonction du coefficient R de rupture par traction (ou du coefficient R' d'écrasement) il serait nécessaire, comme on a déjà dit au § 4 de la note du n° 113, de connaître complétement la forme des fonctions que nous venons de désigner par φ et par ψ.

A défaut de cette connaissance, on peut substituer des expressions empiriques simples satisfaisant à peu près à ce qu'on sait de ces fonctions.

Dès 1702 Varignon a considéré [1] une variation non linéaire de la tension d'une fibre à l'autre, mais sans faire d'hypothèse sur sa loi. Jacques Bernoulli dans son mémoire déjà cité, de 1705 (Véritable hypothèse, etc.), avance que « la compression d'une fibre croît nécessairement dans un moindre rapport que le poids comprimant » parce qu'autrement la fibre finirait « par être comprimée plus que de toute sa longueur » ce qui est absurde, et il admet « qu'il en doit être de même de l'extension parce qu'elle n'est qu'une *compression négative.* » Aussi, et eu égard à ce qu'il regarde le résultat comme le même (note ci-dessus du n° 150) que si l'axe de rotation était placé au bas de la section ou qu'il n'y eût que des extensions, arrive-t-il, pour un prisme rectangulaire d'une matière dont R est la résistance à la rupture par traction pour l'unité de superficie de sa base $b \times c$, à un moment de rupture par flexion

[1] *De la Résistance des solides pour tout ce qu'on peut faire d'hypothèses touchant la force ou la ténacité des fibres*, etc. (Académie des sciences, 1702).

Du n° 151).

moindre que $R\frac{bc^2}{3}$, ce qui lui fait croire sa théorie confirmée par quelques expériences de Mariotte qui ont donné 1/4 à 1/3 de Rbc^2 pour des barres de bois et des tiges de verre.

Mais cette confirmation apparente résulte d'une compensation de l'erreur que nous avons signalée à la fin de la note du n° 150, avec l'erreur de l'hypothèse sur la loi de variation des compressions ou extensions d'une fibre sous divers efforts, car les expériences faites depuis vingt-cinq ans surtout ont prouvé (§ 8 de la note du n° 21) *que ces compressions ou extensions croissent plus rapidement que les efforts qui les produisent*, contrairement à ce que suppose Bernoulli, depuis l'instant où elles commencent à avoir une partie permanente jusqu'à celui de l'écrasement ou de la séparation.

Aussi M. Hodgkinson [1] a-t-il donné un calcul où les efforts d'extension p et de compression p_1 sont représentés, pour les fibres, aux distances v, v_1 de la ligne neutre, par des formules qui sont susceptibles d'être écrites ainsi, m et m_1 étant des exposants numériques plus grands que 1, R et R_1 les efforts d'extension et de compression à une même distance v' de la ligne neutre, et N, N_1 deux constantes positives, aussi > 1 (et qui sont celles qu'il appelle n, n', divisées respectivement par v'^{m-2}, v'^{m_1-2})

$$p = R\,\frac{N\frac{v}{v'} - \left(\frac{v}{v'}\right)^m}{N-1},\quad p_1 = R_1\,\frac{N_1\frac{v_1}{v'} - \left(\frac{v_1}{v'}\right)^{m_1}}{N_1-1},$$

formules où il fait surtout la supposition $m = m_1 = 2$.

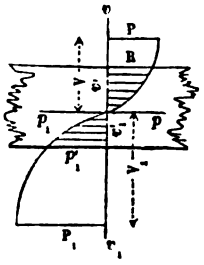
Nous préférons employer les formules suivantes :

$$(1)\quad p = P\left[1 - \left(1 - \frac{v}{V}\right)^m\right],\ p_1 = P_1\left[1 - \left(1 - \frac{v_1}{V_1}\right)^{m_1}\right]$$

où p, p_1 représentent toujours l'effort d'extension et l'effort de

[1] *Experimental researches*, etc., 1846, au chapitre (nos 189 et suivants, non traduit par M. Pirel) intitulé *Theoretical inquiry with regard to the strength of Beams.*

(Du n° 151).

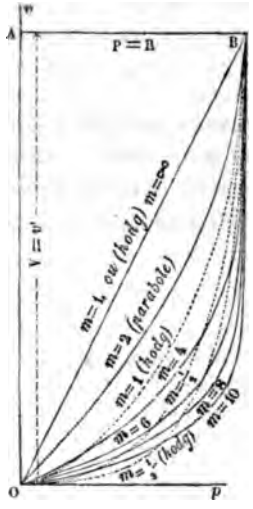


compression de deux fibres aux distances quelconques v, v_1 de la ligne neutre, pour l'unité superficielle de leurs sections,

V, V_1 des grandeurs linéaires égales ou supérieures aux plus grandes valeurs v', v'_1 des distances ou ordonnnées v, v_1,

P, P_1 deux constantes (qui seraient évidemment les valeurs des efforts p, p_1 aux distances V, V_1).

L'épure ci-contre manifeste la raison de notre préférence.



Les courbes pleines sont celles que représente, pour $m = 2, 4, 6, 8, 10$, la première de nos deux formules (1) (à laquelle la seconde est semblable). Elles nous paraissent plus propres à figurer les divers modes de variation qu'on peut supposer aux forces p en fonction des distances v, que les courbes ponctuées, qui sont celles que fournit la formule de M. Hodgkinson quand on y fait $n = m$ (comme nous y serons obligés ci-après afin que la tangente soit verticale ou parallèle aux abscisses v pour $v = v'$), et dans laquelle on voit qu'il faudrait donner surtout à m des valeurs fractionnaires comprises entre 0 et 2, car, pour $m > 2$ on n'aurait que des lignes comprises entre la parabole ordinaire ($m = 2$) et la ligne droite ($m = \infty$), et ne pouvant guère servir; ce qui peut être dit aussi de la ligne $m = 1$ dont l'équation aurait une forme transcendante, car en cherchant la vraie valeur du $\frac{0}{0}$ la première formule Hodgiknson pour $m = n = 1$ devient $p = R\,\frac{v}{v'}\left(1 - \log\frac{v}{v'}\right)$.

Au reste nos formules donnent la même chose que celles de

(Du n° 151).

M. Hodgkinson pour m ou $m_1 = 2$, savoir des expressions de la forme p ou $p_1 = Ai - Bi^2$ (i étant la dilatation ou contraction), forme que l'habile physicien a reconnue satisfaire à peu près aux expériences sur les barres de fonte quand on ne les pousse pas tout à fait jusqu'à la rupture ou à l'écrasement.

Nous aurons d'abord, au moyen des formules que nous adoptons :

Condition de juste résistance (la rupture étant supposée commencer du côté étendu) :

$$p = \mathrm{R} \quad \text{pour} \quad v = v'$$

ou

$$(2)\begin{cases} \mathrm{R} = \mathrm{P}\left[1 - \left(1 - \frac{v'}{\mathrm{V}}\right)^m\right] \\ \text{ou } \frac{\mathrm{R}}{v'} = \frac{m\mathrm{P}}{\mathrm{V}}\left(1 - \frac{m-1}{2}\frac{v'}{\mathrm{V}} + \frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\frac{v'^2}{\mathrm{V}^2} - \ldots\right). \end{cases}$$

Condition pour qu'il y ait raccordement des deux courbes dont les coordonnées sont p et v, p_1 et v_1; ou pour que les faibles valeurs de p, p_1 soient dans une même proportion avec les petites dilatations et avec les petites compressions : $\frac{dp}{dv} = \frac{dp_1}{dv_1}$ pour $v = 0$, $v_1 = 0$, ou

$$(3) \qquad \frac{m\mathrm{P}}{\mathrm{V}} = \frac{m_1\mathrm{P}_1}{\mathrm{V}_1}.$$

Ensuite, en nous bornant désormais aux sections rectangles dont nous appelons b la largeur et c la hauteur :

Condition d'équilibre de translation $\int_0^{v'} p\,dv = \int_0^{v'_1} p_1\,dv_1$, ou

$$(4)\begin{cases} \mathrm{PV}\left\{\frac{v'}{\mathrm{V}} - \frac{1}{m+1}\left[1 - \left(1 - \frac{v'}{\mathrm{V}}\right)^{m+1}\right]\right\} = \mathrm{P}_1\mathrm{V}_1\left\{\frac{v'_1}{\mathrm{V}_1} - \frac{1}{m_1+1}\left[1 - \left(1 - \frac{v'_1}{\mathrm{V}_1}\right)^{m_1+1}\right]\right\} \\ \text{ou} \\ \mathrm{P}\left(\frac{m}{1}\frac{v'^2}{2\mathrm{V}} - \frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{v'^3}{3\mathrm{V}^2} + \frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{3}\frac{v'^4}{4\mathrm{V}^3} - \ldots\right) = \mathrm{P}_1\left(\frac{m_1}{1}\frac{v'^2_1}{2\mathrm{V}_1} - \frac{m_1}{1}\frac{m_1-1}{2}\frac{v}{3}\right. \\ \text{ou, eu égard à (3)} \\ \frac{v'^2}{2} - \frac{m-1}{2}\frac{v'^3}{3\mathrm{V}} + \frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\frac{v'^4}{4\mathrm{V}^2} - \ldots = \frac{v'^2_1}{2} - \frac{m_1-1}{2}\frac{v'^3_1}{3\mathrm{V}_1} + \frac{m_1-1}{2}\frac{m_1-2}{3}\frac{v'_1}{4\mathrm{V}} \end{cases}$$

Condition qui, avec la précédente, servira à déterminer v', v'_1.

(Du n° 151).

(5) $$v_1 + v'_1 = c$$

Condition d'équilibre de rotation : $M = b\int_0^{v'} pvdv + b\int_0^{v'_1} p_1 v_1 dv_1$, ou en substitnant (1) :

$$M = bPV^2\left\{\frac{v'^2}{2V^2} - \frac{1}{m+1}\left[1-\left(1-\frac{v'}{V}\right)^{m+1}\right] + \frac{1}{m+2}\left[1-\left(1-\frac{v'}{V}\right)^{m+2}\right]\right\} +$$
$$- bP_1V_1^2\left\{\frac{v'^2_1}{2V_1^2} - \frac{1}{m_1+1}\left[1-\left(1-\frac{v'_1}{V_1}\right)^{m_1+1}\right] + \frac{1}{m_1+2}\left[1-\left(1-\frac{v'_1}{V_1}\right)^{m_1+2}\right]\right\}$$

ou

$$= bP\left(\frac{m}{1}\frac{v'^3}{3V} - \frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{v'^4}{4V^2} + \frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{3}\frac{v'^5}{5V^3} - \ldots\right) +$$
$$+ bP_1\left(\frac{m_1}{1}\cdot\frac{v'^3_1}{3V_1} - \frac{m_1}{1}\frac{m_1-1}{2}\frac{v'^4_1}{4V_1^2} + \frac{m_1}{1}\frac{m_1-1}{2}\frac{m_1-2}{3}\frac{v'^5_1}{5V_1^3} - \ldots\right)$$

ou, eu égard à (3) et à (2)

$$M = b\frac{R}{v'}\cdot\frac{v'^3\left(\frac{1}{3} - \frac{m-1}{2}\frac{v'}{4V} + \frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\frac{v'^2}{5V^2} - \ldots\right) + v'^3_1\left(\frac{1}{3} - \frac{m_1-1}{2}\frac{v'}{4V_1} + \ldots\right)}{1 - \frac{m-1}{2}\frac{v'}{V} + \frac{m-1}{2}\frac{m-2}{3}\frac{v'^2}{V^2} - \ldots}$$

§ 3. *Particularisations de ces formules. Explication de quelques résultats d'expérience. Limites supérieure et inférieure*, etc.

1° Si l'on fait les exposants $m = m_1 = 1$, les cinq équations de condition se réduisent à

$$\frac{P}{V} = \frac{R}{v'},\ \frac{P_1}{V_1} = \frac{P}{V},\ v'^2_1 = v'^2_1,\ v' = v'_1 = \frac{c}{2},\ M = R\frac{bc^2}{6}.$$

C'est la supposition de variation simplement linéaire, ou de proportionnalité constante des efforts aux dilatations ou contractions comme quand celles-ci restent très-petites; et on retombe sur les formules du texte.

2° Si, en faisant toujours $m = m_1 = 1$, l'on omet la condition de raccordement (3) $\frac{mP}{V} = \frac{m_1P_1}{V_1}$ ou si l'on substitue, approximativement, des variations linéaires aux variations réelles des tensions et des pressions mais suivant deux rapports différents, on a

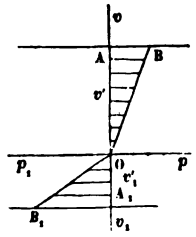
$$\frac{P}{V} = \frac{R}{v'},\ \frac{P}{V}v'^2 = \frac{P_1}{V_1}v'^2_1,\ M = \frac{b}{3}\left(\frac{P}{V}v'^3 + \frac{P_1}{V_1}v'^3_1\right);$$

(Du n° 151).

ou, vu que $v' + v'_1 = c$,

$$M = R\,\frac{bcv'}{3}.$$

Or si c'est, comme on le suppose, du côté des fibres étendues qu'une même force produit plus de changement de longueur, ou si $\frac{P}{V} < \frac{P_1}{V_1}$, on a $v' > v'_1$; ce qu'on aperçoit également, si la ligne verticale AOA_1 représente une coupe de la section rectangulaire par le plan de flexion, en traçant les lignes droites OB, OB_1 dont les abscisses (verticales) sont v et v_1 et dont les ordonnées (horizontales) sont les forces p et p_1 correspondantes; car pour que les aires OAB, OA_1B_1 soient égales, ce qui est la condition de l'équilibre de translation, il faut, puisque $\frac{AB}{AO}$ est moindre que $\frac{A_1B_1}{A_1O}$, que $OA = v'$ soit plus grand que $OA_1 = v'_1$.



Il en résulte qu'on a $v' > \frac{c}{2}$, et que le moment $M = R\,\frac{bcv'}{3}$ des forces à l'instant de la rupture *excède la valeur* $R\,\frac{bc^2}{6}$ *donnée par la théorie ordinaire.*

De même si la rupture commence du côté des fibres comprimées, le moment M excède $R'\frac{bc^2}{6}$, R' étant la résistance à l'écrasement de l'unité superficielle.

On voit déjà que *l'inégalité des résistances des fibres à l'extension et à la compression*, ces deux résistances étant assimilées empiriquement à deux fonctions linéaires, *rend la résistance à la rupture par flexion supérieure à ce qu'on trouve quand on suppose ces deux résistances égales.*

3° Mais la *non-linéarité*, ou l'accroissement des forces dans un rapport moindre que celui des changements de longueur des fibres *est une seconde cause d'augmentation de la résistance.*

Observons d'abord que lorsque la dilatation d'une fibre a atteint

(Du n° 151).

sa limite, comme une faible augmentation qu'on lui fait subir produit la rupture ou bien fait décroître très-rapidement sa force de tension, il est naturel de regarder la courbe des tensions comme ayant à l'instant de la rupture, pour $v = v'$, sa tangente verticale ou parallèle à l'axe coordonné des v, d'autant plus que cet instant a été précédé d'une énervation graduelle.

Cela revient à supposer $\frac{dp}{dv} = 0$ pour $v = v'$, ou à prendre

$$(7) \qquad V = v', \quad P = R$$

d'où

Condition de raccordement (3) : $m\frac{R}{v'} = m_1\frac{P_1}{V_1}$

1er membre de l'équation (4) d'équilibre de translation : $Rv'\frac{m}{m+1}$

1er terme du 2e membre de l'équation (6) d'équil. de rotation : $bRv'^2\frac{m(m+3)}{2(m+1)(m+2)}$.

4° Or, en supposant d'abord, en outre, $m = m_1$, $P = P_1$, $V = V_1$ ou la loi de variation la même du côté comprimé que du côté étendu, ce qui donne $V = V_1 = v' = v'_1 = \frac{c}{2}$, $P = P_1 = R$, l'expression du moment se réduit à

$$M = R\frac{bc^2}{6} \cdot \frac{3m(m+3)}{2(m+1)(m+2)}$$

qui donne pour $m =$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

$M = R\frac{bc^2}{6}$ multiplié par $1, \frac{5}{4}, \frac{27}{20}, \frac{7}{5}, \frac{10}{7}, \frac{81}{56}, \frac{35}{24}, \frac{22}{15} = 1{,}467$;

en sorte que plus l'exposant m est grand, plus le moment de rupture prochaine excède la valeur $R\frac{bc^2}{6}$ relative à la loi linéaire.

5° En supposant enfin, d'une manière plus rapprochée de ce qui a lieu réellement à l'égard de la fonte de fer surtout, que du côté comprimé les forces croissent à peu près comme les contractions (vu que les fibres de ce côté occuperont une portion de la section plus petite que du côté des fibres étendues et que la courbe des

(Du n° 151).

pressions n'atteindra sa tangente verticale que très-loin au delà de la section), on fera

$$m_1 = 1,\ m \text{ quelconque};$$

ce qui joint à $V = v'$, $P = R$, $v' + v'_1 = c$, donnera

$$\text{Condition de raccordement } \frac{mR}{v'} = \frac{P_1}{V_1};$$

$$\text{Équilibre de translation } \frac{v'^2}{m+1} = \frac{v'^2_1}{2};$$

D'où :

$$v' = \frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{2}+\sqrt{m+1}}\,c, \quad v'_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{m+1}}\,c,$$

$$M = bRv'^2\,\frac{m(m+3)}{2(m+1)(m+2)} + bm\frac{R}{v'}\frac{v'^3_1}{3} = \frac{Rbc^2}{6}\,\frac{m\left(3\frac{m+3}{m+2}+4\sqrt{\frac{2}{m+1}}\right)}{(\sqrt{m+1}+\sqrt{2})^2},$$

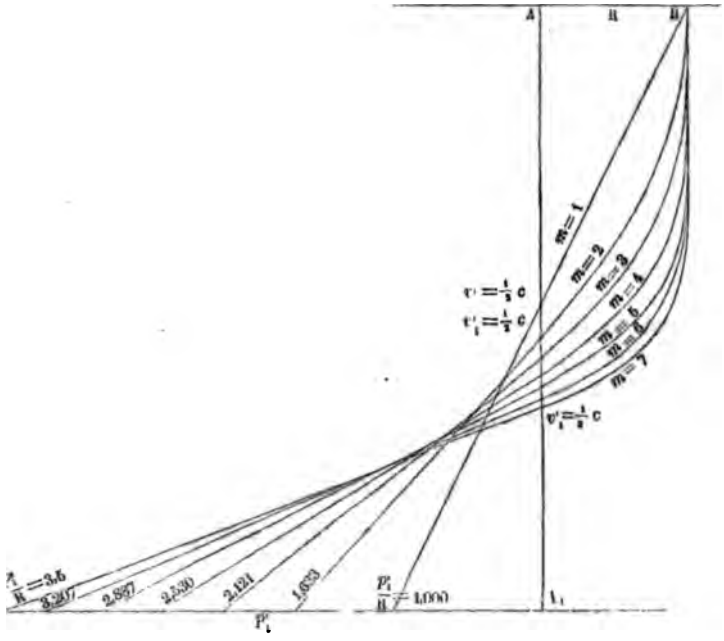
p'_1 (plus grande force de pression, répondant à $v_1 = v'_1$) $= \frac{P_1}{V_1}v'_1 = m\frac{R}{v'}v'_1$.

D'où successivement :

	VALEURS DE				
	$\frac{v'}{v'_1}$	$\frac{v'}{c}$	$\frac{v'_1}{c}$	$\frac{p'_1}{R}$ (Rapport de la plus grande pression à la plus grande tension.)	M (Moment des forces qui font rompre.)
Pour $m=1$	1,0000	0,5000	0,500	1,0000	$R\frac{bc^2}{6}$
2	1,2247	0,5505	0,4495	1,6330	$1,4175\,R\frac{bc^2}{6}$
3	$\sqrt{2}=1,4142$	0,5858	0,4142	2,1213	1,6540
4	1,5811	0,6126	0,3874	2.5298	1,8101
5	1,7321	0,6340	0,3660	2,8868	1,9218
6	1,8708	0,6517	0,3483	3,2071	2,0068
7	2,000	$\frac{2}{3}=0,6667$	$\frac{1}{3}=0,3333$	$\frac{7}{2}=3,5000$	$\frac{56}{27}=2,0741\,R\frac{bc^2}{6}$
$m=\infty$	∞	1	0	∞	$R\frac{bc^2}{2}$

(Du n° 151).

L'épure ci-dessous représente, à droite de la verticale $AA_1 = c$, prise pour axe des v, toutes les *lignes courbes de traction* $p = R\left[1 - \left(1 - \frac{v}{v'}\right)^m\right]$ dont les abscisses (aussi verticales) sont les distances v des diverses fibres étendues à la ligne neutre et dont les ordonnées (horizontales) sont les tractions correspondantes p pour les valeurs $m = 1$ à 7 en sorte que, pour toutes, on a $AB =$ la cohésion R. A gauche elle donne les *lignes de pression* dont les abscisses



comptées de haut en bas sont v_1 et les ordonnées horizontales sont p_1; lignes que nous remplaçons par des droites, vu, comme nous avons dit, que leurs sommets analogues à B seraient fort au-dessous de A_1 pour des matières qui, comme la fonte, les pierres dures, etc, résistent beaucoup plus à la compression qu'à l'extension lorsqu'on approche de la rupture. Ces lignes droites se *rac-*

(Du n° 151).

cordent avec les courbes de traction, ou leur sont tangentes, aux points de passage à travers la verticale AA_1, points qui représentent les diverses projections, sur le plan de la figure, de la ligne *neutre* rencontrant les fibres qui ont conservé ou repris la longueur primitive à l'instant de la rupture (§ précédent), ou qui sont les diverses origines des abscisses v, v_1, et qui se trouvent placées sur AA_1 de manière que les aires triangulaires rectilignes de gauche soient équivalentes aux aires triangulaires curvilignes de droite afin que la condition d'équilibre de translation soit remplie.

Les courbes qui résultent des valeurs les plus fortes de l'exposant m sont assez analogues à celles qui représentent les expériences de traction des fils et des barres métalliques de MM. Bornet, Seguin, Ardant [1].

On voit que,

$$\text{Pour } m = 2{,}35 \text{ environ, l'on a } M = \frac{3}{2} R \frac{bc^2}{6} = R\omega \frac{c}{4},$$

$$\text{Pour } m = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots M = 2R \frac{bc^2}{6} = R\omega \frac{c}{3},$$

résultats qui sont dans les limites des expériences anciennes de Mariotte et de celles plus récentes de MM. Fairbairn, Hodgkinson, Henry James, etc.

La supposition $m = \infty$ *n'est autre chose que l'hypothèse de Galilée*, suivant laquelle la force de résistance des fibres tirées serait constante à l'instant de la rupture du solide, et celle des fibres comprimées serait indéfinie. Le résultat $M = R \frac{bc^2}{2}$ est une limite supérieure.

On voit que le calcul explique comment le moment des forces qui produisent la rupture immédiate des prismes rectangles par flexion, au lieu d'être constamment égale à $\frac{Rbc^2}{6} = R\omega \frac{c}{6}$, où $Rbc = R\omega$ représente la résistance immédiate à la rupture par traction, a une

[1] N° 290 et figure 48 de l'*Introduction à la mécanique industrielle* de M. Poncelet; ou bien n° 9 et fig. 4 de la *Résistance des matériaux* de M. Morin. Voyez aussi plus loin le Complément des art. I à VI.

De la rupture d'un solide prismatique d'une petite longueur.

152. Les notions précédentes, comme on l'a remarqué au n° 79, ne peuvent être appliquées avec exactitude qu'autant que la longueur du solide prismatique est beaucoup plus grande que les dimensions de sa section transversale. C'est effectivement ce qui a lieu dans les cas qui se présentent le plus fréquemment dans les constructions et dont la considération est le plus importante. A l'égard des cas où la longueur du solide surpasse peu les dimensions de la section transversale, ou même est plus petite que ces dimensions, comme ils n'ont pas été suffisamment étudiés par l'expérience, on se bornera à présenter à ce sujet quelques aperçus.

Considérons le solide AM (Fig. 9) encastré horizontalement à une extrémité, et supposons d'abord que le fil auquel est suspendu le poids P soit placé dans le plan de la section A, c'est-à-dire contre la face verticale du corps dans lequel l'extrémité du solide AM est encastré. L'action du poids P ne tendra pas alors à faire fléchir la portion AM du solide ; mais elle tendra à séparer cette portion de celle qui est encastrée, et avant que

---

valeur comprise entre $\frac{Rbc^2}{6}$ donné par Coulomb et $\frac{Rbc^2}{2}$ donné par Galilée.

Mais l'analyse précédente peut faire mieux que de fournir une explication des faits observés. Elle peut prévoir ce qui arrivera dans des cas sur lesquels n'a pas porté l'observation. Ainsi, des expériences de rupture ayant donné $M = n \cdot \frac{Rbc^2}{6}$ pour une pièce à section rectangle, on déduira du tableau précédent la valeur à attribuer à l'exposant m (par exemple $m = 5$ à 6 si $n = 2$ environ comme on a trouvé pour la fonte) ce qui pourra servir à calculer par les formules précédentes la résistance, à la rupture *immédiate* ou prochaine, de pièces de même matière, ayant une section de forme non rectangle. Nous renvoyons plus loin les applications.

cette séparation ne s'opère, les fibres qui unissent les parties prêtes à se disjoindre se seront allongées d'une certaine quantité. Il est naturel d'admettre que l'effort nécessaire pour produire cet allongement soit proportionnel : 1° à l'aire de la section tranversale du solide; 2° à la grandeur de l'allongement dont il s'agit. Par conséquent, si la section transversale est un rectangle dont b représente le côté horizontal et c le côté vertical; et si nous désignons par

δ l'allongement dans le sens vertical (supposé très-petit) des parties du solide placées dans la section transversale A;

D un coefficient constant spécifique représentant la résistance du corps à un glissement d'une partie sur l'autre dans le plan de la section transversale;

l'effort dont il s'agit sera représenté par $D\delta \,.\, bc$. Nous écrirons donc ici pour équation d'équilibre

$$P = D\delta \,.\, bc\,;$$

et nous concevrons que la rupture aura lieu lorsque l'allongement δ aura pris une valeur telle qu'il entraîne la disjonction des parties du corps. Le poids qui causerait la rupture serait donc proportionnel à l'aire de la section transversale (*).

(*) § 1. *De la résistance au glissement relatif des parties d'un solide. Circonstances diverses où elle entre en jeu.* — Ce n° 152 n'existait pas à l'édition de 1826. Navier l'a introduit dans celle de 1833 évidemment pour répondre à l'un des reproches que M. Vicat venait de diriger contre toute la théorie de la résistance des solides, notamment en raison de l'omission de l'espèce de résistance dont il s'agit, qui s'exerce en A et à laquelle il donnait le nom de *force transverse*.

C'est, dit l'illustre ingénieur (1) la résistance « à toute disjonction par le mouvement tangentiel des parties les unes sur les au-

(1) Page 1 des *Recherches* de M. Vicat *sur les phénomènes physiques qui précèdent et accompagnent la rupture et l'affaissement d'une certaine classe de solides. Annales des ponts et chaussées* 1833, deuxième semestre.

(Du n° 152).

tres » ou « à tout effort qui tend à diviser un corps en faisant *glisser*, pour ainsi dire, une de ses parties sur l'autre, sans exercer ni pression, ni tirage hors de la face de rupture. »

L'existence de cette force intérieure signalée par M. Vicat n'avait pas échappé à Coulomb, car, dans son beau mémoire de 1773 (cité au § 3 de la note du n° 3) il dit, à propos de la rupture d'une pièce fléchie « que la formule n'est exacte qu'autant que la force intérieure agissant *dans le plan même des sections* transversales n'influe que très-peu, ce qui est vrai *lorsque la longueur est beaucoup plus grande que l'épaisseur.* » Et un peu plus loin il fait entrer cette force tangentielle dans le calcul, mais seulement pour les massifs de terre, de maçonnerie, etc., en ajoutant qu'on peut par sa considération se rendre compte de la résistance des blocs eux-mêmes à l'écrasement, ce que nous avons discuté à la même note du n° 3.

Th. Young l'avait également aperçue comme résistance à ce qu'il appelait la *détrusion* (l'action de pousser dehors ou de chasser de côté), rangée par lui après l'extension et la compression des solides (1) et qui est produite, dit-il, « lorsqu'un effort transversal agit contiguëment ou tout contre (*close*) de la même manière que les lames d'une paire de ciseaux. » Il faisait consister la solidité (*hardness*) dans cette force d'*adhésion latérale* dont les fluides sont dépourvus, etc.

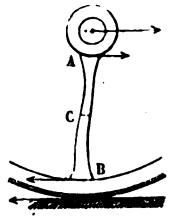
M. Vicat remarque avec raison qu'il y a un grand nombre de circonstances où les pièces solides sont ainsi sollicitées à rompre par glissement parallèle aux faces de rupture. Dans ce cas, dit-il, se trouvent (p. 243 de son mémoire) les tourillons, les tenons, les crochets, ainsi que les goujons (p. 248), les clefs ou clavettes, etc. — Nous pouvons y ajouter les corbeaux, taquets et tasseaux, ergots ou talons, boulons de chaînes plates et de poulies ou de palans, les queues d'hironde et les bouts de pièces moisées ou embrevées, les dents d'engrenage ou d'embrayage, les bagues ou embases, les filets de vis et d'écroux, les *rivets* unissant les plaques de tôle soumises à la traction, et généralement toutes les pièces que des forces

(1) *A course of lectures on natural Philosophy and mechanical Arts.* London, 1807, vol. I, p. 135, lecture XIII (On passive Strength).

(Du n° 152).

transversales tendent à trancher ou à *cisailler* (terme très-expressif employé par M. Love). Il convient d'y joindre les couches de mortier qui unissent les assises des murs de soutènement ou les voussoirs des reins des voûtes.

Les pièces même de charpente d'une certaine longueur, qui sont posées aux deux bouts, et qu'une force appliquée au milieu fait fléchir, ont, tout auprès des points d'appui, une tendance à rompre par glissement, dont il faut tenir compte quand on calcule leur profil d'égale résistance (voy. ci-après § 9 de la note du n° 154). Quelquefois c'est au milieu des pièces et non à leurs extrémités que s'exerce surtout cette tendance au glissement transversal, comme il arrive aux rayons ou bras ACB de roues de voitures ou de machines qui, en transmettant le mouvement du moyeu A aux jantes B, s'infléchissent de part et d'autre en sens opposé à partir du milieu C, où il n'y a que glissement sans flexion [1].



Nous montrerons aussi, bientôt (art. V, note du n° 156), que la *torsion* n'est autre chose qu'un certain *glissement inégal* des parties, sur les divers éléments des sections transversales des pièces, de même que la *flexion* est ramenable (n° 77) à des extensions ou compressions variables d'une fibre à l'autre. C'est ce qu'avait remarqué Young, qui faisait consister surtout la torsion dans un déplacement latéral (détrusion) des côtés opposés d'un prisme dans des directions aussi opposées.

Enfin la résistance au glissement s'exerce non-seulement dans un sens transversal aux pièces mais aussi dans un sens longitudinal, car tout effort qui tend à faire glisser les *sections* les unes devant les autres tend aussi, comme nous verrons, à faire glisser les *fibres* les unes contre les autres. Ces deux glissements sont même insé-

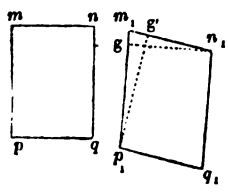
[1] Cette ingénieuse remarque a été faite par M. Poncelet à la Faculté des sciences, dans ses leçons de 1840, où il a cité avec bienveillance ce que nous avions dit, dans un cours lithographié (1837-1838), de la résistance au glissement en général, et de sa mise en ligne de compte lorsqu'elle se compose avec les résistances à l'extension et à la flexion dans un même endroit (ci-après note du n° 154).

(Du n° 152).

parables. Et c'est à quoi on peut attribuer souvent la fente longitudinale des bois et autres corps fibreux.

§ 2. *Observation sur la manière dont la résistance au glissement est estimée aux* n°s 152 à 155 *du texte.* — Dans ce que dit ici Navier et qui a été évidemment improvisé, on voit qu'il envisage le glissement relatif des deux portions d'un prisme situées de part et d'autre d'une de ses sections transversales supposées verticales, comme dû à de certains allongements verticaux de fibres horizontales qu'il ne définit pas, quoiqu'il les regarde, au n° 154, comme susceptibles de se composer, à la manière des forces ou des petits déplacements rectangulaires, avec les allongements horizontaux dus à la flexion. Mais les deux notes ajoutées par lui, aussi en 1833, au n° 159 relatif à la torsion, et au n° 167 relatif à la rupture par torsion (voy. ci-après) prouvent, par leurs conclusions relatives aux valeurs des coefficients numériques, qu'il envisageait quelquefois les choses d'une autre manière, en rapport avec ce que nous allons en dire en l'appliquant au glissement sans torsion.

§ 3. *Définition et mesure du glissement des lignes matérielles les unes devant les autres, ou* sur *ces lignes. Il a toujours lieu simultanément et également des deux directions rectangulaires.* — Dans un corps élastique dont les particules éprouvent des déplacements relatifs très-petits, variant de l'une à l'autre avec *continuité*, les très-petites lignes droites parallèles et peu distantes peuvent être regardées comme restant droites et parallèles. Soit donc $mnqp$ un petit rectangle matériel, et $m_1n_1q_1p_1$ le parallélogramme très-peu obliquangle dans lequel il s'est changé; si g est le pied de la perpendiculaire abaissée de n_1 sur m_1p_1, le côté nq a *glissé* de m_1g devant le côté parallèle mp. Rapporté à l'unité de distance des côtés, ce glissement est $\frac{m_1g}{m_1n_1}$, quotient qui peut être regardé comme indépendant de la distance elle-même tant que cette distance reste très-petite, en vertu de la *continuité* supposée, ou de ce que les autres



côtés mn, pq restent sensiblement droits; en sorte qu'on peut le prendre pour mesure du glissement de la matière du corps sur la ligne mp, dans le plan nmp.

En même temps, si g' est le pied de la perpendiculaire p_1g' sur m_1n_1, le glissement sur le côté adjacent mn, rapporté aussi à l'unité de sa distance à pq est $\frac{m_1g'}{m_1p_1}$; quotient égal au premier $\frac{m_1g}{m_1n_1}$ qui mesure le glissement sur mp.

Nous appelerons donc généralement :

Glissement de la matière d'un corps solide sur l'une ou l'autre de deux petites droites matérielles primitivement rectangulaires qui se coupent, et dans le plan qu'elles font ensemble, la projection actuelle, sur chacune, de l'unité de longueur portée dans la direction de l'autre.

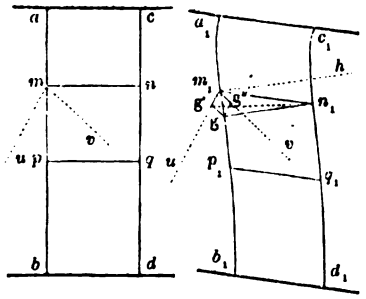
Et nous dirons qu'il est la même chose que le *glissement relatif* des droites parallèles à chacune, prises dans le même plan et à de très-petites distances.

Il revient, *en grandeur*, au cosinus de l'angle $n_1m_1p_1$ devenu légèrement aigu, ou au sinus de la diminution éprouvée par cet angle primitivement droit. Il est sensiblement égal *à ce petit rétrécissement angulaire lui-même*, mesuré en arc d'un rayon égal à l'unité, ou bien à la *petite inclinaison* acquise par chacune des deux droites m_1n_1, n_1p_1 sur la normale à l'autre, ou encore *par la normale ancienne sur la normale nouvelle à l'une d'elles*, dans ce même plan.

§ 4. *Glissements sur une face ou sur les droites qui sont tracées, et dans les plans normaux à cette face plane; ou glissements divers sur la droite qui lui est normale. Leur maximum*, ou glissement principal *sur cette droite normale ou sur cette face.* — Soit mp une petite face plane qui sera par exemple un des éléments d'une section transversale $ampb$ d'un prisme, devenue $a_1m_1p_1b_1$ par suite des déplacements de ses points. Si m_1n_1 et m_1u représentent ce que sont devenues la normale mn à cette face et une ligne quelconque mu tracée dans son plan, comme ces deux lignes primitivement perpendiculaires sont généralement devenues légèrement obliques l'une à l'autre, si l'on prend m_1n_1 pour unité de longueur, la pro-

(Du n° 152).

jection m_1g' de m_1n_1 sur m_1u représentera (§ précédent) le glissement sur mu et sur la normale mn dans leur plan nmu.



Nous l'appellerons quelquefois *glissement sur la face dans le sens* mu.

C'est, en effet, la quantité dont deux éléments correspondants nq, mp de deux faces parallèles et très-voisines ont glissé l'un devant l'autre, estimée dans ce sens et rapportée à l'unité de leur distance.

Nous appellerons *glissement principal* celui m_1g qui a lieu suivant m_1p_1, projection actuelle, sur la face, de la ligne m_1n_1 qui lui était primitivement normale.

C'est *la projection, sur la face, de l'unité de longueur portée sur cette normale ancienne.* Il est le plus grand parmi tous les glissements tels que m_1g' qui ont lieu sur la face ou sur ses lignes génératrices m_1u, ou, ce qui revient au même, *parmi les divers glissements sur une même droite mn* qui est la normale à cette même face, dans les divers plans qui la comprennent. En effet m_1g' est aussi la projection de m_1g sur m_1u.

En sorte que si l'on appelle :

g le glissement principal m_1g sur la face ou sur sa normale;

g', g'' les glissements m_1g', m_1g'' dans des plans nmu, nmv primitivement perpendiculaires entre eux ainsi qu'à la face, et suivant leurs intersections rectangulaires mu, mv avec celles-ci, ainsi que suivant leur intersection commune mn;

α l'angle ump que la première intersection mu fait avec la droite mp suivant laquelle se projette sur la face, après les déplacements, la ligne mn qui lui était normale;

on aura

$$g' = g \cos \alpha, \quad g'' = g \sin \alpha,$$
$$g = \sqrt{g'^2 + g''^2}.$$

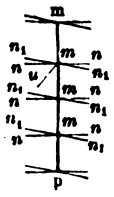
Le glissement principal est *résultant* géométrique de deux glisse-

(Du n° **152**).

ments dans des plans ou suivant des lignes à angle droit. Il mesure le *glissement relatif* des éléments superficiels correspondants mp, nq de sections ou faces parallèles très-voisines ab, cd devenues a_1b_1, c_1d_1.

Le plan du glissement principal est aussi celui qui passe, après les déplacements, par la droite tangente à la normale ancienne m_1n_1 à une face et par sa normale nouvelle m_1h.

§ 5. *Efforts tangentiels. Ils sont proportionnels à la fois aux glissements dans leur sens et aux surfaces. Coefficient d'élasticité de glissement.* — Si, sur une portion finie $mp = \omega$ d'une *section* ou autre surface plane imaginée à l'intérieur d'un solide homogène, toutes les petites normales matérielles nmn sont supposées s'incliner, en devenant n_1mn_1, d'un même petit angle $n_1mn = g$ et dans le même sens qui sera, d'après les définitions du § précédent, celui du *glissement principal* mesuré par g, les écartements et rapprochements qui en résulteront entre molécules très-proches, situées de part et d'autre de la surface ω, développeront des actions dont les résultantes partielles seront les mêmes à travers tous les éléments superficiels égaux $d\omega$ de cette face.



D'où il suit que la *résultante générale de ces actions, provoquée par un glissement principal constant* g sur cette face, *sera proportionnelle à la superficie* ω.

Cette résultante ou action totale sera aussi proportionnelle à g en vertu du principe général de proportionnalité des efforts à leurs effets très-petits, du § 2 de la note du n° 21, puisque nous supposons que cette petite inclinaison des fibres sur la face ω est la seule modification qui rapproche ou écarte les molécules situées à de petites distances de part et d'autre de ω.

On aura donc en appelant :

P la résultante, décomposée (au besoin) tangentiellement à la face ω ou projetée sur son plan

G un coefficient constant dépendant de la matière du prisme,

$$P = G\omega g.$$

(Du n° 152).

De plus, la force tangentielle P aura, sur la face ω, la même direction que le glissement principal g si la matière est d'égale contexture *en tous les sens transversaux* ou parallèles à cette face, car il n'y a pas de raison pour que la résultante se dirige à droite plutôt qu'à gauche du plan dans lequel s'incline la petite normale *mn* qu'elle rencontre sur la face.

Si donc nous appelons :

g' le glissement sur la face, suivant une droite quelconque *mu* qui y est tracée, ou le glissement sur cette droite et sur la normale *mn* dans leur plan *nmu*;

P' la résultante des actions moléculaires, décomposée parallèlement à cette droite *mu*;

α l'angle p*mu*;

Il y aura le même rapport entre g' et g qu'entre P' et P et l'on aura

$$P' = G\omega g'.$$

On voit que l'effort tangentiel, estimé suivant une droite quelconque tracée sur la face ω où il s'exerce, est égale au produit de la constante G par l'aire ω et par le glissement suivant cette droite.

Cette constante G est ce que nous appellerons le *coefficient d'élasticité de glissement.*

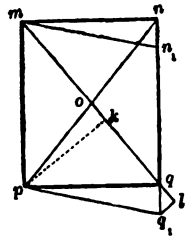
C'est le rapport de l'effort tangentiel $\frac{P'}{\omega}$ exercé dans un sens quelconque par unité superficielle au glissement sur la face dans ce sens.

Les expressions $P = G\omega g$, $P' = G\omega g'$ des efforts tangentiels subsistent lorsqu'il y a, outre les glissements, des dilatations dans des sens perpendiculaires ou parallèles à la face ω si la contexture est toujours supposée la même en tous sens au moins autour de ses normales, et symétrique par rapport au plan de ω ; car, alors, les dilatations n'influent pas sur les résultantes d'actions moléculaires décomposées tangentiellement; comme il est facile de s'en convaincre.

§ 6. *La résistance à un glissement peut être regardée comme une résistance à une dilatation et à une contraction simultanées et*

(Du n° 159).

moitié moindres, ayant lieu dans des directions rectangulaires qui font l'une et l'autre un angle demi-droit avec les lignes glissantes. — En effet soient mp, nq les deux petites droites parallèles qui ont glissé l'une devant l'autre de $nn_1 = qq_1$, ou soit $mpqn$ le petit rectangle changé au petit parallélogramme (mpq_1n_1 que nous supposons de même base et de même hauteur afin de simplifier en abstrayant les dilatations des côtés ainsi que les déplacements généraux dans l'espace). Dans ce changement, le point q s'est éloigné du point m, et le point n s'est rapproché du point p. Les deux diagonales mq, pn se sont donc, la première dilatée, la seconde contractée. Abaissons pk perpendiculaire sur la première mq, et q_1l sur son prolongement ql. Et soient :



$i = \frac{ql}{mq}$ la *dilatation* ou la proportion de l'extension de cette diagonale mp,

$g = \frac{qq_1}{pq}$ le glissement (d'après la définition § 3).

Les deux triangles semblables lqq_1, kpq donnent la proportion $\frac{ql}{pk} = \frac{qq_1}{pq}$, d'où $\frac{ql}{mq} = \frac{qq_1}{pq} \cdot \frac{pk}{mq}$, ou

$$i = g\,\frac{pk}{mq}.$$

Mais le rapport $\frac{pk}{mq}$ de la hauteur à l'hypoténuse du triangle rectangle mpq est le plus grand possible lorsque la perpendiculaire pk se confond avec la demi-diagonale po du rectangle double, et la valeur de ce rapport est alors égale à 1/2. C'est donc pour $pq = pm$, ou dans une direction mq prise à 45 degrés que le glissement produit la plus grande dilatation. Et cette dilatation est

$$i = \frac{g}{2},$$

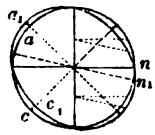
ou la moitié du glissement.

(Du n° 152).

La plus grande contraction de pn, deuxième diagonale, a lieu aussi quand elle est inclinée d'un demi-droit et elle a la même grandeur $\frac{g}{2}$.

Tout glissement équivaut donc à une dilatation et à une contraction moitié moindres, suivant des directions faisant dans son plan un angle demi-droit avec les lignes ou les faces sur lesquelles il a eu lieu.

La résistance au glissement peut être regardée comme une résistance à cette dilatation et à cette contraction obliques. C'est, si l'on veut, la résistance à la transformation de petits carrés en losanges et de petits cercles matériels anc en ellipses $a_1n_1c_1$ par l'extension d'une des diagonales ou d'un des diamètres à 45 degrés et la contraction de l'autre.



Réciproquement une dilatation dans un sens quelconque, avec ou sans contraction dans des sens à angle droit, en allongeant ou accourcissant les côtés de petits rectangles formés par des lignes parallèles et perpendiculaires à ce sens, change en parallélogrammes les petits rectangles dont les côtés y sont inclinés, et produit par conséquent des glissements; excepté dans le seul cas où il y aurait la même dilatation ou contraction dans toutes les directions.

§ 7. *Limite des glissements déduite de la limite des extensions, dans les solides d'égale contexture en tous sens. Limite des efforts tangentiels.* — Il suit de là que si l'on peut faire supporter à une pièce solide d'une manière permanente, sans danger d'énervation et de rupture même éloignée, des tractions longitudinales capables de l'étendre dans une proportion désignée (§§ 12 de la note du n° 21 et 10 de la note du n° 113) par

$$i' = \frac{R_0}{E},$$

et si l'on suppose sa matière telle que, dans tous les sens, cette limite des extensions dangereuses soit la même que dans le sens longitudinal, on peut, aussi sans danger, faire glisser les uns devant

les autres les éléments de ses sections ou de ses fibres de quantités dont le quotient par leurs distances n'excède pas une proportion double, ce qui donne pour la limite des glissements

$$g' = 2i' = 2\frac{R_0}{E};$$

expression dans laquelle E représente le coefficient d'élasticité d'*extension* et R_0 la limite des tractions non dangereuses de cette matière d'égale contexture en tous sens, pour l'unité de la section transversale d'un petit prisme qui en serait extrait.

Si donc nous appelons

T l'effort tangentiel capable de rompre immédiatement par glissement ;

Et, aussi par unité superficielle :

T_0 la limite des efforts tangentiels qui peuvent être supportés sans danger pendant un temps indéfini ;

Cette dernière force T_0 s'obtiendra en mettant pour le glissement g dans l'expression (§ 5) Gg de l'effort tangentiel par unité de surface, la limite g' des glissements non dangereux dont nous venons de donner la valeur $= 2i' = 2\frac{R_0}{E}$; car, en deçà de cette limite très-resserrée, les efforts en général n'ont pas encore cessé d'être proportionnels aux effets (§ 2 de la note du n° 21). Nous aurons donc

$$T_0 = 2Gi' = 2G\frac{R_0}{E}, \quad \text{ou} \quad \frac{T_0}{R_0} = 2\frac{G}{E}.$$

Le rapport des limites des efforts tangentiels et des efforts de traction non dangereux est, ainsi, double du rapport des coefficients d'élasticité de glissement et d'extension, dans les matières *isotropes* ou d'égale contexture en tous sens.

Le rapport $\frac{T}{R}$, seul déterminable directement par expérience, des efforts produisant *la rupture immédiate* par glissement et par extension, peut en différer beaucoup. Aussi, pour avoir $\frac{T_0}{R_0}$, nous allons déterminer $\frac{G}{E}$ au moyen de considérations de statique moléculaire.

Du n° 152).

§ 8. *Détermination théorique, pour les matières d'égale contexture* 1° *Du rapport* $\frac{G}{E}$ *des coefficients d'élasticité de glissement et d'extension;* 2° *du rapport* η (§ 5 *de la note du n°* 21) *des contractions transversales des prismes aux dilatations longitudinales qui les provoquent quand les faces ne sont pas pressées latéralement.* — C'est, comme a dit Navier, au n° 1, « par le jeu des forces d'attraction et de répulsion mutuelle des molécules des corps qu'on rend raison des phénomènes de l'élasticité. » La pression ou tension intérieure résultant de l'action totale d'une portion d'un corps élastique sur une autre portion qui en est séparée par une petite face plane telle qu'un élément *ab* (figure ci-dessous) d'une de ses sections, n'est, ainsi, autre chose que la résultante de toutes les forces moléculaires qui s'exercent d'un côté à l'autre à travers la superficie de cet élément. Or soient

M le centre de ce petit plan, qu'on peut supposer (pour fixer les idées) limité par un cercle;

ω sa surface;

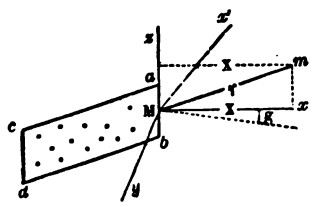
r la distance Mm de son centre M à une molécule quelconque m située à droite;

x la distance de m au petit plan prolongé au besoin;

R l'intensité de l'action de deux molécules du corps à la distance et dans la direction r;

n le nombre des molécules contenues dans l'unité de volume du même corps aux environs de M.

Pour avoir la résultante générale des actions moléculaires à travers ω, additionnons d'abord toutes celles qui s'exercent à des distances égales et parallèles à M$m = r$. Les molécules de gauche dont elles émanent sont toutes contenues dans un cylindre oblique *abdc* dont la base est ω et dont les arêtes sont égales et parallèles à r, en sorte qu'il y a un nombre $n\omega$x de ces molécules. La somme de toutes ces actions parallèles et égales est



(Du n° 152).

$$n\omega x \,.\, R.$$

Décomposée normalement à la face ω, cette somme ou résultante partielle aura pour intensité

$$n\omega R\, x \frac{x}{r}$$

On peut donc représenter la résultante générale, ou l'action moléculaire totale à travers ω, ainsi décomposée normalement, par

$$n\omega S\, R \frac{x^2}{r},$$

la somme S s'étendant aux valeurs de $r = Mm$ relatives à toutes les molécules m situées du côté droit pour lesquelles $R \frac{x^2}{r}$ ne se réduit pas à une grandeur insensible, vu le décroissement rapide de R quand la distance augmente.

Si on appelle p_{xx} cette même résultante rapportée à l'unité superficielle de la face ω, on a

$$p_{xx} = nSR \frac{x^2}{r}.$$

Or, appliquons cette expression générale de la pression ou tension estimée normalement, à l'état où se trouve le corps élastique s'il a éprouvé des dilatations très-petites

$$i, \quad i', \quad i''$$

respectivement dans le sens de Mx normal à la face ω, et de deux autres lignes de coordonnées My, Mz perpendiculaires entre elles et à Mx, et par conséquent tracées sur ω. Si nous appelons :

y, z les projections de $Mm = r$ sur My, Mz;

et si, pour simplifier, nous supposons le point M resté immobile ainsi que les axes coordonnés (ce qui n'influe ni sur les écartements ou rapprochements moléculaires ni sur les forces qu'ils développent), le point m aura éprouvé respectivement dans les trois sens x, y, z, des déplacements

$$ix, \quad i'y, \quad i''z,$$

dont les projections sur la direction de Mm, ajoutées ensemble,

(Du n° 152).

donnent pour l'augmentation très-petite δr de longueur de cette ligne $r = \mathrm{M}m$:

$$\delta r = i\mathrm{x}\frac{\mathrm{x}}{r} + i'\mathrm{y}\frac{\mathrm{y}}{r} + i''\mathrm{z}\frac{\mathrm{z}}{r}.$$

Les actions développées par les déplacements, ou les actions moléculaires en sus de celles qui existaient antérieurement et qui se faisaient équilibre, sont proportionnelles à ces augmentations de distance, et se trouvent représentées par $\mathrm{R}'\delta r$ si R' est la dérivée de R par rapport à r. Mettant en conséquence $\mathrm{R}'\delta r$ au lieu de R dans l'expression $p_{xx} = n\mathrm{S}\mathrm{R}\frac{\mathrm{x}^2}{r}$ et faisant $n\frac{\mathrm{R}'}{r^2} = R$, quantité qui dépendra comme R de la grandeur de r et de sa direction, on aura simplement

$$p_{xx} = i\mathrm{S}R\mathrm{x}^4 + i'\mathrm{S}R\mathrm{x}^2\mathrm{y}^2 + i''\mathrm{S}R\mathrm{x}^2\mathrm{z}^2.$$

On obtiendra des expressions analogues pour les actions totales à travers des faces perpendiculaires respectivement aux y et aux z, décomposées perpendiculairement à ces faces; actions que nous appellerons

$$p_{yy} \quad \text{et} \quad p_{zz}.$$

Faisons donc, vu la symétrie que la contexture est supposée avoir en tous sens avant les déplacements

$$\mathrm{S}R\mathrm{x}^4 = \mathrm{S}R\mathrm{y}^4 = \mathrm{S}R\mathrm{z}^4 = \mathrm{A},$$
$$\mathrm{S}R\mathrm{y}^2\mathrm{z}^2 = \mathrm{S}R\mathrm{z}^2\mathrm{x}^2 = \mathrm{S}R\mathrm{x}^2\mathrm{y}^2 = \mathrm{G};$$

nous aurons pour les pressions ou forces élastiques à travers l'unité superficielle des trois faces perpendiculaires aux x, y, z, estimées normalement à ces faces :

$$p_{xx} = \mathrm{A}i + \mathrm{G}(i' + i''), \quad p_{yy} = \mathrm{A}i' + \mathrm{G}(i'' + i), \quad p_{zz} = \mathrm{A}i'' + \mathrm{G}(i + i').$$

Mais les coefficients A, G dépendent l'un de l'autre.

En effet si x' est la projection de $\mathrm{M}m = r$ sur une nouvelle droite $\mathrm{M}x'$, bissectrice de l'angle $z\mathrm{M}x$, la symétrie ou l'égalité de contexture en tous sens exige qu'ont ait encore :

$$\mathrm{A} = \mathrm{S}R\mathrm{x}'^4.$$

(Du n° 152).

Or on a

$$x' = x\sqrt{\frac{1}{2}} + z\sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$x'^4 = \frac{1}{4}(x^4 + 4x^3z + 6x^2z^2 + 4xz^3 + z^4).$$

Substituant dans $\mathrm{S}Rx'^4$ on devra mettre zéro pour les deux sommes dans lesquelles il entre des puissances impaires de x et z, car, en vertu de la même symétrie de contexture moléculaire de part et d'autre des plans coordonnés, ces sommes se composeront de termes égaux deux à deux au signe près. On aura donc simplement

$$A = \frac{1}{4}(2A + 6G),$$

ou

$$A = 3G;$$

en sorte que les formules des pressions ou tensions normales aux trois faces peuvent être écrites :

$$p_{xx} = G(3i + i' + i''),\quad p_{yy} = G(i + 3i' + i''),\quad p_{zz} = G(i + i' + 3i'').$$

Or, supposons qu'il n'y ait de pression ou tension que dans le sens x, ou que

$$p_{yy} = 0,\quad p_{zz} = 0.$$

Il en résultera

$$0 = i + 3i' + i'',\quad 0 = i + i' + 3i'';$$

d'où :

$$i' = i'' = -\frac{1}{4}i.$$

Cela montre bien que lorsque les pressions latérales sont nulles, un prisme d'une matière d'égale contexture éprouve dans les deux sens transversaux des contractions égales au quart de la dilatation longitudinale qu'on lui fait subir ; ou que, η désignant comme à la note du n° 21 le rapport des contractions latérales à cette dilatation longitudinale, on a

$$\eta = \frac{1}{4}.$$

(Du n° 152).

Cherchons maintenant, par les mêmes considérations, le rapport des coefficients d'élasticité de glissement et d'extension.

Si, au lieu de décomposer suivant x, ou normalement à la petite face $ab = \omega$, la somme (page 198)

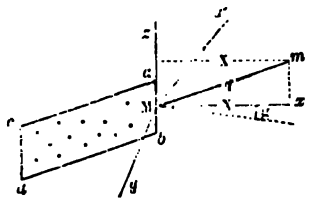
$$n\omega \mathrm{X} \,.\, \mathrm{R}$$

des actions s'exerçant à travers ω à des distances toutes égales et parallèles à $\mathrm{M}m = r$, on les décompose suivant y, on a

$$n\omega \mathrm{R} \frac{\mathrm{XY}}{r};$$

et, en désignant par p_{xy} l'action totale ou pression ainsi décomposée tangentiellement à la face ω à travers laquelle elle s'exerce, pour l'unité superficielle, on obtient

$$p_{xy} = n\mathrm{S}\,\mathrm{R} \frac{\mathrm{XY}}{r}.$$



Or supposons que le corps n'ait éprouvé aucune dilatation dans les sens rectangulaires x, y, z, mais que le plan $z\mathrm{M}x$ et tous ceux qui lui sont parallèles aient tourné autour de leur intersection avec le plan $y\mathrm{M}z$ d'un angle très-petit

$$\mathrm{g}$$

qui sera évidemment un glissement sur les parallèles aux y dans les plans parallèles à $y\mathrm{M}x$.

Dans ce mouvement, le point m, ayant tourné d'un petit arc dont x est le rayon, aura cheminé, dans le sens y, de

$$\mathrm{xg};$$

ce qui, en projetant ce déplacement sur $\mathrm{M}m = r$, aura produit un petit accroissement de r

$$\delta r = \mathrm{xg} \frac{\mathrm{Y}}{r}.$$

On aura donc en mettant comme ci-dessus $\mathrm{R}'\delta r = R \frac{r^2}{n} \delta r$ pour R dans $n\mathrm{S}\,\mathrm{R} \frac{\mathrm{XY}}{r}$

(Du n° 153).

$$p_{xy} = gSRx^2y^2;$$

ce qui montre que le coefficient de g est un de ceux que nous avons désignés tout à l'heure par G, et qu'on a

$$p_{xy} = Gg.$$

Ce *coefficient de glissement* ou d'*élasticité tangentielle* est égal à celui *d'élasticité latérale* qui affecte les dilatations transversales i', i'' dans la formule $p_{xx} = 3Gi + Gi' + Gi''$ de la pression ou tension *longitudinale* p_{xx} d'un prisme d'égale contexture.

Mais, lorsque ce prisme dilaté longitudinalement ou suivant les x dans une proportion i n'éprouve aucune pression latérale, il est, comme on vient de voir, contracté latéralement ou suivant les y et les z dans des proportions $\frac{1}{4}i$ qui, mises pour $-i'$, $-i''$ dans $p_{xx} = G(3i + i' + i'')$ donnent

$$p_{xx} = \frac{5}{2}Gi.$$

Ce qui affecte i, dans le second membre de cette égalité, doit être la valeur du coefficient d'élasticité d'extension E d'après la définition de celui-ci. On a donc :

$$G = \frac{2}{5}E;$$

ou le *coefficient de glissement* égal aux *deux cinquièmes* du coefficient ou module d'extension dans les prismes dont la matière est d'égale contexture en tous sens [1].

Les expériences sur la torsion (voyez ci-après n° 162) n'y contredisent nullement car celles qui ont été faites jusqu'en 1833 ont donné, moyennement, environ $G = \frac{1}{3}E$ pour des matières où cette égalité de contexture n'était qu'approchée.

[1] On trouve à notre *Mémoire sur la flexion* inséré au Journal de M. Liouville en 1856, art. 7 et 9, une autre démonstration simple de l'égalité du coefficient de glissement à celui qui affecte les dilatations transversales dans l'expression de la tension longitudinale, et du rapport $\frac{1}{3} = \frac{G}{A}$ entre ce coefficient G et celui de la dilatation longitudinale. (*V.* Appendices ci-après, p. 559, 565, 580, 647, 805.

Elle ne s'appuie pas sur les expressions ci-dessus $p_{xx} = nSR\frac{x^2}{r}$, $p_{xy} = nSR\frac{xy}{r}$.

(Du n° 152).

§ 9. *Rapport entre la limite* T_0 *des efforts tangentiels et la limite* R_0 *des efforts de traction dans les solides d'égale contexture. Comparaison à l'expérience.* — Si, dans l'égalité obtenue § 7 :

$$\frac{T_0}{R_0} = 2\,\frac{G}{E},$$

nous mettons pour $\frac{G}{E}$ la valeur 2/5, à laquelle nous venons d'arriver par la considération des actions moléculaires dont les résultantes constituent les pressions ou tensions intérieures normales, tangentielles ou obliques aux faces à travers lesquelles elles s'exercent, nous trouvons

$$T_0 = \frac{4}{5}\,R_0$$

pour la relation entre les limites des efforts capables d'être indéfiniment supportés tangentiellement et perpendiculairement par une même face matérielle. Elle a été trouvée (note (*a*) du n° 167 ci-après) par Navier à propos de la torsion, quoiqu'il ne l'ait pas aperçue dans le mode d'action qui fait le sujet des n°s 152 à 155.

On ne doit pas s'attendre à ce que $\frac{T}{R}$ ou le rapport des efforts tangentiels et normaux capables de *rompre immédiatement* soit 4/5 comme $\frac{T_0}{R_0}$. Cependant les expériences de MM. Gouin et Cie ont donné précisément ce rapport 4/5 entre les poids produisant la rupture de petites tringles de fer par cisaillement et par extension, car la moyenne de ceux-là a été 3200 kilogrammes, et, la moyenne de ceux-ci, 4000 kilogrammes par centimètre carré [1].

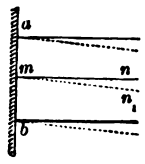
§ 10. *Application de ces principes dans les cas exceptionnels où la section de glissement est astreinte à rester plane.* — Une section *ab* d'un prisme sollicité transversalement doit rester à peu près plane lorsqu'elle est soumise à ce que M. Vicat appelle un *encastrement complet* [2] c'est-à-dire lorsqu'elle n'est pas seulement

[1] *Leçons sur la résistance des matériaux* de M. Morin, 2e édition, 1857, n° 40, page 34.

[2] *Annales des ponts et chaussées* 1833, 2e semestre, pages 243, 232, 247.

contenue, mais *scellée* ou *soudée* avec une matière plus rigide, ou lorsqu'elle se trouve sollicitée parallèlement à son plan par deux forces opposées agissant à une distance extrêmement petite et tendant à trancher comme il arrive pour les sections des rivets dans le plan de contact des tôles qu'ils assemblent. Il y a aussi, comme l'a remarqué M. Vicat, certaines sections qui, sollicitées dans leur plan par une force à laquelle font équilibre deux autres forces extérieures agissant à distance mais symétriquement de part et d'autre, n'ont aucune raison de s'infléchir plutôt à droite qu'à gauche et qui doivent rester planes; comme par exemple la section milieu d'une pièce droite horizontale à laquelle est suspendu un poids à égale distance de ses deux extrémités appuyées.

Sur une de ces sections exceptionnelles, *amb* par exemple, l'inclinaison n_1mn des fibres ou le glissement g peut être regardé comme ayant la même valeur pour tous les éléments $d\omega$, en sorte que si P est la force transversale qui l'engendre, on a (§ 5)



$$g = \frac{P}{G\omega},$$

expression où l'on peut mettre pour G, quand sa détermination n'a pas été l'objet d'expériences (voyez à la torsion) les 2/5 du coefficient d'élasticité E d'extension (§ 8).

Et la plus grande valeur qu'on puisse attribuer sans danger d'une manière permanente à cette force transversale P supposée agir de manière à ne pas produire autre chose que le glissement en cet endroit de la pièce sera

$$P = T_0\omega,$$

la constante T_0 étant déterminée, ou par des expériences directes, ou en la regardant comme égale (§ 9) aux 4/5 de la limite plus connue R_0 des forces d'extension non dangereuses.

Mais le glissement est généralement variable dans l'étendue des sections. *Nous verrons aux deux notes suivantes ce qu'il faut alors faire*, ainsi que dans les cas où il y a à la fois glissement et extension ou flexion.

153. Revenons maintenant à la considération du solide dont la partie à gauche du point A est encastrée fixement, mais dont la partie à droite de ce point est libre, et sollicitée à son intrémité M par le poids P. D'après les remarques faites dans le n° 77, l'équilibre de la partie AM exige que les forces intérieures développées dans la section transversale A par l'action du poids P aient des composantes verticales dont la somme soit égale à ce poids; et il faut de plus que les composantes horizontales de ces mêmes forces fassent équilibre au poids P autour de l'axe horizontal correspondant aux fibres dont la longueur ne varie pas. Nous avons considéré jusqu'ici ce dernier équilibre seul; mais dans le cas dont il s'agit il devient nécessaire de considérer également l'équilibre des forces verticales. Supposons donc ces forces verticales développées dans la section d'une manière conforme à ce qui a été expliqué ci-dessus (ce qui ne peut être bien éloigné de la vérité, surtout lorsque la longueur du solide est fort petite), nous écrirons d'abord l'équation

$$P = D\delta \,.\, bc.$$

Et quant à l'équilibre de rotation, si nous représentons par ρ le rayon du cercle osculateur de la courbe affectée par l'axe longitudinal du solide au point A, nous aurons, conformément à ce qu'on a vu dans l'article précédent, pour exprimer l'équilibre, l'équation

$$Pa = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{bc^3}{12},$$

a désignant toujours la longueur AM, et E ayant la signification indiquée n° 77.

Lorsque le solide supportera sans rompre l'action du poids P, nous regarderons l'équilibre qui s'établit dans la section A comme étant exprimé par ces deux équations. Si la longueur du solide était presque nulle, on considérerait seulement la première. Si cette longueur était fort grande, on considérerait seulement la seconde. Dans les cas intermédiaires on les considérera toutes

deux, et elles donneront respectivement les valeurs des quantités δ et ρ exprimant respectivement le degré d'allongement des parties dans le sens vertical, et le degré de flexion qui a lieu au point d'encastrement A (*).

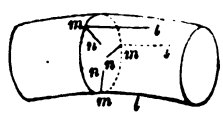
(*) § 1. *Les sections transversales libres de se courber restent normales à la surface du prisme fléchi. Autres théorèmes relatifs au contour des sections.* — Au lieu de « ce degré d'allongement » dont parle encore ici l'auteur sans le définir, les principes de la note du n° précédent vont nous conduire à calculer les *glissements* ou les inclinaisons prises sur les sections par les fibres, et l'augmentation qui en résulte dans la flèche produite par une force ployant en même temps un prisme; augmentation dont la proportion est sensible lorsque le prisme est court.

Les glissements varient en général d'un élément à l'autre des sections transversales primitivement planes, ce qui tient à la courbure ou *au gauchissement qu'elles prennent généralement*, car celles dont nous avons parlé au § 10 de la note du n° précédent, et qui sont empêchées de s'infléchir, ne font qu'une rare exception.

Pour apprécier les circonstances de cette courbure prise par les sections, remarquons d'abord en général que *partout où la surface extérieure d'un corps d'égale élasticité en tous sens est libre, ou n'éprouve que des actions normales* comme la pression de l'atmosphère ou d'un autre fluide en repos, et aucune action tangentielle, il n'y a, par cela seul (§ 5 de la note du n° précédent) aucun glissement sur cette surface. Par conséquent, après la flexion ou autre petite déformation du corps, *les petites lignes matérielles qui étaient primitivement normales à cette surface extérieure lui sont encore normales.*

Il suit de là

1° Que ces lignes normales mn, tracées dans le plan primitif d'une section mmm normale elle-même aux arêtes d'un prisme, restent normales au contour de cette section quelle que soit la petite modification que ce contour a éprouvée; ce qui est d'accord avec ce que nous avons dit au § 3 de la note du n° 80 de la forme du contour après une flexion.



(Du n° 153).

2° Que les sections planes, en se *gauchissant* ou en se changeant en surfaces légèrement courbes, restent normales aux faces latérales, quel que soit le petit changement de forme éprouvé par celles-ci.

3° Que lorsque la surface latérale du prisme a des arêtes saillantes (comme pour les prismes à base rectangle ou polygonale) *les sections infléchies restent normales à ces arêtes devenues courbes.* En effet, elles sont normales à la fois aux deux faces contiguës qui se coupent suivant ces arêtes.

4° Que le glissement principal sur les sections, aux divers points *m*, *m*, *m* de leur contour, ne peut être dirigé que suivant la tangente à ce contour aux mêmes points. Car comme les fibres ou lignes matérielles *ml*, *ml* primitivement perpendiculaires au plan de la section sont restées perpendiculaires aux petites lignes *mn* qui sont tracées sur la section et qui n'ont pas cessé d'être normales au contour *mmm*, ces lignes *ml* devenues légèrement inclinées sur la section ne peuvent s'y projeter que suivant l'élément du contour ou la tangente.

Ces théorèmes sont également vrais, comme il est facile de le prouver, lorsque la contexture de la matière du prisme, symétrique par rapport aux sections, *n'est égale que dans tous les sens transversaux* et est du reste différente dans le sens longitudinal comme il arrive pour les bois et autres corps fibreux.

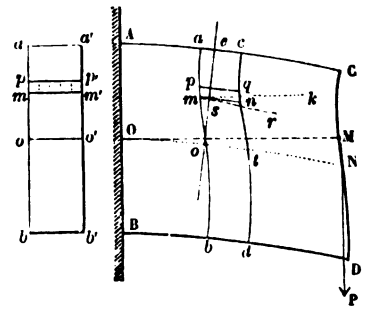
Ils ne peuvent concerner les sections *à encastrement complet* dont il a été question au commencement du § 10 de la note du n° 152, car à leur contour la flexion développe, sur les faces latérales, des résistances tangentielles longitudinales dues au scellement ou à la soudure. Semblable chose peut être dite pour les sections au contour desquelles se trouvent appliquées les forces extérieures isolées (comme pour la section des rivets dans le plan des tôles qu'ils assemblent), car cette application de forces a lieu par l'intermédiaire de corps qui (comme ces tôles) exercent sur la surface des frottements énergiques. Ces sections exceptionnelles, susceptibles de rester planes, pourront couper obliquement tout ou partie des faces latérales du prisme fléchi.

§ 2. *Loi de variation des glissements aux divers points des sec-*

(Du n° 152).

tions d'un prisme rectangulaire mince fléchi de champ. *Forme de doucine affectée par les sections primitivement planes.* — Toutes les autres sections, faites dans les parties des pièces fléchies où les faces latérales n'éprouvent que la pression de l'atmosphère, devront se gauchir pour peu que l'équilibre exige qu'il s'y développe des actions tangentielles, afin de pouvoir rester normales à quelques fibres du contour et s'incliner sur d'autres fibres; en sorte que le glissement variera d'un élément à l'autre de ces sections.

Pour déterminer la loi de sa variabilité, prenons le cas le plus simple, celui d'un prisme rectangulaire ABDC dont les sections transversales $abb'a'$ aient une largeur aa' assez petite par rapport à la hauteur ab pour que les glissements puissent être regardés comme égaux en tous les points appartenant à chaque droite mm' parallèle à la largeur aa', ou perpendiculaire au plan de sollicitation ACP. Soient ab, cd les coupes longitudinales infléchies de la section $abb'a'$ et d'une section très-voisine; ces coupes auront la forme de *doucines* rencontrant perpendiculairement les coupes AC, BD des faces supérieure et inférieure du prisme, auxquelles les sections seront restées normales ainsi qu'au faces latérales (§ précédent).



Posons l'équation d'équilibre de translation longitudinale de la petite tranche solide dont la coupe transversale est $mm'p'p$ et la coupe longitudinale $mnqp$, et qui est comprise entre ces deux sections ab, cd et deux plans parallèles aux faces supérieure et inférieure du prisme. Soient

b et c la largeur aa' et la hauteur ab de la section;

P la force qui agit transversalement en N à la distance $ON = a$ de la section d'encastrement AB, pour fléchir le prisme, et qui fait en même temps glisser les sections les unes devant les autres;

(Du n° 153).

x, $x + dx$ les abscisses Oo, Ot des deux sections aob, ctd;

v, $v + dv$ les ordonnées om, op des deux plans comprenant primitivement la tranche, l'origine o étant prise sur la ligne oo' des fibres de longueur invariable ot;

ρ le rayon de courbure de l'axe OoN du prisme en o;

g le glissement principal sur les éléments de la section ayant leurs centres sur la ligne mm';

g_0 le glissement au centre de la section, ou aux points de la ligne oo';

E, G les coefficients d'élasticité d'extension et de glissement;

$\omega = b.c$ l'aire de la section, et $I = \frac{bc^3}{12}$ son moment d'inertie autour de oo'.

D'après ce qu'on a dit au § 4 de la note du n° 152, g, qui est le glissement sur mo ou sur mn dans le plan nmo de ces deux lignes, sera aussi le glissement principal, dirigé longitudinalement, sur la face inférieure $mm' \times mn$ de la tranche; et le glissement principal sur la face supérieure $pp' \times pq$ sera, aussi par unité superficielle,

$$g + \frac{dg}{dv}\,dv.$$

Comme les aires de ces deux faces sont égales à bdx, la tranche se trouvera sollicitée longitudinalement, ou parallèlement à mn, sur ces faces, par les deux forces opposées :

$$Gg.bdx \quad \text{et} \quad -G\left(g + \frac{dg}{dv}\,dv\right)bdx.$$

Mais la même tranche ou réunion de fibres est tirée longitudinalement en arrière, sur la base de gauche pm, en vertu des extensions provenant de la flexion, par une force dont la grandeur, pour l'unité superficielle, est, comme nous savons (n° 77),

$$E\frac{v}{\rho}$$

produit du coefficient d'élasticité d'extension par la dilatation $\frac{v}{\rho}$ des fibres au passage à travers la section $abb'a'$. Et l'on a, pour l'équi-

(Du n° 153).

libre de rotation entre la force P dont le moment autour de oo' est $P(a-x)$ et les forces intérieures $E\frac{v}{\rho}d\omega$ qui s'exercent à travers la même section, l'équation

$$\int E\frac{v}{\rho}\,d\omega.v=\frac{EI}{\rho}=P(a-x);$$

en sorte que la traction en arrière $\frac{E}{\rho}v$ par unité superficielle de la base mp de la tranche a pour valeur

$$\frac{P}{I}(a-x).v.$$

La traction en avant sur l'autre base nq s'obtiendra en remplaçant x par $x+dx$. Donc, comme ces deux bases ont pour aire bdv, la tranche est encore sollicitée longitudinalement par les deux forces opposées

$$-\frac{P}{I}(a-x)v.bdv \quad \text{et} \quad \frac{P}{I}(a-x-dx)v.bdv.$$

Ajoutons ces deux forces à celles $Ggbdx$ et $-G\left(g+\frac{dg}{dv}dv\right)bdx$ qu'on vient de trouver, on devra, pour l'équilibre de la tranche, avoir une somme zéro. Il en résulte, en réduisant et divisant par le volume $bdvdx$ de la tranche :

$$G\frac{dg}{dv}=-\frac{P}{I}v.$$

Intégrant depuis $v=0$, valeur pour laquelle $g=g_0$, on obtient

$$g_0-g=\frac{P}{2GI}v^2;$$

ce qui montre que les glissements varient paraboliquement des bases aa', bb' à la médiane oo' de la section.

Comme ils doivent être nuls sur ces deux bases (§ précédent), on obtiendra pour le glissement central, en faisant $g=0$, $v=\pm\frac{c}{2}$:

(Du n° **153**).

$$g_0 = \frac{P}{2GI}\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{P}{2G\frac{bc^3}{12}}\frac{c^2}{4} = \frac{3}{2}\frac{P}{G\omega}; \qquad (^1)$$

d'où pour les autres glissements

$$g = \frac{P}{2GI}\left[\left(\frac{c}{2}\right)^2 - v^2\right] = \frac{3}{2}\frac{P}{G\omega}\left[1 - \left(\frac{2v}{c}\right)^2\right].$$

Cette expression satisfait à la condition d'équilibre de translation transversale qui exige que la somme des actions tangentielles $Gg d\omega$ sur la section soit égale à la force P, car en remplaçant $d\omega$ par l'aire $mm'p'p = bdv$, et ω par bc, l'on a bien

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} Ggbdv = \frac{3}{2}\frac{P}{bc}b\left[c - \frac{4}{c^2}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{c}{2}\right)^3\right] = P.$$

(1) Nous avons à peine besoin de dire que cette détermination du *glissement central* ou de l'inclinaison prise par l'axe du prisme sur ces sections courbées en surface cylindrique à base de doucine peut être donnée élémentairement dans les cours d'Arts et métiers. On conçoit facilement que les sections sollicitées à glisser l'une devant l'autre doivent rester normales aux faces du prisme qui n'éprouvent que la pression atmosphérique, ou que le glissement g doit être nul pour $v = \pm\frac{c}{2}$. Et si l'on appelle g_1 le glissement sur l'unité de la face supérieure pq de la tranche $mnqp$, on voit aisément que la différence $g - g_1$ du glissement sur les deux faces mn, pq, multiplié par leur aire et par G, doit, pour l'équilibre de la tranche, être égale à l'excès des tractions sur ses deux bases mp, nq, excès égal à leur superficie multipliée par $E\frac{v}{\rho} = \frac{P \times oM}{I}v$, traction sur l'unité de la première, moins $\frac{P \times (oM - ot)}{I}v$, traction sur l'unité de la seconde; ce qui donne, en réduisant, et mettant om pour v, l'expression :

$$G(g - g_1) = \frac{P}{I}\cdot om \times mp,$$

qui additionnée à toutes celles de même genre depuis $om = 0$ jusqu'à $om =$ une valeur quelconque v donne bien $G(g_0 - g) = \frac{P}{I}\frac{v^2}{2}$ puisque la somme de produits $om \times mp$ d'une variable $om = v$ par son incrément est l'aire $\frac{v^2}{2}$ du triangle rectangle isocèle dont elle est le côté. D'où l'on tire l'expression $g_0 = \frac{3}{2}\frac{P}{G\omega}$ en faisant $v =$ la demi-hauteur $\frac{c}{2}$ en même temps que $g = 0$ comme on vient de voir.

(Du n° 153).

Une analyse exacte prouve qu'on aurait encore $g_0 = \frac{3}{2}\frac{P}{G\omega}$ pour une section rectangle dont la largeur n'est pas très-petite par rapport à la hauteur, et aussi pour les points du diamètre vertical d'une section circulaire, si les fibres, en se dilatant longitudinalement, n'éprouvaient pas une contraction latérale [1]; et qu'on tient compte de l'influence de celle-ci en multipliant le second membre de $g_0 = \frac{3}{2}\frac{P}{G\omega}$ ou la fraction $\frac{3}{2}$ par. 0,98; 0,94; 0,85,

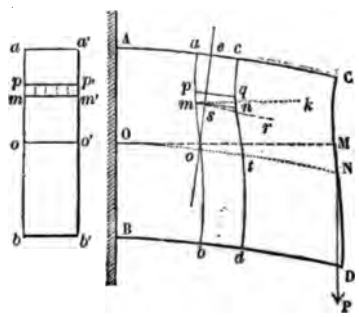
lorsque la largeur de la section rectangle $= \frac{1}{2}$, 1, 2 fois la haut'; ce qui suppose qu'on prend $\eta = \frac{1}{4}$, $\frac{G}{E} = \frac{2}{5}$.

Pour une section circulaire, il faut prendre

$$g_0 = \left(\frac{3}{2} - \eta\frac{G}{E}\right)\frac{P}{G\omega}; \text{ ou } g_0 = \frac{7}{5}\frac{P}{G\omega} \text{ si } \eta = \frac{1}{4}, \frac{G}{E} = \frac{2}{5};$$

et, pour une section elliptique, la même chose en multipliant la fraction 7/5 par 1,04; 1,035; 1,00; 0,94 selon que la largeur est à la hauteur comme $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2.

§ 3. *Détermination de la forme courbe en cylindre à base de doucine affectée par la section après la flexion du prisme.* — Appelons x l'ordonnée horizontale *ms* du point quelconque *m* de cette surface ou sa distance au plan *eo* normal à la courbe d'axe *ot*; la petite inclinaison $\frac{dx}{dv}$ de l'élément *mp* sur *eo* sera égale à l'inclinaison *kmr* de sa normale *mk* sur une parallèle *mr* à *ot*, ou au glissement $g = kmn$ plus la petite inclinaison *nmr* que



[1] On trouve en effet aux articles 19 et 27 de notre Mémoire sur la flexion, inséré au Journal de mathématiques pour 1856, des formules (les dernières de celles qui portent le n° 77 et le n° 105) donnant pour la force tangentielle—p_{xz}, la même

(Du n° 153).

la fibre mn peut avoir prise sur la fibre centrale ot. Cette dernière inclinaison s'obtient en remarquant qu'à la dilatation longitudinale $\frac{v}{\rho}$ de la fibre en m répond une contraction transversale $\eta\frac{v}{\rho}$ (η ayant la signification de la note du n° 80), d'où résulte, entre les points m et o un rapprochement $\int_0^v \eta\frac{v}{\rho}\,dv = \eta\frac{v^2}{2\rho} = \eta\frac{v^2}{2}\frac{P(a-x)}{EI}$. Le point n se sera rapproché du point correspondant t de l'axe, d'une quantité pareillement exprimée mais avec $-x-dx$ au lieu de $-x$; en sorte que le point m se sera rapproché de plus que le point n, de

$$\eta\frac{v^2}{2}\frac{Pdx}{EI};$$

d'où résulte, en divisant par $ot = mn = dx$, une inclinaison

$$\eta\frac{Pv^2}{2EI}$$

prise par mn sur ot. Ajoutant cette quantité au glissement $g = \frac{P}{2GI}\left(\frac{c^2}{4}-v^2\right)$ trouvé § précédent, on a

$$\frac{dx}{dv} = \frac{P}{2GI}\left(\frac{c^2}{4}-v^2+\frac{\eta G}{E}v^2\right);$$

ce qui donne, en intégrant de manière que $x = 0$ pour $v = 0$

$$x = \frac{3Pc}{4G\omega}\left[\frac{2v}{c}-\left(1-\frac{\eta G}{E}\right)\frac{8v^3}{3c^3}\right].$$

C'est l'équation de la coupe aob ou de la base de la surface cylindrique en doucine affectée par la section après la flexion du prisme par la force P. Chacune de ses deux moitiés est une parabole du troisième degré ou une courbe tout à fait analogue à la courbe d'axe $OofN$ du prisme fléchi.

que nous appelons ici Gg, des expressions qui reviennent à $\frac{3}{2}\frac{P}{\omega}\left[1-\left(\frac{2v}{c}\right)^2\right]$ lorsqu'on y suppose nulle une quantité η qui y représente le produit de $\frac{G}{E}$ par notre rapport η ci-dessus des contractions latérales aux dilatations longitudinales.

(Du n° 152).

Si la section rectangle a une base dont la grandeur approche de celle de la hauteur ou l'excède, l'analyse prouve que la surface est coupée par des plans parallèles à *oe* non plus suivant des droites, mais suivant des lignes légèrement concaves vers *oo'*; ces coupes sont convexes si la section est circulaire ou elliptique (Mémoire cité sur la flexion).

§ 4. *Flèche complète de flexion, eu égard au glissement.* — La force qui produit le glissement produit aussi ordinairement une flexion. On obtiendra les déplacements totaux des divers points de la pièce solide en composant, d'après le principe de superposition du § 2 de la note du n° 21, ceux qui viennent de la flexion, calculés comme on a fait aux §§ 77 et suivants et à leurs notes, avec ceux qui viennent du glissement.

Par exemple la *flèche*, ou le déplacement vertical total MN de l'axe à l'extrémité libre d'une pièce encastrée de longueur a, s'obtiendra en ajoutant à $\frac{Pa^3}{3EI}$, valeur de cette flèche due à la flexion seule (n° 86), ce qui vient de l'inclinaison que le glissement central g_0 fait prendre à tous les éléments de la ligne d'axe sur les normales aux sections, ou le produit de g_0 par la longueur a. On a donc pour la *flèche complète*

$$MN = f = \frac{Pa^3}{3EI} + g_0 a.$$

D'où successivement, en mettant pour g_0 ses valeurs ci-dessus

Section rectangulaire beaucoup plus haute que large. . . . . $\left\}\, f = \frac{Pa^3}{3EI}\left(1 + \frac{3}{8}\frac{E}{G}\frac{c^2}{a^2}\right) = \frac{Pa^3}{3EI}\left(1 + \frac{15}{16}\frac{c^2}{a^2}\right)\right.$, si $\frac{G}{E} = \frac{2}{5}$;

Section circulaire $f = \frac{Pa^3}{3EI}\left(1 + \frac{21}{20}\frac{E}{G}\frac{r^2}{a^2}\right) = \frac{Pa^3}{3EI}\left(1 + \frac{21}{8}\frac{r^2}{a^2}\right)$ idem.

On voit que le glissement n'augmente sensiblement la flèche que lorsque la longueur a du prisme n'est pas considérable par rapport à sa hauteur c ou $2r$.

154. A l'égard de la rupture, on remarquera que, conformément aux notions présentées dans le n° 112, nous la regardons comme étant déterminée par un certain degré d'extension acquis par les parties du corps qui se trouvent le plus fortement tendues. Or il est visible qu'en supposant ici l'état d'équilibre de la section A conforme aux notions précédentes, les parties placées à la face supérieure du solide dans cette section se seront allongées par l'effet de l'abaissement vertical de la partie AM et de la flexion de cette partie, d'une fraction de leur longueur qui est exprimée par

$$\sqrt{\delta^2 + \left(\frac{1}{\rho}\frac{c}{2}\right)^2};$$

ou, en mettant pour δ et ρ leurs valeurs tirées des équations précédentes,

$$\frac{P}{bc}\sqrt{\frac{1}{D^2} + \frac{36a^2}{E^2c^2}}.$$

Or la grandeur de cet allongement étant le terme qui détermine la rupture, il s'ensuit que le poids qui peut rompre le solide est proportionnel à l'expression

$$\frac{bc}{\sqrt{\frac{1}{D^2} + \frac{36a^2}{E^2c^2}}}.$$

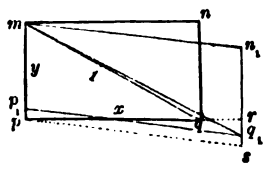
Cette formule satisfait aux cas extrêmes : si la longueur du solide est fort petite, on négligera le terme affecté du rapport $\frac{a^2}{c^2}$, et la résistance à la rupture sera proportionnelle à bc; si cette longueur est fort grande par rapport à la hauteur c, on négligera au contraire le terme $\frac{1}{D^2}$, et la résistance sera proportionnelle à $\frac{bc^2}{a}$, comme l'indique dans ce cas l'expérience. Il est vraisemblable que, dans les cas intermédiaires, la formule dont

il s'agit s'éloignera peu des effets naturels, lorsqu'on déterminera les coefficients constants $\frac{1}{D^2}$ et $\frac{36}{E^2}$ de manière à satisfaire à des résultats obtenus directement par l'expérience (*).

(*) § 1. *Détermination de la dilatation maximum qui se produit dans un sens oblique lorsqu'il y a à la fois un glissement transversal et une extension longitudinale accompagnée de contraction latérale.* — En partant du principe énoncé au texte « que la rupture est déterminée par un certain degré d'extension, » principe déjà posé ci-dessus (§ 4 de la note du n° 3) et qui nous a constamment guidé (note du n° 113) ; mais en l'appliquant avec ce qui a été établi sur le glissement aux notes des deux numéros précédents 152, 153, nous allons chercher une expression exacte des conditions de résistance à la rupture éloignée sous l'action de forces produisant à la fois un *glissement et une extension*, accompagnée, comme toujours, de contraction dans un sens perpendiculaire, et pouvant varier d'une fibre à l'autre comme quand il y a flexion.

Cette recherche mérite d'autant plus d'attention que nous en appliquerons le résultat à l'article VI (note du n° 168), au cas pratique de torsion et flexion simultanées, où les glissements ont une influence capitale.

Considérons donc une fibre qui se dilate longitudinalement, se contracte transversalement, et, en même temps, s'incline légèrement sur l'élément de section qui lui sert de base, ce qui produit un glissement sur celle-ci. Soient, avant les déplacements de ses points, $mnqp$, et, après, $mn_1q_1p_1$ la coupe, par le plan de glissement principal, d'un élément de cette fibre. Si nous appelons



x, y les dimensions longitudinale et transversale pq, mp ;

i, k les proportions de la dilatation de la dimension x, et de la contraction de la dimension y ;

g le glissement sur la base mp ;

i_1 la proportion de la dilatation de la diagonale mq ;

(Du n° 154).

et si, jusqu'à la ligne n_1q_1, coupe nouvelle de la deuxième base, nous tirons qr prolongement de pq, et ps parallèle à p_1q_1, nous aurons

$$qr = i.x,$$

et, en considérant que rs, égal au glissement g multiplié par pr (§ 4 de la note du n°152), peut être regardé comme égal à la même très-petite quantité g multipliée par $pq = x$, dont pr diffère extrêmement peu :

$$rq_1 = rs - pp_1 = g.x - k.y.$$

Nous pouvons prendre pour unité de longueur la diagonale mq dont nous avons à calculer la dilatation i_1.

Pour avoir cette proportion $mq_1 - mq = i_1$ dont elle s'est agrandie nous n'avons qu'à projeter les deux petites lignes qr, rq_1 dont la valeur vient d'être donnée, sur le prolongement de mq, et prendre la somme des deux projections. Or puisque $mq = 1$, projeté sur pq, donne x, $qr = i.x$ se projetant sur mq prolongé avec lequel il fait le même angle, donnera $i.x$ multiplié par x, ou ix^2; et, par une raison semblable, puisque $mq = 1$ projeté sur mp donne y, $rq_1 = gx - ky$ donnera $(gx - ky)y$.

Nous avons donc pour la projection i_1 de la dilatation qu'éprouve le solide dans la direction oblique mq par l'effet de la dilatation longitudinale i, de la contraction transversale k et du glissement g simultanément :

$$i_1 = ix^2 + gxy - ky^2;$$

expression dans laquelle x et y, liés ensemble par

$$x^2 + y^2 = 1,$$

donnent le degré d'obliquité quelconque de mq.

Pour que le corps résiste d'une manière permanente aux efforts simultanés produisant ces effets, il faut (§ 2 de la note du n° 3) que la plus grande valeur de la dilatation i_1 n'excède pas la limite adoptée, représentée ci-dessus (§§ 12 de la note du n° 21; 4, 5, 10 de celle du n° 113, et 7 de celle du n° 152) par

$$i' = \frac{R_0}{E}, \text{ ou par } \frac{1}{2}g' = \frac{1}{2}\frac{T_0}{G}.$$

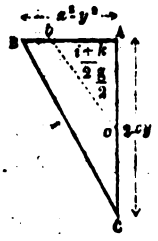
(Du n° 154).

Nous pourrions trouver la valeur de x donnant cette direction de plus grande dilatation en remplaçant x par $\cos\alpha$, y par $\sin\alpha$, α étant l'angle nmq fait par la direction mq avec les fibres, et en égalant à zéro la différentielle de i_1 par rapport à α, ce qui donnerait $\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{g}{i+k}$ pour déterminer l'angle α du maximum.

Mais, désirant continuer de donner cette recherche sous une forme élémentaire, nous écrirons ainsi la valeur de i_1 :

$$i_1 = \frac{i-k}{2} + \frac{i+k}{2}(x^2 - y^2) + \frac{g}{2} \cdot 2xy\,;$$

et nous raisonnerons comme au § 10 de la note du n° 83 pour les moments d'inertie principaux ; ou, plus simplement encore, nous remarquerons que $x^2 - y^2$ et $2xy$ peuvent être regardés comme deux côtés AB, AC d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse BC est l'unité (car, en considérant $1 - (x^2 - y^2)^2$ comme la différence de deux carrés, il est égal au produit de $1 + x^2 - y^2 = 2x^2$, somme des racines, par $1 - x^2 + y^2 = 2y^2$, différence des racines); puis, en portant sur les côtés AB, AC, des longueurs $Ab = \frac{i+k}{2}$, $Ac = \frac{g}{2}$, nous verrons



que la projection, sur l'hypoténuse BC, de la ligne brisée bAc, ou de bc, sera

$$\frac{i+k}{2}(x^2 - y^2) + \frac{g}{2} \cdot 2xy_1.$$

Or cette projection est à son maximum lorsque bc est parallèle à BC et elle a pour grandeur alors bc lui-même $= \sqrt{\overline{Ab}^2 + \overline{Ac}^2}$. On a donc :

$$\text{Maximum de } i_1 = \frac{i-k}{2} + \sqrt{\left(\frac{i+k}{2}\right)^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2}.$$

Le radical doit toujours être pris positivement, en sorte que si $g = 0$, le maximum est i ou la dilatation longitudinale lorsque i est positif. Mais lorsque i est négatif ou quand il y a contraction longitudinale on a le maximum de $i_1 = \frac{i-k}{2} - \frac{i+k}{2} = -k$, quantité alors positive représentant une dilatation transversale.

(Du n° 151).

Le rapport de la contraction latérale k à la dilatation longitudinale i des fibres est celui que nous avons appelé η et qui dépend de la contexture égale ou inégale, en divers sens, de la matière qui est du reste supposée homogène ou la même aux divers points; en sorte que l'expression précédente revient à

$$i_1 = \frac{1-\eta}{2} i + \sqrt{\left(\frac{1+\eta}{2} i\right)^2 + \left(\frac{1}{2} g\right)^2}.$$

Si l'on fait successivement dans cette formule

$$\eta \text{ ou } \frac{k}{i} = \qquad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3},$$

elle donne, dans le cas particulier $g = i$, $i_1 = 1{,}566i$, $1{,}554i$, $1{,}535i$, valeurs fort peu différentes entre elles. Et l'on en obtient qui le sont bien moins encore lorsque le glissement g a une grandeur ou plus considérable ou plus petite que la dilatation i (supposée positive) de la fibre. Nous pouvons donc faire constamment, comme si le corps était d'égale contexture (§ 8 note n° 152) *quand i est positif* ou quand il y a dilatation proprement dite

$$\eta = \frac{k}{i} = \frac{1}{4};$$

et la formule précédente de la dilatation maximum en un point donné sera :

$$i_1 = \frac{3}{8} i + \sqrt{\left(\frac{5}{8} i\right)^2 + \left(\frac{1}{2} g\right)^2};$$

expression qui, lorsque $g = 0$, donne $i_1 = i$ si i est positif, mais qui donnerait $i_1 = -\frac{1}{4} i$ si i était négatif, car le terme $\sqrt{\left(\frac{5}{8} i\right)^2}$ doit toujours entrer pour sa valeur absolue ou positive comme on a dit tout à l'heure, en sorte qu'il serait alors $-\frac{5}{8} i$.

§ 2. *Usage de cette détermination. Formule générale de résistance à divers genres d'efforts s'exerçant à la fois.* — Pour faire servir à l'établissement de la condition de résistance permanente, ou de

(Du n° 154).

stabilité de la cohésion d'un solide à chacune de ses sections, cette expression de la plus grande dilatation entre les diverses droites matérielles qui se croisent dans tous les sens en un même point quelconque, il faut chercher la plus grande valeur du second membre

$$\frac{1-\eta}{2}\,i+\sqrt{\left(\frac{1+\eta}{2}i\right)^2+\left(\frac{g}{2}\right)^2}$$

pour les divers points de chaque section, et l'égaler à la limite des extensions non dangereuses qui est, avons-nous dit au § précédent,

$$i'=\frac{R_0}{E}=\frac{T_0}{2G}.$$

En divisant l'équation par i' et conséquemment par son carré les deux termes sous le radical, on peut le remplacer ensuite par sa valeur $\frac{T_0}{2G}$ dans le [redacted] terme, et par sa valeur $\frac{R_0}{E}$ dans le premier ainsi que dans le terme hors du radical. L'équation de cohésion permanente devient ainsi

$$1=\text{la plus grande valeur de }\frac{1-\eta}{2}\,\frac{Ei}{R_0}+\sqrt{\left(\frac{1+\eta}{2}\,\frac{Ei}{R_0}\right)^2+\left(\frac{Gg}{T_0}\right)^2}.$$

C'est la *condition générale de résistance d'un solide* pour une section quelconque à travers laquelle il y a des extensions longitudinales i (ou des contractions $-i$) et des glissements g.

Elle s'applique au cas où i serait négatif $=-j$ et où, par conséquent, le terme hors du radical serait négatif pourvu que le radical soit toujours positif ou qu'on mette $+j$ pour $+i$ dans le premier terme qu'il recouvre.

Elle satisfait évidemment aux deux cas extrêmes :

1° Où le glissement g est nul, car elle donne alors (le terme provenant du radical étant toujours positif) :

$$R_0=\begin{cases}\text{La plus grande des valeurs de } Ei \text{ si } i \text{ est positif;}\\ \text{et la plus grande des valeurs de } -\eta Ei=\eta Ej \text{ si } i \text{ est négatif ou si } -i=j\\ \text{est une contraction longitudinale.}\end{cases}$$

(ce qui est d'accord avec le § 7 de la note du n° 3).

(Du n° 154).

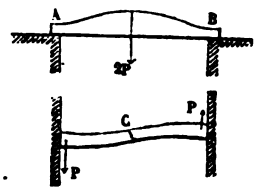
2° Où l'extension i est nulle puisqu'elle donne

$$T_0 = \text{la plus grande valeur de } Gg.$$

Et elle doit fournir dans les cas intermédiaires, où i et g existent à la fois, et lorsque la contexture du solide n'offre pas en tous sens l'égalité que nous avons supposée, toute l'approximation désirable en donnant des valeurs convenables aux constantes R_0, T_0, E, G, η [1].

Il est bien entendu qu'il faut en poser une semblable pour les diverses sections si les plus grandes valeurs de i et de g ne sont pas les mêmes pour toutes.

§ 3. *Application au cas où la rupture peut être déterminée par un glissement, sur une section libre de s'infléchir.* — Ce cas arrive, par exemple :



1° Aux extrémités A, B d'un solide simplement posé sur deux appuis et sollicité au milieu par une force transversale 2P; car, à ces deux endroits A, B, le moment des forces qui tendent à fléchir est nul et la pièce ne résiste qu'au glissement.

2° Au milieu C d'un solide qui se trouve sollicité transversalement en sens opposés par des forces égales P, P aux extrémités, où la direction de son axe est supposée fixée de manière qu'il ne puisse tourner sous leur action.

Alors on a simplement pour condition de résistance à la rupture éloignée

$$T_0 = \text{la plus grande valeur de } Gg$$

ou, g_0 étant le glissement central

$$T_0 = Gg_0.$$

Or nous avons trouvé (§ 2 de la note du n° 153), $g_0 = \frac{3}{2}\frac{P}{G\omega}$

[1] La formule construite par M. Navier pour satisfaire aussi aux cas extrêmes revient à peu près à $1 = \sqrt{\left(\frac{EI}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{Gg}{T_0}\right)^2}$, ou à ce qu'on aurait si η était $= 1$. Mais η ne doit jamais excéder 1/3 ou atteindre 1/2.

(Du n° 154).

ou $\frac{7}{5}\frac{P}{G\omega}$, etc. selon la forme des sections. Nous aurons donc, pour calculer la superficie ω à donner à la section menacée par simple glissement sans flexion, ou pour calculer la limite de la force P quand cette superficie est donnée

$P = \frac{2}{3} T_0\omega$ si la section est un rectangle beaucoup moins large que haut ;

$P = \frac{5}{7} T_0\omega$ si elle est un cercle.

Et on divisera les fractions 2/3 et 5/7 par les nombres peu différents de l'unité dont on a donné le tableau à la fin du même § 2 de la note du n° précédent 153, si la largeur du rectangle n'est pas très-petite, ou si la section est une ellipse au lieu d'être un cercle.

Les dimensions des autres sections du même solide, supposées de même forme, seront réglées comme on dira aux § suivants.

La théorie ordinaire et connue des solides dits d'*égale résistance* (§ 6 de la note du n° 113, ou ci-après section IV art. VII n°s 498 à 507), en réglant le profil de ces pièces eu égard à la seule flexion, donnait une superficie *zéro* à la section répondant aux deux points d'appui de la première pièce et à la section milieu de la seconde. *La considération du glissement montre quelle doit être cette superficie* et fait disparaître ainsi le paradoxe.

§ 4. *Application au cas où il y a en même temps glissement et extension ou compression sans flexion. Formule et table numérique.* — 1° Soit un solide qui doit être, à l'une de ses sections, à la fois *étendu* par une force longitudinale également répartie Q, et sollicitée au glissement ou cisaillement par une force transversale P. Désignant par ω la superficie inconnue qu'il faut donner à cette section pour rendre le solide capable de résister, on aura :

$i = \frac{Q}{E\omega}$ sur toute la section ;

$g = \frac{Q}{G\omega}$ aussi sur toute la section si elle est astreinte à rester plane (§ 10 de la note du n° 152) ;

(Du n° 154).

Et : la plus grande valeur de $g = \frac{3}{2}\frac{P}{G\omega}$ ou $\frac{7}{5}\frac{P}{G\omega}$ si elle est libre de s'infléchir, selon que sa forme est rectangulaire étroite ou qu'elle est circulaire.

Substituant dans la formule générale du § 2 et multipliant par ω, les coefficients d'élasticité E et G disparaissent et on tire pour cette superficie ω cherchée

$$\omega = \frac{1-\eta}{2}\frac{Q}{R_0} + \sqrt{\left(\frac{1+\eta}{2}\frac{Q}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{P}{T_0}, \text{ ou } \frac{3}{2}\frac{P}{T_0}, \text{ ou } \frac{7}{5}\frac{P}{T_0}\right)^2}.$$

En appelant :

ω''' la superficie qu'il faudrait donner si la pièce n'était sollicitée à rompre que par extension ;

ω'' celle qu'il faudrait donner si elle n'était solicitée à la rupture que par glissement ou cisaillement transversal ;

comme on a, en faisant successivement $P = 0$ et $Q = 0$:

$$\omega''' = \frac{Q}{R_0}, \quad \omega'' = \frac{P}{T_0}, \text{ ou } \frac{3}{2}\frac{P}{T_0}, \text{ ou } \frac{7}{5}\frac{P}{T_0};$$

la formule d'extension et glissement peut être écrite de cette manière claire et commode

$$\omega = \frac{1-\eta}{2}\omega''' + \sqrt{\left(\frac{1+\eta}{2}\omega'''\right)^2 + \omega''^2};$$

ou, si $\eta = \frac{1}{4}$:

$$\omega = \frac{3}{8}\omega''' + \sqrt{\left(\frac{5}{8}\omega'''\right)^2 + \omega''^2};$$

expression qui peut être remplacée par le tableau suivant :

(Du n° 154).

Pour $\frac{\omega''}{\omega'''}=$								Et pour $\frac{\omega'''}{\omega''}=$							
0	1/4	1/3	1/2	2/3	3/4	4/5	1	4/5	3/4	2/3	1/2	1/3	1/4	1/8	0
On a $\frac{\omega}{\omega'''}=$								Et $\frac{\omega}{\omega''}=$							
1	1,048	1,083	1,175	1,289	1,351	1,390	1,554	1,418	1,386	1,333	1,235	1,146	1,106	1,050	1

2° Si la force longitudinale Q sollicite le prisme *à la compression et non à l'extension*, la formule du § précédent qui, en faisant $i=-j$ prend, comme on a dit, la forme

$$1 = \text{la plus grande valeur de } -\frac{1-\eta}{2}\frac{Ej}{R_0}+\sqrt{\left(\frac{1+\eta}{2}\frac{Ej}{R_0}\right)^2+\left(\frac{Gg}{T_0}\right)^2}$$

devient, en remplaçant j par $\frac{Q}{E\omega}$

$$\omega=-\frac{1-\eta}{2}\frac{Q}{R_0}+\sqrt{\left(\frac{1+\eta}{2}\frac{Q}{R_0}\right)^2+\left(\frac{P}{T_0}\text{ ou }\frac{3}{2}\frac{P}{T_0}\text{ ou }\frac{7}{5}\frac{P}{T_0}\right)^2}.$$

D'où en faisant $P=0$ et appelant ω''' la section à donner pour résister à la seule sollicitation longitudinale ou à la compression

$$\omega'''=\eta\frac{Q}{R_0};$$

en sorte qu'on a dans le cas de la compression

$$\omega=-\frac{1-\eta}{2\eta}\omega'''+\sqrt{\left(\frac{1+\eta}{2\eta}\omega'''\right)^2+\omega''^2};$$

ou, si $\eta=\frac{1}{4}$:

$$\omega=-\frac{3}{2}\omega'''+\sqrt{\left(\frac{5}{2}\omega'''\right)^2+\omega''^2};$$

formule donnant ceci :

(Du n° 154).

Pour $\frac{\omega''}{\omega'''}=$							Et pour $\frac{\omega'''}{\omega''}=$							
0	1/4	1/3	1/2	2/3	3/4	4/5	1	4/5	3/4	2/3	1/2	1/3	0,3	1/4	1/8	0
On a $\frac{\omega}{\omega'''}=$							Et $\frac{\omega}{\omega''}=$							
0	1,012	1,022	1,050	1,084	1,110	1,125	1,119	1,036	1,000	0,944	0,851	0,802	0,800	0,802	0,860	1,000

Les valeurs de $\frac{\omega}{\omega''}$ sont plus petites que l'unité quand ω''' est au-dessous de $\frac{3}{4}\omega''$; leur minimum répond à $\omega''' = 0,3\omega''$ et est égal à 0,8. On voit ainsi qu'une compression longitudinale aide quelquefois à la résistance au lieu d'y nuire. Cela se conçoit, parce qu'elle diminue les écartements moléculaires provenant du glissement qui a lieu simultanément.

§ 5. *Rivet ou petit boulon, comme exemple numérique du cas d'extension et glissement.* — Par anticipation à ce que nous nous proposons de faire après avoir rapporté les tableaux d'expériences du complément des art. I à VI, nous donnons, ici, pour ne pas interrompre ce qui est relatif au glissement et à sa prise en considération, des applications numériques des formules précédentes.

On demande, par exemple, la superficie à donner à la section circulaire d'un rivet ou d'un petit boulon en fer destiné à assembler des feuilles de tôle, en supposant qu'après le serrage de son écrou, ou après sa pose à chaud, il éprouve une traction $Q = 1000$ kilogrammes environ, et qu'il se trouve dans le cas de supporter transversalement, en vertu des efforts auxquels seront soumises les tôles, une force $P = 1200$ kilogrammes tendant à le rompre par cisaillement.

Solution. En admettant que par chaque millimètre carré on puisse lui faire supporter d'une manière permanente un effort de traction R_0 de 5 kilogrammes, et (§ 9 note n° 152) un effort de cisaillement T_0 des 4/5 de R_0 ou de 4 kilogrammes, il faudrait donner au rivet ou boulon, s'il n'était soumis qu'à la traction, une section de

(Du n° 154).

$$\frac{1000}{5} = 200 \text{ millimètres carrés ;}$$

et s'il n'était soumis qu'au cisaillement, une section de

$$\frac{1200}{4} = 300 \text{ millimètres.}$$

On aura donc (1re formule du § précédent), $\omega''' = 200$, $\omega'' = 300$, $\omega = \frac{3}{8}\,200 + \sqrt{\left(\frac{5}{8}\,200\right)^2 + (300)^2}$, ou, *Section effective à donner :*

$$\omega = 400 \text{ millimètres carrés,}$$

c'est-à-dire un diamètre de $0^m,02257$.

On verra, § 9, 4e exemple, un cas de *compression et glissement.*

§ 6. *Application quand il y a à la fois glissement, extension et flexion. Premier cas, où la section reste plane.* — Soit maintenant cette pièce sollicitée à la fois non-seulement à l'extension par une force longitudinale Q et au glissement par une force transversale P, mais, encore, *à la flexion* par celle-ci, que nous supposerons, pour plus de simplicité, parallèle à l'un des deux axes principaux (note du n° 83) de la section ω dont on cherche les dimensions.

Il faut considérer deux cas.

Supposons, en premier lieu, que cette section soit de celles qui ne peuvent prendre aucune courbure ou qui sont astreintes à rester planes (§ 10 de la note du n° 152). Si

I représente son moment d'inertie autour d'une ligne qui y est tracée par son centre de gravité à angle droit sur la force transversale P ;

M le moment de P autour de cette ligne ;

v' la distance, à cette même ligne, de la fibre la plus éloignée et par conséquent la plus étendue ;

l'on a $\pm \frac{Q}{E\omega} + \frac{M}{EI} v'$ pour cette plus grande dilatation, le signe inférieur devant être pris quand la force Q est comprimante ; et $y = \frac{P}{G\omega}$ pour le glissement sur la base de cette fibre.

(Du n° 151).

Substituant dans l'équation générale de résistance du § 2, on a

$$1 = \frac{1-\eta}{2}\left(\pm\frac{Q}{R_0\omega} + \frac{Mv'}{R_0 I}\right) + \sqrt{\left[\frac{1+\eta}{2}\left(\pm\frac{Q}{R_0\omega} + \frac{Mv'}{R_0 I}\right)\right]^2 + \left(\frac{P}{T_0\omega}\right)^2};$$

équation à laquelle on peut donner cette forme plus simple, en transposant le 1er terme du second membre, élevant au carré sans développer, puis faisant passer encore le premier terme du second membre dans le premier, et décomposant ensuite le premier membre en vertu du théorème $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$:

$$\left(1 \mp \frac{Q}{R_0\omega} - \frac{Mv'}{R_0 I}\right)\left(1 \pm \eta\frac{Q}{R_0\omega} + \eta\frac{Mv'}{R_0\omega}\right) = \left(\frac{P}{T_0\omega}\right)^2.$$

En désignant par ω''', ω'' les superficies que l'on donnerait à la section ω si elle n'était soumise respectivement qu'à la force longitudinale Q et qu'à l'effort de glissement P, et par I', v' des valeurs du moment d'inertie I et de la plus grande ordonnée v' satisfaisant à la condition de stabilité si P ne sollicitait qu'à fléchir; ou en faisant

$$\frac{P}{T_0} = \omega'', \quad \frac{M}{R_0} = \frac{I'}{v'}$$

en même temps que

$$\frac{Q}{R_0} = \omega''' \text{ si Q est une traction,}$$

$$\frac{Q}{\frac{1}{\eta_1} R_0} \omega''' \text{ si Q est une pression (§§ 7 note du n° 3, et 17 note du n° 201);}$$

l'équation devient

$$\left(1 - \frac{\omega'''}{\omega} - \frac{I'v'}{Iv'}\right)\left(1 + \eta\frac{\omega'''}{\omega} + \eta\frac{I'v'}{Iv'}\right) = \left(\frac{\omega''}{\omega}\right)^2 \text{ si Q est une traction.}$$

$$\left(1 + \frac{1}{\eta_1}\frac{\omega'''}{\omega} - \frac{I'v'}{Iv'}\right)\left(1 - \frac{\eta}{\eta_1}\frac{\omega'''}{\omega} + \eta\frac{I'v'}{Iv'}\right) = \left(\frac{\omega''}{\omega}\right)^2 \text{ si Q est une pression.}$$

Supposons par exemple la section circulaire, et désignons par r son rayon cherché, et par r', r'', r''' les valeurs qu'on donnerait à r si le solide n'était sollicité respectivement qu'à la flexion, qu'au glissement, qu'à l'extension ou compression. Comme on a $\omega = \pi r^2$,

(Du n° 154).

$I = \frac{\pi r^4}{4}$, $v' = r$, on obtient, en mettant pour ω'', ω''', I', v' des expressions analogues et multipliant tout par $4r^6$, si on se borne au cas où la force longitudinale Q agit par traction et où $\eta = \eta_1 = \frac{1}{4}$:

$$(r^3 - r'''^2 r - r'^3)(4r^3 + r'''^2 r + r'^3) = 4r''^4 r^2.$$

Comme r'''^2, r'^2, r''^4 sont connus en chiffres par les expressions $\frac{Q}{R_0} = \pi r'''^2$, $\frac{P}{T_0} = \pi r''^2$, $\frac{M}{R_0} = \frac{\pi r'^3}{4}$, cette équation donnera facilement la valeur du rayon cherché r par une construction graphique, ou bien en tâtonnant par la méthode numérique des différences proportionnelles ou de double fausse position, appliquée successivement, et dont l'emploi deviendra plus prompt eu prenant les logarithmes des deux membres.

Si la pièce n'est sollicitée qu'au glissement et à la flexion, l'on a $r''' = 0$, et l'équation se réduit à :

$$(r^3 - r'^3)(4r^3 + r'^3) = 4r''^4 r^2.$$

Il n'y a que lorsque la flexion est nulle ou que $\frac{I'}{v'} = 0$ que l'équation se réduit au second degré et que la solution peut être directe (§§ 4 et 5).

Si la section est un rectangle dont b, c sont les côtés perpendiculaire et parallèle à la force transversale P, on a $\omega = bc$, $v' = \frac{b}{2}$, $\frac{I}{v'} = \frac{bc^2}{6}$; et, en accentuant comme précédemment les valeurs qu'on donnerait si la pièce n'était soumise qu'à chacun des trois genres d'efforts, on a une équation qui multipliée par $4b^2c^4$ prend cette forme;

$$(bc^2 - b'''c'''c - b'c'^2)(4bc^2 + b'''c'''c + b'c'^2) = 4b''^2 c''^2 c^2.$$

Elle servira à déterminer l'une des dimensions b, c de la section rectangle en se donnant l'autre, ou en se donnant une relation entre elles. Par exemple si l'on veut que c soit égal à b multiplié par un nombre donné quelconque, en faisant c', c'', $c''' = b'$, b'', b''' multiplié par le même nombre ou rapport, et divisant l'équation par sa quatrième puissance, on a, avec des b, précisément l'équa-

(Du n° 154).

tion que nous avons eue avec des r pour le cas d'une section circulaire.

Si l'on se donne l'épaisseur c, l'on a en divisant par sa quatrième puissance $c^4 = c'^4 = c''^4 = c'''^4$:

$$(b - b''' - b')\left(b + \frac{b''' + b'}{4}\right) = b''^2;$$

d'où, pour la largeur cherchée

$$b = \frac{3}{8}(b''' + b') + \sqrt{\left[\frac{5}{8}(b''' + b')\right]^2 + b''^2}$$

qui peut aussi être donnée par le premier tableau numérique du § 4.

Si l'on se donne la largeur b, on a en divisant par $b^2 = b'^2 = b''^2 = b'''^2$ une équation en c qui se réduit, quand $c''' = 0$ ou quand la pièce n'est sollicitée qu'à la flexion et au glissement sans extension ou compression générale, à

$$(c^2 - c'^2)(4c^2 + c'^2) = 4c''^2c^2;$$

d'où, une expression de c^2 :

$$c^2 = \frac{3}{8}c'^2 + \frac{1}{2}c''^2 + \sqrt{\left(\frac{3}{8}c'^2 + \frac{1}{2}c''^2\right)^2 + \left(\frac{c'^2}{2}\right)^2}$$

qui se réduit à c'^2 si $c'' = 0$ et à c''^2 si $c' = 0$, et qui fournit du reste ce tableau numérique :

Pour $\frac{c''^2}{c'^2} =$							Et pour $\frac{c'^2}{c''^2} =$					
0	1/8	1/4	1/2	2/3	3/4	1	3/4	2/3	1/2	1/4	1/8	0
On a $\frac{c^2}{c'^2} =$							Et $\frac{c^2}{c''^2} =$					
1	1,102	1,207	1,425	1,575	1,651	1,883	1,645	1,571	1,419	1,201	1,097	1

§ 7. *Observation pour le cas où l'on donne partout à la pièce une égale épaisseur. Il faut alors qu'elle soit très-courte pour que le glissement ait une influence sensible sur la condition de résis-*

(Du n° 154).

tance. — Si, dans l'expression générale du § précédent où il faut faire $Q = 0$ quand il n'y a que flexion et glissement

$$1 = \frac{3}{8}\frac{Mv'}{R_0 I} + \sqrt{\left(\frac{5}{8}\frac{Mv'}{R_0 I}\right)^2 + \left(\frac{P}{T_0\omega}\right)^2}$$

nous faisons passer $\frac{5}{8}\frac{Mv'}{R_0 I}$ hors du radical de manière à avoir l'unité pour premier terme sous le signe, le second terme sera $\left(\frac{4R_0}{5T_0}\cdot\frac{2P}{M}\cdot\frac{I}{\omega v'}\right)^2$; et si, pour M, nous mettons Pa, moment de la force P avec un bras de levier a, et, pour T_0, sa valeur théorique $\frac{4}{5}R_0$, nous avons

$$R_0\frac{I}{v'} = Pa\left[\frac{8}{8} + \frac{5}{8}\sqrt{1 + \left(\frac{2I}{a\omega v'}\right)^2}\right]$$

Cette expression se réduira à $R_0\frac{I}{v'} = Pa = M$ ou à l'équation ordinaire de résistance à la flexion seule lorsque le second terme sous le radical sera petit devant le premier, de manière que la quantité entre crochets excède fort peu $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1$. Or, ce second terme, pour une section circulaire de rayon r, vu que $\omega = \pi r^2$, $v' = r$, $I = \frac{\pi r^4}{4}$, se réduira à $\left(\frac{2r}{4a}\right)^2$, et, pour une section rectangle où $\omega = bc$, $v' = \frac{c}{2}$, $I = \frac{bc^3}{12}$, à $\left(\frac{c}{3a}\right)^2$. On peut le négliger quand la hauteur $2r$ ou c du solide est moindre que le bras de levier a avec lequel agit la force qui opère en même temps la flexion et le glissement.

Il en résulte que lorsque la forme du solide doit être à peu près prismatique et que sa longueur ou pour mieux dire la distance du point d'application de la force à la section la plus exposée excédera la hauteur de la section, on pourra calculer ses dimensions comme si elle n'était que fléchie en négligeant le glissement.

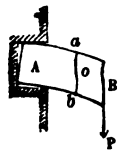
C'est ce qui arrive souvent pour les dents d'engrenages, etc.

Mais il faut en tenir compte, comme nous avons déjà dit, si l'on donne au solide la forme d'égale résistance. Et, en tous cas, les ef-

(Du n° 154).

fets de glissement sont comparables *à ceux d'extension et de compression générale* qui sont produits par des forces du même ordre d'intensité et dont on tient compte en général.

§ 8, *Second cas (de flexion et de glissement simultanés), où la section peut s'infléchir librement. Alors il suffit de choisir la plus forte des dimensions fournies par un double calcul.* — Supposons en second lieu que les sections *aob* de la pièce AB sollicitée transversalement par une force P puissent prendre librement la courbure dont nous avons parlé § 2 de la note du n° 153 et



§ 3 de la note du n° 154. Les fibres en *a*, les plus éloignées de la ligne *o* des fibres invariables sont les plus étendues en vertu de la flexion ; mais, d'après ce que nous avons vu, elles restent normales à la section infléchie, et *le glissement y est nul.* D'une autre part, c'est au milieu de la section, ou en *o*, que le glissement est le plus fort; *mais la flexion du solide n'y produit ni extension ni compression.* De plus, le calcul prouve [1] que lorsque la hauteur *ab* de la section atteint $3^{\text{fois}},05$ le bras de levier *o*B de la force si la section est rectangle, et $4^{\text{fois}},3$ si elle est circulaire, le point dangereux ou de plus grande dilatation quitte brusquement les bords *a* et *b* pour venir très-près du centre *o*, dont il se rapproche encore plus à mesure que la hauteur de la section augmente par rapport au bras de levier.

Il en résulte que, dans ce cas, les effets de flexion et de glissement produits par une action transversale se combinent à peine ensemble, et que, pour avoir les dimensions à donner à la section, *il n'y a qu'à les calculer successivement comme si la pièce n'était sollicité qu'à la flexion et comme si elle n'était sollicitée qu'au glissement transversal avec libre courbure de la section; et qu'à prendre le plus fort des résultats de ce double calcul.*

Mais, d'après les tableaux des §§ 4 et 6 dans lesquels les fractions dont les nombres qui y sont inscrits excèdent l'unité donnent la mesure de la quote-part nullement négligeable de celui des deux

(1) *Mémoire sur la torsion* (Savants étrangers, t. XIV), art. 126, ou bien art. 136 règle J_2.

(Du n° 154).

effets qui est le moins influent, l'on voit que lorsque la section est astreinte à rester plane ou encore lorsque, soit qu'elle reste plane ou qu'elle devienne courbe, le glissement a lieu simultanément à une extension ou une compression générale des fibres, les écartements moléculaires partiels se composent pour produire un écartement résultant qui est sensiblement supérieur à chacun, et il y a nécessité de donner aux sections des dimensions plus fortes que celles qui les rendraient capables de résister séparément aux deux genres d'effort.

§ 9. *Applications numériques des formules des* §§ 6, 7, 8.

1er *exemple. Flexion et glissement.* On demande la hauteur c à donner à la section rectangulaire d'une pièce prismatique horizontale en fonte, d'une largeur $0^m,015 = b$, posée sur deux appuis à une distance de $0^m,03 = 2a$, pour qu'elle puisse porter au milieu une charge $2P = 2000$ kilogrammes.

Solution. C'est la section milieu qui est la plus exposée à rompre par flexion seule. Or cette section n'a aucune raison de se courber plutôt à droite qu'à gauche : elle restera donc plane, et il faut pour calculer sa dimension verticale c, se servir de la formule de la fin du § 6.

La valeur c' qui rendrait la pièce capable de résister à la seule flexion serait fournie par $R_0 \frac{bc'^2}{6} = Pa$, d'où en faisant $b = 0,015$, $a = \frac{0,03}{2}$, $P = 1000$, $R_0 = 7\ 500\ 000$, l'on tire $c'^2 = 0,0008$, $c' = 0,02818$.

La valeur c'' capable de la faire résister au seul glissement sans courbure de la section serait donnée par $T_0 bc'' = P$, où $b = 0,015$, $P = 1000$, et où, faute d'expériences spéciales on fera $T_0 = \frac{4}{5} R_0 = 6\,000\,000$; d'où $c'' = \frac{1}{90} = 0,01111$, $c''^2 = 0,000123457$.

Au moyen de ces valeurs de c'^2 et c''^2, la formule $c^2 = \frac{3}{8} c'^2 + \frac{1}{2} c''^2 + \sqrt{\left(\frac{3}{8} c'^2 + \frac{1}{2} c''^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2} c'^2\right)^2}$ de la fin du § 6, relative à ce cas où l'on se donne la largeur b, fournira

(Du n° 154).

$$c^2 = 0{,}00090103, \quad c = 0^m{,}03002.$$

Il y a bien, à droite et à gauche de la section milieu, des sections qui s'infléchissent librement : mais, ainsi que nous avons dit § 8, il n'y a aucun glissement sur la base des fibres les plus tendues ou comprimées, et aucune extension ni compression des fibres du centre où le glissement est le plus fort; et la hauteur b à donner à la section doit être la plus forte de celles qu'on trouverait *s'il n'y avait que flexion* et *s'il n'y avait que glissement.* Or, dans la première supposition, on aurait moins que ce que nous avons trouvé pour la section milieu; dans la seconde, celle de glissement seul avec libre inflexion, on aurait (§ 3), $bc = \frac{P}{\frac{2}{3}T_0} = \frac{1000}{4\,000\,000} = 0{,}00025$ d'où $c = \frac{0{,}00025}{0{,}015} = 0^m{,}01667$, valeur moindre que celle 0,03 que nous avons trouvée tout à l'heure pour la section milieu non infléchie.

Donc il faut donner à la petite pièce prismatique en fonte une hauteur de 3 centimètres.

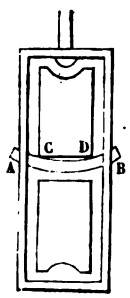
2me *exemple. Même pièce en lui donnant un profil d'égale résistance.*— Soit alors sa hauteur ou épaisseur variable désignée par z au lieu de c, pour la section à la distance x d'un des deux appuis. On trouverait, s'il n'y avait que flexion, $R_0 \frac{bz^2}{6} = Px$; et, avec le glissement, on trouverait pour la valeur de z^2 en x, la dernière équation du § 6 en faisant $c^2 = z^2$, $c'^2 = \frac{6Px}{bR_0}$, $c''^2 = \left(\frac{P}{T_0 b}\right)^2$ si les sections étaient partout astreintes à rester planes; mais, vu la faculté qu'elles ont généralement de s'infléchir (§ 8), le double profil parabolique donné par l'équation $R_0 \frac{bz^2}{6} = Px$ en supposant la face inférieure horizontale, conviendra à la pièce en faisant $R_0 = 7500000$, $b = 0{,}015$, $P = 1000$ partout, excepté 1° auprès de son milieu $x = a = 0{,}015$ où il en résulterait une épaisseur $z = 0{,}0283$ tandis qu'on doit avoir, comme nous venons de trouver, $z = 0{,}03$; 2° auprès des appuis, ou l'équation donnerait l'épaisseur $z = 0$ et où

(Du n° 154).

l'on doit avoir, comme on vient de dire, $z = 0{,}0167$. Prenant, en ces trois points, les ordonnées $z = 0{,}0167$, $z = 0{,}03$, $z = 0{,}0167$ et faisant de petits raccordements pour aller joindre tangentiellement la parabole, on aura le profil d'égale résistance.

3me *Exemple. Flexion et glissement. Boulon de poulie.* — On demande quel diamètre doit avoir le boulon horizontal d'une poulie destinée à porter deux poids $P = 800$ kilogrammes, et qui a un jeu horizontal de 3 millimètres dans sa chape ?

Solution. Ce boulon est comme une pièce posée sur deux appuis A, B et portant, intermédiairement, deux poids P en deux points C, D distants l'un de l'autre de l'épaisseur CD de la poulie. Si celle-ci restait bien à égale distance des deux branches de la chape, ou si on avait toujours $AC = DB$, les réactions des appuis A, B seraient égales chacune à P, et le moment M tendant à la flexion serait $P \times AC = P \times 0^m{,}0015$ dans toute la partie CD qui fléchirait ainsi en arc de cercle. Le glissement serait nul entre C et D; mais, immédiatement en deçà de C et au delà de D, le glissement aurait lieu en vertu d'une force transversale P. Mais la poulie peut se porter tout d'un côté, ou toucher la branche B de la chape en restant à 3 millimètres de la branche A. Comme ce jeu est toujours petit en comparaison de l'épaisseur de la poulie, les deux appuis peuvent toujours être considérés comme portant chacun la moitié de la charge totale 2P. Le boulon, à sa section la plus exposée, qui est la section C, est donc sollicité à fléchir par un moment $M = Pa = 800^k \times 0{,}003 = 2^k{,}4$, et à glisser par une force transversale $P = 800^k$.



Comme cette section peut librement s'infléchir en doucine, il y a lieu (§ 8) de calculer son rayon r successivement comme s'il n'y avait que flexion et comme s'il n'y avait que glissement, et de prendre le plus fort des deux résultats. Dans la première hypothèse on aurait, le coefficient de résistance permanente R_0 étant 6000000:

$$\frac{R_0 I}{v'} = R_0 \frac{\pi r^3}{4} = Pa = 2{,}4 \text{ ; d'où } r^3 = \frac{9{,}6}{3{,}1416 . 6000000} \text{ ; } r = 0^m{,}00798.$$

(Du n° 154).

Dans la deuxième hypothèse, celle du glissement avec libre inflexion, on aurait, vu que la section est circulaire (§ 3).

$$\text{Section } \pi r^2 = \frac{P}{\frac{5}{7}T_0} = \frac{P}{\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{5}R_0} = \frac{7\times 800}{24\,000\,000},\ r^2 = \frac{0,7428}{10000},\ r = 0^m,00862.$$

Cette seconde valeur étant la plus forte, on doit adopter le diamètre $2r = 2\times 0,^m00862 = 17^{mm},2$, qu'il sera prudent de porter à 2 centimètres, vu qu'il s'agit d'une pièce sujette à s'user.

4me *Exemple. Compression et glissement. Rais de roue de voiture.* — Quelle superficie faut-il donner à la section milieu des rais de roue d'une charrette destinée à traîner une charge de 10,000 kilogrammes dans des chemins de traverse ?

Solution. Si la charge de 5,000k par roue est supposée porter toujours au moins sur deux rais à la fois, à cause de la répartition produite par la jante, chaque rai sera comprimé longitudinalement; à chaque tour, par une force de 2,500k. En admettant (voy. plus loin) que pour une longueur d'au plus 12 fois l'épaisseur, le bois de chêne debout supporte d'une manière permanente, par centimètre carré, une compression de 44k que nous réduisons à 35k vu les chocs, il faudrait donner une section $\omega''' = 70$ centimètres carrés.

Mais chaque rai sert en outre à transmettre horizontalement, comme l'a remarqué M. Poncelet (ci-dessus § 1 de la note n° 152), par deux actions transversales opposées, la force du tirage à la bande en contact avec le sol, ou la résistance de celui-ci à l'essieu. Cette traction ou cette résistance horizontale est le 1/20 de la charge sur un terrain médiocre; mais, afin de résister aux coups de collier accidentellement nécessaires pour franchir les obstacles, il est bon de compter sur 1/8, ou sur 625 kil. La superficie nécessaire pour résister au glissement résultant de cette action transversale sur une section libre de s'infléchir en doucine sera $\frac{625^k}{\frac{2}{3}T_0}$.

Si l'on prenait pour T_0 les 4/5 (§ 9 de la note n° 152) de la résistance permanente R_0 du chêne à l'extension dans le sens des fibres, qui est (voy. plus loin) 2k par millimètre carré ou 200k par centi-

(Du n° 154).

mètre, on aurait $T_0 = 160$. Mais la résistance à la rupture par extension dans un sens perpendiculaire aux fibres n'est (voy. *idem*) que le 1/13 de ce qu'elle est dans le sens des fibres, ce qui donnerait, si la contexture était en tous sens ce qu'elle est dans le sens transversal $T_0 = \frac{160}{13} = 12^k,3$. Diverses considérations théoriques portent à penser [1] que le rapport de T_0 à G a une valeur moyenne proportionnelle entre celles qu'il aurait si la contexture était, en tous sens, successivement ce qu'elle est dans chacun des deux sens; si l'on admet la même loi pour la valeur de T_0 elle-même, on prendra $T_0 = \sqrt{160 \cdot \frac{160}{13}} = 44$; mais on verra que des expériences sur la rupture du bois par torsion font adopter environ $T_0 = 30$. Il en résulte, pour la surface de section capable de résister au glissement, $\omega'' = \frac{625}{\frac{2}{3}30} = 31$ centimètres carrés.

La valeur (§ 4) $\omega = -\frac{3}{2}\omega''' + \sqrt{\left(\frac{5}{2}\omega'''\right)^2 + \omega''^2}$ à donner à la superficie de la section du milieu du rai, pour résister simultanément aux deux efforts de compression et de glissement, sera en conséquence

$$\omega = 73 \text{ centimètres carrés.}$$

Quant aux sections autres que la section milieu, comme la pièce y est soumise, en outre, à la flexion par la force transversale 625^k, censée appliquée au milieu du rai, l'on déterminera leurs dimensions pour chacune des deux moitiés par la formule (§ 6) $R_0 = -\frac{Q}{\omega} + \frac{Mv'}{I}$ de manière à résister à la fois à la compression et à la flexion, M étant le moment variable Px, produit de la force $P = 625$ par la distance x de la section milieu à la section que l'on considère, dont v' est la demi-épaisseur et I le moment d'inertie, et l'on se tiendra à ces dimensions sans considérer le glissement si (§ 8) elles donnent une superficie plus forte que celle de 73 centimè-

[1] *Mémoire sur la torsion des prismes*, 1855, art. 24, 27, 122.

155. Lorsqu'au lieu d'une pièce encastrée par une extrémité, on considérera une pièce posée horizontalement sur deux appuis et chargée au milieu (Fig. 10), les mêmes considérations pourront être appliquées, en concevant que a désigne la moitié de la distance des appuis, et P la moitié du poids placé au milieu de la pièce (*).

ARTICLE V.

DE LA RÉSISTANCE D'UN CORPS PRISMATIQUE A LA TORSION.

156. On peut essayer de former la théorie de ce genre de résistance au moyen de considérations analogues à celles qui ont été employées pour la résistance à la flexion.

Soit (Fig. 12) un solide prismatique encastré horizontalement à l'une des extrémités. Supposons qu'une force P agisse à l'autre extrémité avec le bras de levier Bc pour tordre le solide autour de l'axe Cc; imaginons que par l'effet de la torsion, un diamètre bb de la section extrême, sur laquelle agit la force P, se soit transporté en $b'b'$. Le diamètre correspondant AA de l'extrémité encastrée n'aura subi aucun déplacement; et on doit concevoir que tous les diamètres des sections intermédiaires,

---

tres carrés qu'on vient de trouver pour résister à la compression et au glissement seuls.

Il est bien entendu, au reste, que la section sera renforcée suivant l'usage, auprès du moyeu et auprès des jantes, pour obtenir l'encastrement parfait, ou la constante normalité du rai à leurs deux circonférences.

Il sera bon aussi, vu les hypothèses qu'il nous a fallu faire pour arriver au résultat $\omega = 73$, d'appliquer le même calcul à quelques voitures analogues, déjà construites ou éprouvées, ce qui servira à faire une correction par la comparaison.

(*) Voir la note du n° 154.

tels que dd, se sont déplacés proportionnellement à leur distance Ce de l'extrémité encastrée. Par l'effet de ces déplacements, les molécules qui, dans deux sections transversales consécutives, étaient avant la torsion vis-à-vis les unes des autres, ont été éloignées l'une de l'autre d'une quantité proportionnelle, 1° à la distance de ces molécules à l'axe Cc; 2° à la différence des angles parcourus par chaque diamètre dans deux sections transversales consécutives, différence proportionnelle à l'angle bcb', et réciproque à la longueur Cc du solide. On peut supposer, la torsion étant censée très-petite, que les résistances naissant des déplacements relatifs sont proportionnelles à ces déplacements. Le moment de la résistance qui a lieu dans une section quelconque du solide, doit d'ailleurs être égal au moment du poids P. Considérons une section transversale quelconque, et nommons

a la longueur du solide, depuis la section fixe AA jusqu'à la section bb où agit la force P ;

θ l'angle bcb' décrit par les diamètres de cette section extrême, angle qui est supposé fort petit ;

r la distance d'un point quelconque d'une section transversale au centre e de cette section ;

φ l'angle de la ligne r avec un diamètre de la même section ;

$r = f(\varphi)$ l'équation de la courbe qui forme le contour de la section ;

R le bras de levier Bc avec lequel la force P agit pour produire la torsion ;

G un poids constant pour chaque espèce de corps, représentant la résistance spécifique à la torsion.

L'élément de l'aire de la section transversale placé à l'extrémité du rayon r étant $d\varphi dr \,.\, r$, on aura

$$G \frac{\theta}{a} d\varphi dr \,.\, r^2$$

pour la résistance provenant de la torsion qui a lieu dans cet

élément ; et pour exprimer l'équilibre entre le moment de la force P, et la somme des moments des résistances semblables,

$$PR = \frac{G\theta}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{f(\varphi)} dr \,.\, r^3,$$

ou

$$PR = \frac{G\theta}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \,.\, \frac{1}{4} [f(\varphi)]^4. \qquad (*)$$

(*) § 1. *Moment d'inertie polaire d'une section. Le moment de torsion ne lui est pas généralement proportionnel.* — M. Persy, dans ses leçons à l'école d'Artillerie et du Génie de Metz, a appelé moment polaire *le moment d'inertie d'une section autour de son centre de gravité*, ou autour de l'axe perpendiculaire à cette section passant par ce centre. Si on appelle

J ce moment ;
$d\omega$ les éléments superficiels de la section ω ;
I et I' ses moments d'inertie autour de deux axes coordonnés rectangulaires des u, des v, tracés sur la section par le centre ;

on a simplement pour le moment d'inertie polaire :

$$J = \int r^2 d\omega ;$$

ou comme $r^2 = v^2 + u^2$:

$$J = I + I'.$$

C'est ce moment qui se trouve désigné, dans le texte, par $\int_0^{2\pi} d\varphi \int dr \,.\, r^3 = \int_0^{2\pi} d\varphi \,.\, \frac{1}{4} [f(\varphi)]^4$, en sorte que l'expression donnée pour PR revient à $G \frac{\theta}{a} J$.

C'est seulement lorsque la section est un cercle que le moment polaire J est plus facile à calculer directement (n° suivant 157, ou § 1 de la note du n° 84) que les moments $I = \int v^2 d\omega$, $I' = \int u^2 d\omega$ considérés dans la théorie de la flexion. Il n'est donc pas besoin, pour les autres sections, d'avoir recours à la coordonnée angu-

(Du n° 156).

laire φ. Par exemple, pour la section carrée que l'auteur considère au n° 158, comme le moment d'inertie $I = I'$ autour d'une médiane est (n° 81) $\frac{b^4}{12}$, on a, de suite, en doublant, $\frac{b^4}{6} = J$.

Mais l'expression $PR = G\frac{\theta}{a}J$ donnée dans le texte pour le *moment de torsion* ou le moment PR des forces qui font tordre, n'est exacte, comme nous allons voir, que lorsque la section est circulaire, ou encore lorsque la section est de celles qui sont astreintes, par exception, à rester planes et normales à l'axe de torsion.

§ 2. *La cause de la résistance à la torsion n'est pas dans le changement de longueur des fibres longitudinales devenues des hélices. Remarque de Thomas Young.* — Il ne faut pas croire, d'après ce que semble dire d'abord Navier, que les résistances intérieures développées sont dues à l'*éloignement* mutuel ou à l'augmentation de distance des molécules qui faisaient partie d'une même file longitudinale; on voit que c'est, en définitive, à l'*éloignement de leurs deux projections* sur un plan perpendiculaire à l'axe qu'il regarde chaque résistance partielle à la torsion comme proportionnelle. Cet éloignement $\frac{\theta}{a}r$ acquis par les projections, primitivement coïncidentes, de deux molécules à l'unité de distance sur une même file, revient à la projection d'une longueur $= 1$ de la file sur le plan primitif de la section, ou au *glissement principal* (note du n° 152, § 4) qui a lieu sur la section à la distance r si elle est restée plane et perpendiculaire à l'axe de torsion.

Quant à la quantité dont deux molécules non projetées se sont *éloignées*, elle est, pour l'unité de leur distance primitive

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\theta r}{a}\right)^2} - 1 = \frac{\theta^2}{a^2}\frac{r^2}{2}$$

si les sections dont les molécules font partie sont restées à la même distance 1 l'une de l'autre; et si elles se sont rapprochées d'une quantité k, contraction supposée de l'axe du prisme, il reste pour la *dilatation* éprouvée par la fibre située à la distance r de l'axe

(Du n° 156).

$$\frac{\theta^2 r^2}{2a^2} - k.$$

Voyons quelle serait la résistance à la torsion que produiraient, seules, les forces $Ed\omega\left(\frac{\theta^2 r^2}{2a^2} - k\right)$ développées par de pareilles dilatations des diverses fibres, dont les sections sont $d\omega$. Il faudra d'abord, pour l'équilibre longitudinal, que la somme de ces forces soit nulle, ce qui donnera, en supposant la section circulaire d'un rayon r, et en remplaçant $d\omega$ par $2\pi r dr$, superficie de la couronne dont tous les éléments $d\omega$ sont à la distance r de l'axe :

$$\int_0^r E \,.\, 2\pi r dr\left(\frac{\theta^2 r^2}{2a^2} - k\right) = 0, \text{ d'où } k = \frac{\theta^2 r^2}{4a^2}.$$

La somme des moments, autour de l'axe, des mêmes forces ou efforts de traction, s'obtiendra en multipliant l'intensité $Ed\omega\left(\frac{\theta^2 r^2}{2a^2} - \frac{\theta^2 r^2}{4a^2}\right)$ de l'une d'elles par $\frac{\theta}{a} r$, cosinus de l'angle qu'elle fait avec un plan perpendiculaire à l'axe, puis par r qui est son bras de levier si l'on néglige l'influence des contractions latérales accompagnant les dilatations longitudinales, et en ajoutant tous les produits. Remplaçant encore $d\omega$ par $2\pi r dr$ pour intégrer de 0 à r afin d'opérer cette addition, on obtient pour le moment total des résistances des fibres qui, devenues hélicoïdales, se sont allongées vers la circonférence et accourcies vers le centre

$$\frac{\pi E}{24} r^4 . \left(\frac{\theta}{a}\right)^3,$$

avec un nombre très-peu différent à la place de E si l'on tient compte d'une manière approchée des contractions latérales.

Depuis longtemps Young, sans donner ce calcul, avait remarqué que si la résistance à la torsion résidait dans l'action des fibres longitudinales ainsi étendues vers l'extérieur et (pour l'équilibre) contractées vers l'intérieur, cette résistance serait *comme le cube de l'angle de torsion* $\frac{\theta}{a}$; d'où il concluait, puisqu'elle est d'après l'expérience proportionnelle à cet angle, « qu'elle doit dépendre

(Du n° 156).

principalement, si ce n'est entièrement, de la rigidité ou de l'*adhésion latérale* qui s'oppose à la *détrusion* des particules, c'est-à-dire (§ 1 note du n° 152) à ce que nous avons appelé le glissement [1].

Dans les cas que nous considérerons exclusivement, *la torsion* $\frac{\theta}{a}$ *est très-petite*. La partie du moment de torsion que nous venons de calculer (et qui serait quadruple, ou égale à $\frac{\pi E}{6} r^4 \left(\frac{\theta}{a}\right)^3$ si les deux bases du prisme étaient maintenues à la même distance) est donc tout à fait négligeable devant l'autre; les fibres, qui ne se sont dilatées que de quantités très-petites du second ordre, peuvent être regardées comme n'ayant pas changé de longueur, et la contraction latérale est aussi nulle ainsi que le changement de volume du cylindre tordu.

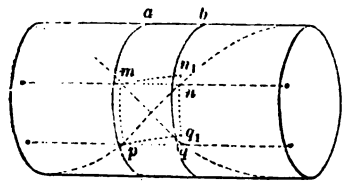
Mais si la *torsion* $\frac{\theta}{a}$, ou l'*arc mesurant pour un rayon* $= 1$, *la rotation relative de deux sections à l'unité de distance* n'est pas très-petite, cette partie du moment qui varie dans un autre rapport que la torsion et que la 4e puissance du rayon r peut être influente et il peut y avoir en même temps une diminution sensible du diamètre et du volume. C'est ce qui a eu lieu dans diverses expériences de M. Wertheim, où cette diminution du volume a été trouvée proportionnelle au carré du rayon.

§ 3. *Cette cause se trouve dans la résistance au glissement des sections l'une devant l'autre ou des fibres les unes contre les autres; ou, ce qui revient au même, dans la résistance à l'allongement et à l'accourcissement des diverses lignes matérielles hélicoïdales inclinées à 45 degrés sur l'axe de torsion. Première conséquence si la section reste plane.* — Si donc, par une petite torsion, les fibres élémentaires ou fibres longitudinales de molécules telles que mn, pq comprises entre deux sections consécutives sont devenues mn_1, pq_1, la cause de la résistance développée ne doit pas être cherchée dans

(1) *A course of lectures on natural Philosophy and the mecanical Arts*; Londres, 1807. Vol. I, lecture XIII, p. 139.

Nous n'avons, en français, que les mots *intrusion*, *intrus*, qui viennent du même radical que le mot latin *detrudere*, chasser, pousser dehors.

(Du n° 156).



les augmentations de longueur *très-petites du second ordre* qu'elles ont éprouvées, mais dans les inclinaisons qu'elles ont été obligées de prendre sur les sections, d'où est résulté un glissement relatif des éléments superficiels correspondants pm, qn de celles-ci, et, en même temps, un glissement relatif des fibres mn, pq elles-mêmes; glissements qui exigent une certaine force pour être opérés. Ce sera, si l'on veut (puisque tout glissement revient, comme on l'a vu au § 6 de la note du n° 152, à une dilatation et à une contraction dans des sens à 45 degrés), la résistance à l'allongement de la diagonale pn du petit carré $pmnq$ et à l'accourcissement de sa diagonale mq, allongement et accourcissement qui sont petits *du premier ordre* puisque leur proportion est $\frac{1}{2}\frac{nn_1}{mn}$ comme on a vu.

Il en résulte que si les deux sections consécutives pma, qnb restent planes et normales à l'axe de torsion, comme le glissement relatif $\frac{nn_1}{mn}$ de leurs deux éléments $d\omega$ dont les centres sont en m, n à la distance r de l'axe, a pour grandeur $\frac{\theta r}{a}$ et donne lieu à une résistance dont l'intensité est, G représentant le coefficient d'élasticité de glissement du § 5 de la note du n° 152,

$$G\frac{\theta r}{a}\,d\omega,$$

on a bien, en multipliant par le bras de levier r et en intégrant pour toute la section, la valeur suivante du moment de torsion

$$G\frac{\theta}{a}\int r^2 d\omega = G\frac{\theta}{a}\,J.$$

Cette expression, conforme au texte, est exacte *lorsque la section du prisme est circulaire*, car comme une pareille section n'a aucune raison de se courber plutôt en un point qu'en un autre également distant du centre, ni de prendre un bombement général

plutôt d'un côté que de l'autre, elle doit être plane après comme avant la torsion.

Elle peut encore être appliquée quelle que soit la forme du contour de la section, dans certaines circonstances exceptionnelles *où elle est astreinte à rester plane* (§ 10 de la note n° 152) ou empêchée de se gauchir, ce qui a lieu par exemple dans les prismes que M. Vicat appelle *infiniment courts*, ou de longueur nulle, qui sont sollicités à tordre par des forces agissant infiniment proche du plan de leur encastrement dans une matière rigide.

§ 4. *Courbure que prennent par la torsion les sections transversales primitivement planes lorsqu'elles n'en sont pas empêchées et que leur contour n'est pas circulaire. Conservation de leur normalité à la surface extérieure latérale du prisme tordu.* — Mais, dans tout autre cas, c'est-à-dire lorsqu'une section non circulaire sera libre de se courber, elle ne restera pas plane, et les glissements n'y seront pas représentés par $\frac{\theta}{a} r$, en sorte que le moment de torsion ne sera pas porportionnel au moment d'inertie polaire $J = \int r^2 d\omega$. Nous verrons même qu'il est égal à $G \frac{\theta}{a}$ multiplié par une *quantité constamment moindre que* J.

Rappelons en effet ce que nous avons dit (§ 1 de la note du n° 153), à savoir qu'aux points où la surface latérale d'un prisme est libre, ou soumise simplement à une force normale comme la pression atmosphérique, il n'y a, à l'intérieur, si la matière est d'égale élasticité, aucun glissement sur les éléments superficiels de cette surface; par conséquent *les petites lignes matérielles tracées primitivement sur ses sections normalement au contour et par conséquent à cette même surface extérieure, restent normales à la surface et au contour quel que soit leur petit changement de forme.* Il en résulte qu'après une torsion les arêtes du prisme devenues des hélices doivent (comme toute autre ligne tracée sur la surface extérieure) se projeter, sur la section, normalement à ces petites lignes normales, et par conséquent *tangentiellement au contour*, en sorte que le glissement principal sur les sections à leur contour ne peut être dirigé que suivant les éléments de ce contour.

(Du n° **156**).

Or toute hélice se projette, sur un plan perpendiculaire à son axe, suivant un cercle dont le centre est cet axe, et par conséquent normalement aux rayons vecteurs qui en émanent. Il faut donc, si la section d'un prisme tordu reste plane et perpendiculaire à l'axe de torsion, que son contour soit partout normal aux rayons vecteurs, c'est-à-dire que ce contour soit un cercle.

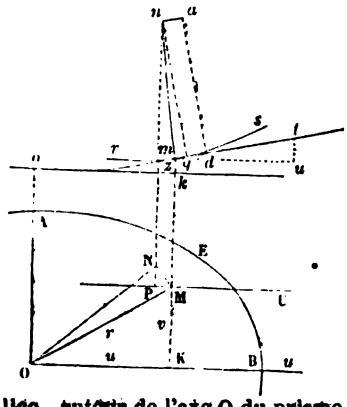
Il n'y a, ainsi, que les sections transversales circulaires qui restent, après la torsion, dans les endroits où la surface est libre, planes et perpendiculaires à l'axe de torsion. Toutes les sections ayant une autre forme se *gauchissent* ou changent leur plan en surfaces légèrement courbes, *coupant normalement partout la surface latérale après que celle-ci est changée de forme par la torsion.*

On peut le vérifier expérimentalement, du reste, en tordant un prisme de caoutchouc à base carrée ou rectangulaire. On verra les côtés primitivement rectilignes de ses sections transversales s'infléchir en S, en restant normaux aux quatre arêtes saillantes devenues des hélices qui *doivent, en effet, couper normalement la surface courbe affectée par la section*, puisque chacune d'elles est l'intersection de deux surfaces contiguës, normales l'une et l'autre à cette surface d'après ce qu'on vient de dire.

On peut également s'en convaincre au moyen d'un petit appareil permettant de tordre simultanément, autour d'un axe intermédiaire, deux prismes ou cylindres distants et parallèles, supposés solidaires ou astreints, par des liaisons rigides, à se regarder constamment par le même côté, ou à se comporter comme un seul corps. On verra (et on conçoit facilement qu'il en doit être ainsi) que les bases s'inclineront en sens opposé, sur leur plan primitif commun, de manière à rester à peu près normales aux axes partiels, ce qui exclut la conservation de la forme plane de la section totale qu'elles composent et de sa normalité à l'axe de rotation commun et intermédiaire (voyez plus loin).

§ 5. *Expressions des glissements provenant à la fois de la courbure des fibres en hélices et de la courbure des sections transversales primitivement planes d'un prisme tordu.* — Supposons donc qu'une

(Du n° 156).



section horizontale AEB d'un prisme vertical dont le centre est en O ait pris, au point M dont les coordonnées transversales sont u et v, une petite courbure de manière que rms soit, en projection verticale, la coupe par le plan vertical MU mené parallèlement à l'axe des abscisses Ou, et qu'en même temps la file verticale de molécules qui se projetait horizontalement en M se soit légèrement inclinée et courbée en hélice, autour de l'axe O du prisme, de sorte qu'une petite longueur de cette ligne se projette horizontalement suivant l'arc très-petit MN dont le centre est en O, et verticalement suivant la ligne presque droite mn. Appelons :

$r = \sqrt{u^2 + v^2}$ le rayon vecteur OM du point M ;

θ la torsion (ce qui a été appelé $\frac{\theta}{a}$ ci-dessus) *ou l'arc d'un rayon* $= 1$ *mesurant la rotation relative de deux sections du prisme à l'unité de distance l'une de l'autre ;*

g le glissement principal sur la section en M, ou la projection, sur son plan tangent en ce point, de l'unité de longueur portée sur la tangente à la ligne matérielle qui lui était primitivement normale ;

g', g'' ce glissement estimé suivant les coordonnées u, v, ou la projection de la même unité de longueur sur ce que sont devenues deux parallèles à ces coordonnées, menées sur la section par le même point M ; en sorte qu'on a $g^2 = g'^2 + g''^2$, vu que ces deux lignes n'ont pas cessé d'être sensiblement perpendiculaires ;

z L'ordonnée verticale mk du point m de la section courbée, ou sa distance au plan horizontal ok passant par son centre o ;

(Du n° 156).

$i = \frac{dz}{du}$ la *pente* ou l'inclinaison très-petite, au point (M, m), de la coupe rms ou de sa tangente mt sur ok ou sur le plan horizontal;

$j = \frac{dz}{dv}$ la pente, aussi en M, de la section dans le sens v, ou de la coupe de cette surface par un plan vertical parallèle aux ordonnées v.

Si la section était restée plane et horizontale, on aurait les glissements

$$g = 0r, \quad g' = -0v, \quad g'' = 0u:$$

car, mn étant pris pour unité de longueur, sa projection horizontale MN $= 0r$ serait le glissement sur la section, et NPM étant un petit triangle rectangle semblable au triangle OKM dont les côtés sont u, v, r, on aurait bien $g' = -\text{MP} = -0v$, $g'' = \text{NP} = 0u$.

Si, d'un autre côté, la section s'étant courbée, la fibre en M était restée verticale, le glissement g' serait la projection md, sur la tangente mt, de l'unité de longueur ma portée sur cette verticale ma; projection qui ne serait autre chose que la mesure du petit angle d'inclinaison tmu de la tangente mt sur l'horizontale mu, en sorte qu'on aurait

$$g' = i = \frac{dz}{du}; \text{ et de même } g'' = j = \frac{dz}{dv}.$$

Les valeurs effectives de g' et de g'', d'après le principe de composition géométrique des déplacements très-petits, et par conséquent d'addition algébrique de ceux qui sont estimés dans le même sens, sont sommes de celles qui viennent d'être trouvées dans ces deux hypothèses. Et c'est ce qu'on voit bien sur la figure pour le glissement g' suivant les u. En effet, il est mesuré par mq, projection de $mn = 1$ sur la tangente mt; or $mq = md - qd$, et $qd = na = \text{PM}$.

On a donc, au point (M, m), pour les glissements suivant les coordonnées u, v, dus à la fois à l'inclinaison prise par la fibre et à l'inclinaison prise par l'élément de la section :

$$g' = i - 0v, \quad g'' = j + 0u.$$

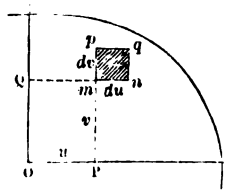
(Du n° 156).

Et, par suite, pour la grandeur du glissement principal ou résultant sur la section :

$$g = \sqrt{(i - \theta v)^2 + (j + \theta u)^2}.$$

Ces glissements g' et g'' sont aussi, comme on l'a vu au § 4 de la note du n° 152, *ceux qui ont lieu sur la fibre* en M, dans les plans respectivement parallèles aux u et aux v, ou les glissements, estimés verticalement ou longitudinalement, *qui ont lieu sur les faces verticales* menées en M parallèlement aux v et parallèlement aux u.

§ 6. *Condition générale que doivent remplir, en tous leurs points, les surfaces légèrement courbes dans lesquelles se changent les plans des sections des prismes tordus. Nullité de la somme des courbures de deux coupes à angle droit. Expression de cette condition par une équation différentielle.* — Supposons que toutes les sections d'un prisme aient tourné uniformément l'une devant l'autre d'angles égaux aux produits de θ par leurs distances restées les mêmes ainsi que les distances mutuelles transversales des points de chacune, mais que ces points aient éprouvé de petits déplacements longitudinaux, les mêmes pour ceux qui se correspondaient primitivement sur une même parallèle à l'axe, de manière à faire prendre aux surfaces de toutes les sections la même forme courbe.



Soit $mnqp$ la base d'une fibre ayant une largeur $mn = du$ et une épaisseur $mp = dv$ et supposée terminée, avant la petite déformation provenant de la torsion, par des plans mn, pq et mp, nq parallèles à l'axe de torsion O et respectivement aux coordonnées u, v du point m.

Établissons l'équation d'équilibre de translation longitudinale de la petite portion de cette fibre rectangulaire contenue entre deux sections très-voisines. On suppose qu'elle n'éprouve aucune traction longitudinale ou parallèle à l'axe, et on abstrait sa pesanteur. Les seules forces longitudinales s'exerçant sur les quatre faces latérales mn, pq, mp, nq, sont des actions tangentielles provenant des glissements, aussi longitudinaux, qui y ont lieu, ou des petits degrés d'obliquité pris sur les arêtes par les lignes primitivement

(Du n° 156).

normales aux faces. Elles sont égales (§ 5 de la note n° 152) à ces glissements multipliés par un même coefficient G si la contexture est égale dans tous les sens transversaux.

Or le glissement sur la face mp, estimé longitudinalement ou dans le sens de l'arête m, a la même grandeur, au point de m de la section, que le glissement sur la section, estimé suivant la ligne mn perpendiculaire à cette face latérale mp, puisque ce sont les projections, nécessairement égales, sur chacune de ces deux lignes primitivement orthogonales (l'arête m et le côté mn) de l'unité de longueur portée sur l'autre, ou puisqu'ils ne sont autre chose que le petit retrécissement éprouvé par leur angle droit.

C'est le glissement appelé g' au § précédent.

L'action sur la face latérale mp de la fibre, décomposée longitudinalement, est donc, par unité superficielle,

$$Gg'.$$

L'action sur la face adjacente mn, décomposée aussi longitudinalement, est par la même raison

$$Gg''.$$

Comme il s'exerce, sur les faces opposées nq, pq, des actions longitudinales opposées à celles-ci, la condition d'équilibre est, en supposant $mn = mp$, qu'on ait zéro pour la somme des quantités dont le glissement sur nq excède le glissement sur mp et dont le glissement sur pq excède le glissement sur mn, ou qu'on ait

$$\frac{dg'}{du} + \frac{dg''}{dv} = 0;$$

ce qui, en mettant pour g' et g'' leurs valeurs $i - \theta v$ et $j + \theta u$ du § précédent, donne

$$\frac{di}{du} + \frac{dj}{dv} = 0,$$

ou l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{d^2z}{du^2} + \frac{d^2z}{dv^2} = 0.$$

Mais nous exprimerons cette condition sans cesser de raisonner d'une manière élémentaire si nous appelons :

i_1 la valeur que prend la pente i de la surface courbe de la section dans le sens u quand on passe du point m au point très-voisin n sur une même parallèle à u ; ou l'inclinaison, sur l'ancien plan de la section, en ce dernier point n, de la tangente à la coupe de cette surface par le plan vertical mené en m parallèlement à la coordonnée u ;

j_1 de même la valeur que prend la pente j dans le sens v, quand on passe au point p, supposé à une distance $mp = mn$ du point m sur une parallèle à v ;

L'équilibre exigera que la somme des actions longitudinales $G(i_1 - \theta v)$, $G(j_1 + \theta u)$ sur les faces nq, pq, égale la somme des actions respectivement opposées $G(i - \theta v)$, $G(j + \theta u)$ sur les faces mp, mn. Les termes en θ disparaissent et il reste

$$(i_1 - i) + (j_1 - j) = 0.$$

La signification géométrique de cette équation générale très-simple est facile à saisir.

Elle montre que la surface peu courbe affectée par la section du prisme tordu doit être telle qu'à partir de chacun de ses points la pente croisse autant dans une direction quelconque qu'elle décroît dans une direction perpendiculaire, ou que, si on la coupe par deux systèmes de plans orthogonaux menés parallèlement à l'axe de torsion, les lignes courbes qui en résultent aient, sur un plan perpendiculaire au même axe, des inclinaisons dont l'une augmente justement de ce dont l'autre diminue lorsqu'on passe d'un point quelconque où deux d'entre elles se croisent à des points voisins également distants sur l'une et sur l'autre coupe.

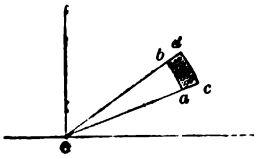
En sorte que les *courbures* très-petites de ces deux coupes soient partout égales et opposées.

§ 7. *Démonstration plus directe de cette propriété générale des surfaces courbes affectées par les sections transversales des prismes après leur torsion.* — Dans la torsion d'un prisme, supposé vertical pour fixer les idées, les lignes matérielles verticales se courbent, et les sections horizontales se courbent légèrement aussi. Les petits déplacements relatifs des points d'une petite portion du

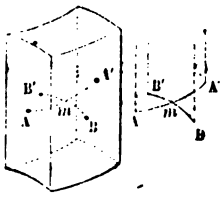
(Du n° 156).

solide sont résultants géométriques de ceux qui seraient dus séparément à la seule courbure des lignes verticales, les sections restant planes et horizontales, et à la seule courbure des sections, les fibres ou lignes de molécules restant verticales et droites ; et les actions exercées longitudinalement sur une fibre ou un élément prismatique vertical quelconque sont sommes de celles qui seraient développées séparément par ces déplacements composants.

Or les actions qui proviennent de la seule courbure des files verticales de molécules en hélices de même pas et de même axe se font équilibre. On le voit facilement en divisant le prisme en fibres dont les bases soient de petites portions de secteur *abdc* comprises entre deux rayons vecteurs O*ac*, O*bd* et deux arcs de cercle *ab*, *cd* ayant leur centre sur l'axe O des hélices; car la fibre n'est pas sollicitée tangentiellement à ses faces cylindriques *ab*, *cd*, puisque les lignes telles que O*ac*, O*bd* qui leur étaient normales leur sont encore normales; et, comme la base est restée, disons-nous, horizontale, la fibre est sollicitée par des forces contraires justement égales sur ses faces égales *ac*, *bd*, qui s'inclinent également toutes deux sur leurs anciennes normales restées horizontales.



Les tendances à la translation verticale ou longitudinale des fibres ne peuvent donc venir que de la seconde cause, ou de la courbure des sections supposée avoir lieu seule. Or considérons une portion de fibre supposée maintenant à base carrée, dont les arêtes sont ainsi restées verticales, mais dont les sections primitivement planes se sont changées en surfaces légèrement courbes. Soient A*m*A', B*m*B' les coupes de la section à égale distance des deux bases, par les deux plans verticaux à égale distance des faces latérales. Il y aura sur ces quatre faces des actions tangentielles proportionnelles aux petits degrés d'obliquité pris sur leurs plans par les coupes qui leur étaient primitivement perpendiculaires ; ces actions décomposées longitudinalement seront proportionnelles aux obliquités estimées longitu-



dinalement aussi. En désignant donc les faces latérales, égales en superficie, par leurs centres A, A', B, B', la face A' est sollicitée par une force de bas en haut proportionnelle à l'obliquité qu'a prise en A', sur la verticale, la ligne AmA' prolongée, ou par une force proportionnelle à l'inclinaison, sur l'horizon, de la tangente en A' à cette courbe. La surface opposée A est sollicitée de haut en bas par une force proportionnelle à l'inclinaison possédée, de même, par la tangente en A. La même chose peut être dite des faces B', B et des inclinaisons, sur l'horizon, des tangentes à la courbe BMB' aux points B' et B

Donc, pour l'équilibre, la différence des pentes ou inclinaisons de la coupe AA' aux points A' et A doit être compensée par la différence des pentes ou inclinaisons de la coupe BB' aux points B' et B.

Or c'est précisément ce qu'exprime l'équation $(i_1-i)+(j_1-j)=0$ ci dessus, qui est la même chose que $\frac{di}{du}+\frac{dj}{dv}=0$ ou que l'équation aux dérivées partielles $\frac{d^2z}{du^2}+\frac{d^2z}{dv^2}=0$ si les côtés des bases carrées des fibres sont pris parallèles aux coordonnées transversales u, v des points de la section.

§ 8. *Condition particulière aux points du contour des sections des prismes tordus.* — Il faut, avons nous dit, vu la nullité supposée de toute action tangentielle et par suite de tout glissement sur les faces latérales du prisme, que la section courbée les coupe normalement, et que les lignes matérielles qui étaient primitivement normales à ces faces latérales leur restent normales ainsi qu'au contour de la section et aux arêtes devenues des hélices, d'où il suit que *ces hélices devront se projeter sur la section, ou sur ses plans tangents, tangentiellement au contour.*

Or un élément du contour dont la forme est donnée par une équation entre les coordonnées u et v, a pour projections

du sur l'axe des u, dv sur l'axe des v.

La fibre en hélice se projette sur le contour dans la direction du *glissement principal* qui a pour projections

$i-\theta v$ sur l'axe des u, $j+\theta u$ sur l'axe des v.

(Du n° 150).

Pour que ces deux directions soient les mêmes il faut que

$$\frac{dv}{du} = \frac{j + \theta u}{i - \theta v};$$

en sorte que la condition particulière aux points du contour qui doit servir, avec la condition $i_1 - i + j_1 - j = 0$ ou $\frac{d^2z}{du^2} + \frac{d^2z}{dv^2} = 0$ relative à tous les points de la section, à déterminer la forme courbe de la surface, est

$$(j + \theta u)du - (i - \theta v)dv = 0,$$

ou

$$\left(\frac{dz}{dv} + \theta u\right)du - \left(\frac{dz}{du} - \theta v\right)dv = 0.$$

§ 9. *Actions tangentielles sur les sections. Moment de torsion. Détermination générale de la torsion quand on donne ce moment.* — Si un prisme a éprouvé d'un bout à l'autre une torsion uniforme et très-petite θ en sorte que toutes ses files longitudinales de molécules se soient changées en des hélices ayant le même axe et un même pas $\frac{2\pi}{\theta}$, et si les plans de ses sections transversales sont devenus des surfaces courbes satisfaisant, en tous leurs points, à la condition générale ou *indéfinie* (§§ 6 et 7)

$$(i_1 - i) + (j_1 - j) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2z}{du^2} + \frac{d^2z}{dv^2} = 0,$$

et, de plus, aux points du contour, à la condition particulière ou définie (§ 8),

$$(j + \theta u)du - (i - \theta v)dv = 0 \text{ ou } \left(\frac{dz}{dv} + \theta u\right)du - \left(\frac{dz}{du} - \theta v\right)dv = 0,$$

les éléments $d\omega$ des sections éprouveront des actions tangentielles

$$G(i - \theta v)d\omega = G\left(\frac{dz}{du} - \theta v\right)d\omega \text{ dans le sens } u,$$

$$G(j + \theta u)dv = G\left(\frac{dz}{dv} + \theta u\right)d\omega \text{ dans le sens } v.$$

Réciproquement si, les faces latérales étant supposées n'éprouver aucune action, les éléments $d\omega$ des bases extrêmes ω d'un prisme

(Du n°. 156).

sont sollicitées par les forces tangentielles dont nous venons d'écrire les expressions, dans lesquelles z et par conséquent i et j sont des fonctions de u et v dépendant de la forme du contour et satisfaisant aux conditions *indéfinie* et *définie* qu'on vient aussi dénoncer, *il y aura équilibre* dès que ce prisme se sera tordu uniformément d'un petit angle θ par unité de longueur.

En appelant M_1 le *moment de torsion*, c'est-à-dire le moment total, autour de l'axe, des forces extérieures appliquées aux bases, ou des forces intérieures s'exerçant à travers une section quelconque et qui leur font équilibre, on aura, en supposant que ce moment fasse tourner de u en v, ou de droite à gauche pour un observateur adossé à l'axe du prisme :

$$M_1 = G\int_0^\omega (g''d\omega.u - g'd\omega.v) = G\int_0^\omega [(j+\theta u)u - (i-\theta v)v]d\omega.$$

Si les forces qui font éprouver à un prisme une torsion toujours supposée *très-petite*, sans être distribuées sur les éléments des bases extrêmes tout à fait comme l'exigent les expressions ci-dessus des actions tangentielles, et même sans agir sur ces bases, sont appliquées tout auprès des extrémités d'une manière symétrique par rapport à l'axe du prisme, supposé être l'axe de torsion, de manière à former des couples dont les moments aient toujours la valeur M_1 qu'on vient de donner, et si le prisme a une longueur très-grande par rapport à ses dimensions transversales, un raisonnement comme ceux des §§ 6 des notes des n°s 21 et 30 relatives à l'extension simple et à la flexion, et qui sont tirés de la presque indifférence du mode d'application et de distribution des forces, suffira pour convaincre qu'en exceptant des points très-rapprochés de ceux où agissent les forces qui font tordre, le prisme se comportera de la même manière que si les forces avaient été appliquées et distribuées conformément aux expressions $G(i-\theta v)d\omega$, $G(j+\theta u)d\omega$.

Il prendra donc d'un bout à l'autre la torsion θ supposée très-petite.

Lors donc qu'un prisme est soumis à l'action d'un couple M_1 autour de son axe, il faut en général, pour déterminer sa torsion θ,

(Du n° 156).

---

intégrer l'équation aux différences partielles $\frac{d^2z}{du^2} + \frac{d^2z}{dv^2} = 0$, avec la condition au contour $\left(\frac{dz}{dv} + \theta u\right) du - \left(\frac{dz}{du} - \theta v\right) dv = 0$ particularisée pour la forme donnée du contour de la base; et après avoir déduit, de l'expression trouvée pour z, celles des pentes $\frac{dz}{du} = i$, $\frac{dz}{dv} = j$, affectées aussi de l'inconnue θ, les substituer dans l'expression ci-dessus du moment M_1, ce qui donnera une équation dont on tirera la valeur cherchée de θ.

§ 10. *Contours de sections, en nombre infini, pour lesquels on obtient immédiatement la forme de la surface courbe dans laquelle la torsion change leur plan.* — L'intégration dont on vient de parler, pour une forme donnée du contour, peut être difficile et même impossible. Elle ne s'opère, quand la section est rectangulaire, que par séries transcendantes (voy. ci-après). Mais on n'a pas besoin d'intégrer si même, en quelque sorte, de se servir des signes de différentiation, en résolvant (ce qui suffit généralement pour les applications) le problème inverse, consistant à *se donner la forme de la surface courbe de la section*, ou seulement les expressions de ses deux *pentes* i et j, et *à chercher les formes correspondantes du contour.*

En se bornant ici aux formes algébriques entières, il est facile de vérifier que l'équation générale suivante de la surface courbe des sections primitivement planes d'un prisme ayant éprouvé une torsion θ, équation où $c_1, c_2, c_3 \ldots, c'_1, c'_2, c'_3 \ldots$, sont des constantes absolument quelconques pouvant être nulles en tel nombre qu'on veut :

$$z = \theta \left\{ \begin{array}{l} c_1 v + c_2 . 2uv + c_3 (3u^2 v - v^3) + c_4 (4u^3 v - 4uv^3) + c_5 (5u^4 v - 10u^2 v^3 + v^5) + \ldots \\ + c'_1 u + c'_2 (u^2 - v^2) + c'_3 (u^3 - 3uv^2) + c'_4 (u^4 - 6u^2 v^2 + v^4) + c'_5 (u^5 - 10u^3 v^2 + 5uv^4) + \ldots \end{array} \right\}$$

et qui donne pour les glissements $i - \theta v$, $j + \theta u$:

$$z' = \frac{dz}{du} - \theta v = \theta \left\{ \begin{array}{l} -v + 2c_2 v + 3c_3 . 2uv + 4c_4 (3u^2 v - v^3) + 5c_5 (4u^3 v - 4uv^3) + \ldots \\ + c'_1 + 2c'_2 u + 3c'_3 (u^2 - v^2) + 4c'_4 (u^3 - 3uv^2) + 5c'_5 (u^4 - 6u^2 v^2 + v^4) + \ldots \end{array} \right\},$$

$$z'' = \frac{dz}{dv} + \theta u = \theta \left\{ \begin{array}{l} c_1 + 2c_2 u + 3c_3 (u^2 - v^2) + 4c_4 (u^3 - 3uv^2) + 5c_5 (u^4 - 6u^2 v^2 + v^4) + \ldots \\ u - 2c'_2 v - 3c'_3 . 2uv - 4c'_4 (3u^2 v - v^3) - 5c'_5 (4u^3 v - 4uv^3) - \ldots \end{array} \right\}$$

répond aux contours représentés par l'équation suivante, où la constante K du second membre peut recevoir toutes les valeurs possibles, en sorte qu'à chaque surface répond une infinité de contours :

$$\frac{u^2+v^2}{2}+C_1u+C_2(u^2-v^2)+C_3(u^3-3uv^2)+C_4(u^4-6u^2v^2+v^4)+C_5(u^5-10u^3v^2+5uv^4)+\ldots$$
$$-C'_1v-C'_2.2uv-C'_3(3u^2v-v^3)-C'_4(4u^3v-4uv^3)-C'_5(5u^4v-10u^2v^3+v^5)+\ldots=K.$$

En effet, sans invoquer d'autre théorème d'analyse infinitésimale que celui qui est exprimé par

$$(1+\varepsilon)^n-1=n\varepsilon \quad \text{quand } \varepsilon \text{ est infiniment petit } (^1),$$

on peut en donnant, dans la valeur générale de z, des accroissements infiniment petits successivement à u et à v et en divisant, par ces accroissements, ceux qui en résultent pour z, trouver immédiatement les pentes i, j, et, par suite, les expressions qu'on vient d'écrire pour $g'=i-0v$ et $g''=j+0u$. Ensuite, en faisant croître de quantités infiniment petites et égales, u dans la première expression, et v dans la seconde, on a zéro pour la somme des accroissements qu'elles prennent, ce qui vérifie bien la condition $(i_1-i)+(j_1-j)=0$. Enfin si, dans l'équation générale que nous venons de donner pour le contour, on fait croître infiniment peu les deux coordonnées à la fois, et si l'on retranche membre à membre, de l'équation nouvelle ainsi obtenue, l'équation primitive, on tire pour le rapport de ces deux accroissements de v et de u, précisé-

(1) On a démontré élémentairement avec son inverse, au § 3 de la note du n° 84, ce théorème sur lequel on se base à chaque instant, même dans les cours d'Arts-et-métiers, et qui n'est remplaçable que jusqu'à $n=4$ par des considérations d'aires, de volumes et de centres de gravité de triangles ou de pyramides.

Quand on l'a prouvé pour n entier positif quelconque au moyen d'une suite de multiplications par $1+\varepsilon$, il est facile de l'étendre à n fractionnaire ou négatif; car 1° si l'on extrait la racine $n$ième des deux membres de $1+n\varepsilon=(1+\varepsilon)^n$ avec n entier positif, et si on les élève ensuite à la puissance m aussi entière positive, on a $(1+n\varepsilon)^{\frac{m}{n}}=(1+\varepsilon)^m=1+m\varepsilon=1+\frac{m}{n}.n\varepsilon$. 2° Si l'on multiplie les deux membres de $1+n\varepsilon=(1+\varepsilon)^n$ par $(1-n\varepsilon)(1+\varepsilon)^{-n}$, on a, en transposant : $(1+\varepsilon)^{-n}=1-n\varepsilon+n^2\varepsilon^2(1+\varepsilon)^{-n}$, équation où l'on peut effacer le dernier terme du second membre comme infiniment plus petit que le second.

(Du n° 156).

ment le rapport $\frac{g''}{g'} = \frac{j + \theta u}{i - \theta v}$, ce qui vérifie la condition particulière ou *définie* $g''du - g'dv = 0$ du § 8 relative aux points du contour de la section.

Il est facile de prolonger autant qu'on veut les expressions de z, de g', g'', et le premier membre de l'équation générale $\frac{u^2 + v^2}{2} + \cdots = K$ du contour, car les termes des polynômes de divers degrés en u et v multipliés par les coefficients arbitraires c_2, c'_2, c_3, c'_3, ... ne sont autre chose que ceux des puissances $(u + v)^2$, $(u + v)^3$, $(u + v)^4$, ... du binôme $u + v$, mais pris de deux en deux et affectés alternativement des signes + et —, en sorte qu'on aurait pour ceux des 6e, 7e, 8e degrés :

$$\begin{array}{lcl} u^6 - 15u^4v^2 + 15u^2v^4 - v^6 & \text{et} & 6u^5v - 20u^3v^3 + 6uv^5, \\ u^7 - 21u^5v^2 + 35u^3v^4 - 7uv^6 & \text{et} & 7u^6v - 35u^4v^3 + 21u^2v^5 - v^7, \\ u^8 - 28u^6v^2 + 70u^4v^4 - 28u^2v^6 + v^8 & \text{et} & 8u^7v - 56u^5v^3 + 56u^3v^5 - 8uv^7, \end{array}$$

etc.

On peut voir, au reste, que l'expression générale de z est ce qu'on obtient par la méthode des coefficients indéterminés en cherchant à satisfaire à $\frac{d^2z}{du^2} + \frac{d^2z}{dv^2} = 0$ par une expression polynôme entière en u, v; ou bien en mettant des expressions entières à la place des fonctions arbitraires φ et ψ de l'intégrale générale connue

$$z = \varphi(u + v\sqrt{-1}) + \psi(u - v\sqrt{-1})$$

de cette équation, et développant puis donnant aux coefficients des valeurs telles que les imaginaires disparaissent.

§ 11. *Formules en coordonnées polaires.* — On manifeste mieux la loi en se servant de ces coordonnées ou en faisant

$$u = r\cos\alpha,\ v = r\sin\alpha,\ \text{ou}\ r = \sqrt{u^2 + v^2},\ \alpha = \text{arc tang}\,\frac{v}{u},$$

car, en remplaçant encore les fonctions φ, ψ par des développements suivant des puissances n... de leurs variables, on a, A, A' étant des coefficients quelconques,

$$z = \Sigma\,[A_n r^n(\cos n\alpha + \sqrt{-1}\sin n\alpha) + A'_n r^n(\cos n\alpha - \sqrt{-1}\sin n\alpha)]\,;$$

(Du n° **156**).

ou, en faisant $A_n + A'_n = c'_n$, $(A_n - A'_n)\sqrt{-1} = c_n$ pour chasser les imaginaires, et en supposant les exposants n entiers et positifs,

$$z = \theta \left\{ \begin{array}{l} c_1 r \sin\alpha + c_2 r^2 \sin 2\alpha + c_3 r^3 \sin 3\alpha + \cdots \\ + c'_1 r \cos\alpha + c'_2 r^2 \cos 2\alpha + c'_3 r^3 \cos 3\alpha + \cdots \end{array} \right\};$$

à quoi correspondent, pour l'équation du contour,

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{2} &+ c_1 r \cos\alpha + c_2 r^2 \cos 2\alpha + c_3 r^3 \cos 3\alpha + \cdots \\ &- c'_1 r \sin\alpha - c'_2 r^2 \sin 2\alpha - c'_3 r^3 \sin 3\alpha - \cdots = K; \end{aligned}$$

et, pour les glissements suivant les u, les v :

$$g' = \theta \left\{ \begin{array}{l} -r\sin\alpha + 2c_2 r \sin\alpha + 3c_3 r^2 \sin 2\alpha + 4c_4 r^3 \sin 3\alpha + \cdots \\ + c'_1 \quad + 2c'_2 r \cos\alpha + 3c'_3 r^2 \cos 2\alpha + 4c'_4 r^3 \cos 3\alpha + \cdots \end{array} \right\},$$

$$g'' = \theta \left\{ \begin{array}{l} c_1 + 2c_2 r \cos\alpha + 3c_3 r^2 \cos 2\alpha + 4c_4 r^3 \cos 3\alpha + \cdots \\ + r\cos\alpha - 2c'_2 r \sin\alpha - 3c'_3 r^2 \sin 2\alpha - 4c'_4 r^3 \sin 3\alpha - \cdots \end{array} \right\}.$$

Le glissement principal g, dont les projections sur les u et sur les v sont g' et g'', est, comme on voit, en le divisant par θ, une résultante générale de lignes

$$r, \quad c_1, \quad 2c_2 r, \quad 3c_3 r^2 \ldots; \; c'_1, \; 2c'_2 r, \; 3c'_3 r^2, \ldots$$

faisant avec l'axe des u les angles

$$\frac{\pi}{2} + \alpha, \; \frac{\pi}{2}, \; \frac{\pi}{2} - \alpha, \; \frac{\pi}{2} - 2\alpha \ldots, \; 0, \; -\alpha, \; -2\alpha, \ldots$$

Cette résultante $\frac{g}{\theta}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{g^2}{\theta^2} &= r^2 + (c_1^2 + c'^2_1) + (c_2^2 + c'^2_2)(2r)^2 + (c_3^2 + c'^2_3)(3r^2)^2 + (c_4^2 + c'^2_4)(4r^3)^2 + \ldots \\ &+ 2.1(c_1 \cos\alpha - c'_1 \sin\alpha) r + 2.2(c_2 \cos 2\alpha - c'_2 \sin 2\alpha) r^2 + 2.3(c_3 \cos 3\alpha - c'_3 \sin 3\alpha) r^3 + \ldots \\ &+ 2.1.2[(c_1 c_2 + c'_1 c'_2)\cos\alpha - (c_1 c'_2 - c_2 c'_1)\sin\alpha] r + 2.1.3[(c_1 c_3 + c'_1 c'_3)\cos 2\alpha - (c_1 c'_3 - c_3 c'_1)\sin 2\alpha] r^2 + 2. \\ &\qquad + 2.2.3[(c_2 c_3 + c'_2 c'_3)\cos\alpha - (c_2 c'_3 - c_3 c'_2)\sin\alpha] r^3 + 2. \\ &\qquad\qquad + 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= r^2 + \Sigma(c_n^2 + c'^2_n)(nr^{n-1})^2 + 2\Sigma n(c_n \cos n\alpha - c'_n \sin n\alpha) r^n + \\ &\quad + 2\Sigma\Sigma nm[(c_n c_m + c'_n c'_m)\cos(m-n)\alpha - (c_n c'_m - c_m c'_n)\sin(m-n)\alpha] r^{m+n} \end{aligned}$$

expression dans le dernier terme de laquelle n, m sont deux indices inégaux dont le second est plus grand que le premier. On

(Du n° 156).

pourrait la changer en une expression en coordonnées ordinaires u, v en mettant u, v, u^2-v^2, $2uv$, u^3-3uv^2, $3u^2v-v^3$, etc. pour $r\cos\alpha$, $r\sin\alpha$, $r^2\cos 2\alpha$, $r^2\sin 2\alpha$, $r^3\cos 3\alpha$, $r^3\sin 3\alpha$, etc.

Mais on a aussi les solutions plus générales suivantes, où les indices n, n' peuvent être des nombres quelconques entiers ou fractionnaires, positifs, négatifs ou nuls :

Équation de la surface $z = \theta\,(\Sigma c_n r^n \sin n\alpha + \Sigma c'_{n'} r^{n'} \cos n'\alpha)$,

Glissements
$$\begin{cases} g' = \theta\,[-r\sin\alpha + \Sigma n c_n r^{n-1}\sin(n-1)\alpha + \Sigma n' c'_{n'} r^{n'-1}\cos(n'-1)\alpha] \\ g'' = \theta\,[\;\;r\cos\alpha + \Sigma n c_n r^{n-1}\cos(n-1)\alpha - \Sigma n' c'_{n'} r^{n'-1}\sin(n'-1)\alpha]. \end{cases}$$

Équation du contour $\dfrac{r^2}{2} + \Sigma c_n r^n \cos n\alpha - \Sigma c'_{n'} r^{n'} \sin n'\alpha = K.$

Il existe, au reste, d'autres intégrales particulières de l'équation aux différences partielles $\dfrac{d^2z}{du^2} + \dfrac{d^2z}{dv^2} = 0$ (voyez § 25). A chacune d'elles, arbitrairement choisie pour équation de la surface modifiée de la section, répond une forme de contour, et même une infinité de formes représentées par des équations faciles à obtenir, ne *différant entre elles que par la valeur d'un terme constant* tel que le second membre K ci-dessus. En effet, en écrivant $\dfrac{dz}{dv}du - \dfrac{dz}{du}dv = -\theta d\,\dfrac{u^2+v^2}{2}$ la condition (§ 8) $\left(\dfrac{dz}{dv} + \theta u\right)du - \left(\dfrac{dz}{du} - \theta v\right)dv = 0$ qui appartient aux points du contour, et qui est ainsi son équation différentielle quand on met pour z une valeur en u, v, son premier membre forme une différentielle complète comme le second, si z satisfait à la condition connue d'intégralité $\dfrac{d\left(\dfrac{dz}{dv}\right)}{dv} = \dfrac{d\left(-\dfrac{dz}{du}\right)}{du}$, qui revient à l'équation aux différences partielles $\dfrac{d^2z}{du^2} + \dfrac{d^2z}{dv^2} = 0$.

§ 12. *Cas où les contours des sections ont une forme symétrique*, etc. — Lorsque la symétrie a lieu par rapport à l'axe des u, il ne doit y avoir, dans l'équation des contours en coordonnées ordi-

(Du n° 156).

naires $\frac{u^2+v^2}{2}+\cdots=K$ du § 10, que les termes contenant des puissances paires de v, afin que l'équation ne change pas quand on met $-v$ pour v; ce qui donne

$$C'_1=0,\quad C'_2=0,\quad C'_3=0,\quad C'_4=0,\quad \ldots\ldots$$

L'expression du petit déplacement longitudinal z se réduit à la première ligne entre accolades, et on a $z=0$ pour $v=0$, en sorte *que toute ligne de symétrie reste immobile ou dans le plan primitif de la section quand l'axe de torsion traverse la section en un point de cette ligne;* ce qui pouvait être déduit, plus généralement, de cette simple remarque que la ligne de symétrie n'a pas de raison de s'écarter de ce plan primitif d'un côté plutôt que de l'autre, lorsque le prisme est tordu uniformément par des forces agissant d'une manière symétrique aux deux bouts.

Pour des contours symétriques par rapport à l'axe des v, on doit avoir par une raison semblable :

$$C_1=0,\qquad C_3=0,\qquad C_5=0,\qquad \ldots\ldots$$
$$C'_2=0,\qquad C'_4=0,\qquad C'_6=0,\ldots\ldots$$

Si les contours sont symétriques par rapport à chacun de ces deux axes, tous ces coefficients s'annulent et il ne reste que les termes en

$$C_2,\qquad C_4,\qquad C_6,\qquad C_8,\qquad \ldots\ldots$$

Et, pour les contours qui sont, en outre, *égaux dans les deux sens* u, v, l'équation ne doit contenir, avec le terme $\frac{u^2+v^2}{2}$ ou $\frac{r^2}{2}$ obligé pour toutes les équations qui les représentent en termes algébriques entiers, que des termes en

$$C_4,\qquad C_8,\qquad C_{12},\qquad \ldots\ldots$$

ou du 4e, du 8e, du 12e ..... degré à puissances paires; ce qui réduit

(Du n° 156).

l'équation $z = \ldots\ldots$ de la surface à des termes aussi de ces degrés 4, 8, 12, etc... mais à puissances impaires de u et de v.

Pour les contours qui ont simplement un centre sur l'axe de torsion, ou dont l'équation reste la même quand on change *à la fois* u, v, en $-u$, $-v$, les coefficients d'indice impair doivent être nuls, ou on doit avoir $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, ..., $C'_1 = 0$, $C'_3 = 0$, ...

Avant de particulariser de diverses manières les contours des sections, nous allons exposer quelques propriétés communes à tous les prismes tordus.

§ 13. *Réduction, à un couple, des forces tangentielles agissant sur chacune des deux bases ou sur chaque section transversale de tout prisme ainsi tordu uniformément.* — Quels que soient les contours des sections, symétriques ou non, représentés par une équation soit algébrique, soit transcendante, on a toujours sur chaque section ω, et pour toute son étendue :

$$\int g' d\omega = 0, \quad \int g'' d\omega = 0.$$

En effet, les forces tangentielles extérieures $Gg'd\omega$, $Gg''d\omega$ agissant sur les éléments $d\omega$ d'une des deux bases du prisme parallèlement aux coordonnées u, v, et les forces égales, aussi extérieures et par conséquent de sens opposés $-Gg'd\omega$, $-Gg''d\omega$ qui agissent de même sur les éléments de l'autre base, ces forces, disons-nous, font équilibre aux actions intérieures de ce solide, puisque ses faces latérales ne supportent aucune action par hypothèse. Elles doivent donc se faire équilibre entre elles comme on l'entend en statique élémentaire, ou remplir les conditions connues de l'équilibre des forces sur les systèmes solides. Or c'est ce qui ne saurait avoir lieu si, sur chaque base, leurs sommes $\pm G\int g'd\omega$, $\pm G\int g''d\omega$ dans chaque sens ne sont pas nulles séparément; car alors, considérées à la fois sur les deux bases, elles feraient un couple ayant pour bras de levier la longueur du prisme, et l'équilibre n'existerait pas.

Cette nullité des sommes $\int g'd\omega$, $\int g''d\omega$ se vérifie d'elle-même lorsque la section a un centre et que l'axe de torsion y passe; car alors on a (§ précédent) $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, ..., $C_1' = 0$, $C_3' = 0$, ..., ce qui rend égales, au signe près, deux valeurs, soit de g', soit

de g'' relatives à des points ayant les mêmes coordonnées u, v aussi au signe près, et nulles par conséquent les sommes de leurs produits par des éléments égaux $d\omega$. Mais on voit que les mêmes conditions $\int g' d\omega = 0$, $\int g'' d\omega = 0$ sont remplies aussi lorsque l'axe de rotation ne passe pas au centre ou que la section n'a même pas de centre; nous avons pu le vérifier numériquement pour des sections de diverses formes particulières [1].

§ 14. *Conservation de la forme des équations algébriques des contours des sections, du § 10 ci-dessus, quand on change l'origine et les axes des coordonnées transversales.* — Mettons :

[1] Nous ne l'avions pas encore fait lors de l'impression de notre Mémoire sur la torsion; aussi nous y énoncions, à l'article 59, la possibilité de restrictions qui n'ont pas lieu.

On peut vérifier encore de la manière suivante, qui est une particularisation de la méthode générale donnée par M. Lamé à sa 2e *Leçon* (1852 *sur l'élasticité*, que la nullité des deux intégrales $\int g' d\omega$, $\int g'' d\omega$ est une conséquence des équations différentielles indéfinie et définie du problème de la torsion, équations (§§ 6 et 8 ci-dessus) qui peuvent être écrites ainsi, en appelant x la coordonnée longitudinale des points du prisme dont u, v sont les coordonnées transversales, et β, γ les angles que fait, avec les u et les v, la normale au contour de la section ou bien aux faces latérales :

$$\frac{dg'}{du} + \frac{dg''}{dv} = 0, \quad \frac{dg'}{dx} = 0, \quad \frac{dg''}{dx} = 0 \quad \text{partout};$$

$$g'' \cos\gamma + g' \cos\beta = 0 \quad \text{sur ces faces latérales.}$$

En multipliant par v la première de ces équations, par x la deuxième, et en les retranchant respectivement de la troisième multipliée par x et de la première multipliée par u, on obtient celles-ci :

$$\frac{d(xg'')}{dx} - \frac{d(vg')}{du} - \frac{d(vg'')}{dv} = 0, \quad \frac{d(xg')}{dx} - \frac{d(ug')}{du} - \frac{d(ug'')}{dv} = 0,$$

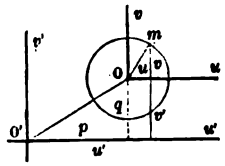
qui, multipliées par l'élément solide $dxdudv$ et intégrées pour tout le volume du prisme, donnent facilement (Lamé, § 10), en appelant a sa longueur ou hauteur, et $d\varpi$ l'élément de la surface latérale de même que $d\omega = dudv$ est l'élément des bases :

$$a\int g'' d\omega - \int v(g' \cos\beta + g'' \cos\gamma) d\varpi = 0, \quad a\int g' d\omega - \int u(g' \cos\beta + g'' \cos\gamma) d\varpi = 0,$$

d'où $\int g'' d\omega = 0$, $\int g' d\omega = 0$, eu égard à l'équation $g'' \cos\gamma + g' \cos\beta = 0$ ci-dessus.

(Du n° 156).

$u'-p$ à la place de u,
$v'-q$ à la place de v



dans l'équation générale $\frac{u^2+v^2}{2}+\ldots=K$ des contours algébriques du § 10; c'est-à-dire transportons l'origine des coordonnées de O en un point O' pour lequel $u=-p$, $v=-q$, en changeant u, v en d'autres coordonnées u', v' parallèles, dont les axes passent par O'. Comme cette équation peut être écrite

$$\frac{u^2+v^2}{2}+C_1u+C_2u_2+C_3u_3+\ldots\ldots-C'_1v-C'_2v_2-C'_3v_3-\ldots\ldots=K$$

lorsqu'on fait, pour abréger

$$u^2-v^2=u_2,\ u^3-3uv^2=u_3,\ u^4-6u^2v^2+v^4=u_4,\ \ldots\ldots$$
$$2uv=v_2,\ 3u^2v-v^3=v_3,\quad 4u^3v-4uv^3=v_4,\ \ldots\ldots$$

(ce qui revient à appeler généralement u_n, v_n les produits $r^n\cos n\alpha$, $r^n\sin n\alpha$), si nous nommons encore

$$u'_n,\quad v'_n,\quad \text{et}\quad p_n,\quad q_n$$

des expressions composées en u', v', ou en p, q, comme u_n, v_n le sont en u, v, nous trouverons d'abord facilement par cette substitution de $u'-p$, $v'-q$ à u, v :

$$u_n=u'_n-\frac{n}{1}(pu'_{n-1}-qv'_{n-1})+\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}(p_2u'_{n-2}-q_2v'_{n-2})-\ldots\ldots$$
$$v_n=v'_n-\frac{n}{1}(pv'_{n-1}+qu'_{n-1})+\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}(p_2v'_{n-2}+q_2u'_{n-2})-\ldots\ldots$$

En sorte que l'équation du contour avec les coordonnées nouvelles sera bien de cette forme, semblable à sa forme primitive

$$\frac{u'^2+v'^2}{2}+D_1u'+D_2u'_2+D_3u'_3+\ldots\ldots-D'_1v'-D'_2v'_2-D'_3v'_3-\ldots\ldots=L,$$

(Du n° 156).

$D_1, D_2 \ldots, D'_1, D'_2 \ldots$ étant des polynômes en $C_1, C_2 \ldots, C'_1, C'_2 \ldots$, p et q [1].

Cette forme se conservera encore la même si, au lieu de changer l'origine des coordonnées, on remplace les anciens axes des u, des v, par des axes nouveaux faisant avec ceux-ci un angle quelconque θ; car si l'on pose l'équation du contour en coordonnées polaires, ou si on l'écrit (§ 11) :

$$\frac{r^2}{2} + C_1 r\cos\alpha + C_2 r^2\cos 2\alpha + \ldots - C'_1 r\sin\alpha - C'_2 r^2 \sin 2\alpha - \ldots = K,$$

la transformation s'opérera en y faisant $\alpha = \theta + \alpha'$, α' étant l'angle du rayon vecteur r avec le nouvel axe des u; or cette substitution donnera :

$$\frac{r^2}{2} + (C_1\cos\theta - C'_1\sin\theta) r\cos\alpha' + (C_2\cos 2\theta - C'_2\sin 2\theta) r^2\cos 2\alpha' + \ldots\ldots$$
$$- (C_1\sin\theta + C'_1\cos\theta) r\sin\alpha' - (C_2\sin 2\theta + C'_2\cos 2\theta) r^2\sin 2\alpha' - \ldots = K,$$

ou une équation toujours de même forme, *quels que soient les axes des coordonnées transversales.*

§ 15. *Torsion d'un prisme autour de divers axes intérieurs ou extérieurs, parallèles à ses arêtes. Identité des glissements, du moment de torsion, et de la surface courbe affectée par les sections, quel que soit l'axe de torsion.* — Si nous faisons, comme au § précédent, $u = u' - p$, $v = v' - q$ dans les expressions des glissements données § 10, et qui peuvent être écrites, avec les notations dont nous venons de faire usage :

[1] On trouve pour ces polynômes

$$L = K - \frac{p^2 + q^2}{2} + C_1 p - C_2 p_2 + \ldots\ldots - C'_1 q + C'_2 q_2 - \ldots$$

$$D_1 = -p + C_1 - 2C_2 p + 3C_3 p_2 - \ldots + 2C'_2 q - 3C'_3 q_2 + \ldots$$
$$1.2 D_2 = 2.1 C_2 - 3.2 C_3 p + 4.3 C_4 p_2 - \ldots + 3.2 C'_3 q - 4.3 C'_4 q_2 + \ldots$$
$$1.2.3 D_3 = 3.2.1 C_3 - 4.3.2 C_4 p + 5.4.3 C_5 p_2 - \ldots + 4.3.2 C'_4 q - 5.4.3 C'_5 q_2 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D'_1 = q + C'_1 - 2C'_2 p + 3C'_3 p_2 - \ldots - 2C_2 q + 3C_3 q_2 - \ldots$$
$$1.2 D'_2 = 2.1 C'_2 - 3.2 C'_3 p + 4.3 C'_4 p_2 - \ldots - 3.2 C_3 q + 4.3 C_4 q_2 - \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(Du n° 156).

$$g' = \theta\,(C'_1 + 2C'_2u + 3C'_3u_2 + \ldots - v + 2C_2v + 3C_3v_2 + \ldots),$$
$$g'' = \theta\,(u + C_1 + 2C_2u + 3C_3u_2 + \ldots - 2C'_2v - 3C'_3v_2 - \ldots),$$

nous obtenons, tout calcul fait, avec les mêmes notations du § précédent :

$$g' = \theta(D'_1 + 2D'_2u' + 3D'_3u'_2 + \ldots - v' + 2D_2v' + 3D_3v'_2 + \ldots),$$
$$g'' = \theta(u' + D_1 + 2D_2u' + 3D_3u'_2 + \ldots - 2D'_2v' - 3D'_3v'_2 - \ldots),$$

c'est-à-dire, d'après l'équation du contour en u', v' obtenue au même §, précisément les glissements qu'on aurait eus si la torsion avait été opérée autour de l'axe passant en O′ au lieu de l'être autour de l'axe passant en O.

Les glissements, ou les inclinaisons prises par les fibres devenues des hélices, sur les divers éléments des sections devenues des surfaces courbes, *sont donc les mêmes, quel que soit l'axe, parallèle aux arêtes, autour duquel on opère une torsion* θ.

Comme les inclinaisons mutuelles des fibres devenues des hélices sont aussi les mêmes, quel que soit l'axe, il est facile d'en déduire, soustractivement, que les inclinaisons mutuelles des éléments des sections, et par conséquent *les formes des surfaces courbes qu'elles affectent* sont constamment les mêmes aussi, et que la seule différence est dans les inclinaisons diverses qu'elles prennent sur les axes de torsion diversement situés.

Mais on peut démontrer ces théorèmes d'une manière plus générale, ou applicable également aux formes transcendantes, en partant des équations différentielles indéfinie et définie (§ 6 et § 8) :

$$\frac{d^2z}{du^2} + \frac{d^2z}{dv^2} = 0, \qquad \left(\frac{dz}{dv} + \theta u\right) du - \left(\frac{dz}{du} - \theta v\right) dv = 0,$$

qui déterminent le déplacement longitudinal z d'un point pour une torsion θ autour de l'axe passant par l'origine O de ses coordonnées u, v. En effet, si l'on y change les variables u, v en d'autres $u' = u + p$, $v' = v + q$, elles deviennent

$$\frac{d^2z}{du'^2} + \frac{d^2z}{dv'^2} = 0, \qquad \left(\frac{dz}{dv'} + \theta u' - \theta p\right) du' - \left(\frac{dz}{du'} - \theta v' + \theta q\right) dv' = 0;$$

et ces équations sont satisfaites par

(Du n° **156**).

$$z = z' + \theta(pv' - qu')$$

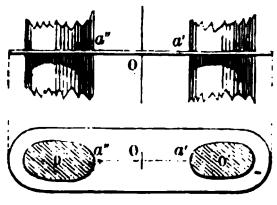
en appelant z' la valeur du déplacement longitudinal z qui y satisferait si l'on avait $p = 0$, $q = 0$, *ou si la torsion s'opérait autour de l'axe nouveau* O' *au lieu de s'opérer autour de l'axe ancien* O.

On voit que les ordonnées z, z' des deux surfaces dans lesquelles ces deux torsions ont transformé les plans des sections ne diffèrent que par la petite ordonnée $\theta(pv' - qu') = \theta(pv - qu)$ d'un plan très-peu incliné, d'où il suit que *ces deux surfaces sont superposables* et peuvent être amenées à coïncider moyennant de petites rotations θp, $-\theta q$ de l'une d'elles autour de parallèles aux u et aux v.

On voit aussi que $\frac{dz}{dv} + \theta u = \frac{dz'}{dv'} + \theta u'$, $\frac{dz}{du} - \theta v = \frac{dz'}{du'} - \theta v'$, ou que les glissements g', g'' déterminés par l'une et par l'autre torsion sont les mêmes aux mêmes points, comme nous venons de le démontrer autrement pour les sections dont les contours ont une équation de la forme algébrique $\frac{u^2 + v^2}{2} + \ldots\ldots = K$ du § 10.

Il s'ensuit que le *moment de torsion* (§ 9) *a la même grandeur, quel que soit l'axe* (parallèle aux arêtes), *autour duquel on tord le prisme*, puisque les forces $Gg'd\omega$, $Gg''d\omega$ agissant sur chaque section et dont il est le moment total, sont toujours les mêmes, et qu'elles n'ont pas de résultante ou qu'elles se réduisent constamment à un couple comme on a vu § 13.

La torsion d'un prisme autour d'un axe extérieur est réalisable en l'unissant à cet axe par des liens transversaux qui l'astreignent à présenter toujours à celui-ci la même arête, sans que ces liens gênent du reste l'inclinaison et la courbure que tendent à prendre ses fibres et ses sections. Elle est opérée plus facilement en tordant deux prismes égaux, parallèles et distants, liés de manière que leurs sections correspondantes o', o'' se regardent constamment par les mêmes points a', a'', astreints à rester sur une même droite passant par l'axe de torsion intermédiaire O (voy. ci-après, § 36).



On voit que les mêmes forces $Gg'd\omega$, $Gg''d\omega$ appliquées aux élé-

ments des bases d'un prisme le maintiennent tordu indifféremment autour de tout axe parallèle à ses arêtes, et que le moment de la torsion simultanée de deux prismes égaux et distants est justement double de celui qui maintiendrait tordu chacun d'eux d'un même angle autour d'un axe intérieur.

Il faut toutefois, évidemment, lorsque l'axe de torsion n'est pas l'axe qu'on a considéré en traitant de la flexion et qui traverse les sections à leurs centres de gravité. ajouter aux forces $Gg'd\omega$, $Gg''d\omega$ des forces capables de fléchir le prisme de manière que ce dernier axe devienne une hélice. Mais ces dernières forces *sont très-petites du second ordre* si, comme nous l'avons constamment supposé, la torsion θ est très-petite du premier ordre [1]; elles ne devaient donc pas être fournies par notre calcul, où les quantités du second ordre sont négligées.

§ 16. *Expression générale du moment de torsion des prismes dont les sections ont des contours représentés par l'équation algébrique du* § 10. — En mettant dans $M_1 = G\int_0^\omega (g''u - g'v)\,d\omega$ (§ 9) les valeurs (§ 10) des glissements g'' et g', on trouve pour le moment de torsion

$$M_1 = G\theta\int_0^\omega d\omega\left[\begin{array}{l} u^2+v^2+C_1u+2C_2(u^2-v^2)+3C_3(u^3-3uv^2)+4C_4(u^4-6u^2v^2+v^4)+\ldots \\ \qquad -C'_1v-2C'_2.2uv-3C'_3(3u^2v-v^3)-4C'_4(4u^3v-4uv^3)-\ldots \end{array}\right]$$

expression dans laquelle on peut prolonger ou réduire autant qu'on veut la quantité entre crochets par l'addition de nouveaux termes (§ 10) ou par la suppression d'un ou plusieurs de ceux que nous écrivons ici.

[1] En effet, soit $a = Oo'$ la distance entre l'axe de figure o' passant par les centres de gravité des sections, et l'axe de torsion O. La tangente de l'angle que fait, avec un plan perpendiculaire à celui-ci, l'hélice dans laquelle celui-là se change, est $\frac{1}{\theta a}$; on a, pour le rayon de courbure ρ de cette hélice, $\rho = \left(1+\frac{1}{\theta^2a^2}\right)a$; d'où, pour le moment de flexion,

$$\frac{EI}{\rho} = \frac{EI}{a+\frac{1}{\theta^2 a}} = \theta^2 a\,.\,\frac{EI}{1+\theta^2a^2}$$

quantité très-petite du second ordre.

(Du n° 156).

En coordonnées polaires (§ 11), on aurait

$$M_1 = G\theta \int d\omega \begin{bmatrix} r^2 + C_1 r\cos\alpha + 2C_2 r^2\cos 2\alpha + 3C_3 r^3\cos 3\alpha + \ldots\ldots \\ - C'_1 r\sin\alpha - 2C'_2 r^2\sin 2\alpha - 3C'_3 r^3\sin 3\alpha - \ldots\ldots \end{bmatrix},$$

ou, plus généralement, n, n' pouvant être fractionnaires ou négatifs (§ 11) :

$$M_1 = G\theta \int d\omega \left(r^2 + \Sigma n C_n \cos n\alpha - \Sigma n' C'_{n'} r^{n'} \sin n'\alpha\right).$$

§ 17. *Plus grands glissements. Points dangereux. Équation de cohésion permanente ou de résistance à la rupture éloignée par torsion.* — Afin de ne pas interrompre des considérations naturellement liées, nous donnerons ici, et dans chacune des particularisations des §§ suivants, après l'expression du moment de torsion, l'équation de cohésion permanente ou de résistance à la rupture *éloignée* par torsion [1], bien que Navier n'ait parlé de cette résistance qu'à un article suivant, VI.

En appelant, comme au § 7 de la note du n° 152, p. 196 :

T_0 la limite des efforts tangentiels que la matière peut supporter sans danger par unité de surface pendant un temps indéfini,

la limite des glissements non dangereux sera

$$\frac{T_0}{G}.$$

Il faut exprimer que nulle part cette limite n'est dépassée, ou que le plus grand *glissement principal* $g = \sqrt{g'^2 + g''^2}$ lui est égal ou inférieur. La condition de résistance permanente à la rupture par torsion sera donc

$$\left(\frac{T_0}{G}\right)^2 = \text{ou} > \text{ maximum de } g'^2 + g''^2.$$

Pour trouver les points dangereux ou de maximum de $\frac{g^2}{\theta^2} = \frac{g'^2 + g''^2}{\theta^2}$ il convient de remarquer, d'abord, d'après les expressions de g' et g'', ou celle de $g^2 = g'^2 + g''^2$ en r et α du § 11, que, sur le plan

[1] On verra, à la note du n° 165, quelle formule on pourrait adopter pour la résistance à la rupture *immédiate* ou *prochaine* par torsion, au moins dans le cas du cylindre à base circulaire.

(Du n° 156).

indéfini de la section, elles peuvent toujours prendre des grandeurs aussi considérables qu'on veut, car, en rendant r suffisamment grand, le terme où il est à la plus haute puissance surpassera tous les autres, et comme il est toujours positif dans g^2, ce carré devient infini avec r dans toutes les directions ou pour toutes les valeurs de l'angle α. Si g^2 croissait toujours de l'intérieur à l'extérieur de la section pour chaque direction, ce serait constamment sur son contour qu'il faudrait chercher les points dangereux. Mais nous savons qu'il y a souvent des points du contour où le glissement est nul, et il peut y avoir, dans l'intérieur, quelque point de maximum absolu de g^2 (quoique cela ne se soit présenté dans aucun des exemples ci-après traités); et il n'est pas impossible que ce maximum excède toutes les valeurs de g^2 relatives aux points du contour.

Il faudra donc chercher d'abord les points de maximum absolu de g^2, ou s'assurer qu'il n'y en a pas. Ils doivent, comme on sait, s'ils existent, satisfaire à

$$\frac{d\frac{g^2}{\theta^2}}{d\alpha}=0,\ \frac{d\frac{g^2}{\theta^2}}{dr}=0;\ \frac{d^2\frac{g^2}{\theta^2}}{d\alpha^2}\text{ et }\frac{d^2\frac{g^2}{\theta^2}}{dr^2}\text{ négatifs};\ \left(\frac{d^2\frac{g^2}{\theta^2}}{d\alpha\,dr}\right)^2-\frac{d^2\frac{g^2}{\theta^2}}{d\alpha^2}\cdot\frac{d^2\frac{g^2}{\theta^2}}{dr^2}\text{ négatif ou nul.}$$

On les cherchera analytiquement ou numériquement sur les lignes droites ou courbes représentées par l'équation $\frac{d\frac{g^2}{\theta^2}}{d\alpha}=0$ (qui en fournira toujours plusieurs, et qui est généralement plus simple que l'équation $\frac{d\frac{g^2}{\theta^2}}{dr}=0$, susceptible de servir au même objet) et on essayera s'ils remplissent les conditions relatives aux dérivées du second ordre $\frac{d^2}{d\alpha^2}$, $\frac{d^2}{dr^2}$, et s'ils tombent à l'intérieur du contour.

La double recherche *sur les lignes ayant pour équation* $\frac{d\frac{g^2}{\theta^2}}{d\alpha}=0$ et *sur le contour*, conduira donc, dans tous les cas, à la détermi-

(Du n° 158).

nation de ces points de la section où g^2 a une valeur plus grande qu'aux autres points.

Souvent ces points dangereux seront les intersections de lignes $\frac{d\frac{g^2}{\theta^2}}{d\alpha}=0$ avec le contour de la section; mais quelquefois aussi ils se trouveront en d'autres endroits du contour, comme nous en verrons des exemples aux §§ 33, 35.

Lorsque la section est partagée symétriquement par une ou plusieurs lignes droites, *ces lignes de symétrie sont nécessairement au nombre de celles de maximum ou de minimum relatif de* g^2 qui satisfont à $\frac{d}{d\alpha}\frac{g^2}{\theta^2}=0$; car, en prenant l'une d'elles pour l'axe à partir duquel on compte les angles α (ou pour l'axe des u), les coefficients C'_1, C'_2, C'_3... des équations et expressions des §§ 10 et 11 sont nuls, et il ne reste que les termes affectés de C_1, C_2, C_3..., comme on a vu § 12; l'expression (§ 11) de $\frac{g^2}{\theta^2}$ ne contient donc que des cosinus de α et de ses multiples: son coefficient différentiel ne contient que des sinus et devient nul pour $\alpha=0$, c'est-à-dire pour les points de la ligne de symétrie.

Et *les intersections de chacune de ces lignes de symétrie avec le contour de la section sont des points de maximum ou de minimum* de g^2 *sur ce contour;* car elles le coupent à angle droit; r y est constant sur une petite étendue, en sorte que la condition $\frac{d.g^2}{d\alpha}=0$ pour r constant s'y trouve remplie par les valeurs de g^2 relatives aux points du même contour.

C'est ce qu'il était facile de prévoir en se rappelant (§ 12) que lorsqu'on place l'axe de torsion de manière qu'il rencontre une ligne de symétrie, elle reste tout entière dans le plan primitif de la section, ce qui donne pour tous ses points, en la prenant pour axe des u, $v=0$, la pente $i=0$, et $g'=i-\theta v$ nul aussi, ainsi que son coefficient différentiel $\frac{dg'}{du}$; d'où $g=g''$, et, vu que $\frac{dg'}{du}+\frac{dg''}{dv}=0$ (§ 6),

$$\frac{dg}{dv}=0,$$

(Du n° 156).

c'est-à-dire que le glissement principal est bien un maximum ou un minimum, en tous les points de cette ligne de symétrie, parmi les autres points situés sur des lignes qui la coupent à angle droit.

Aussi, dans presque tous les exemples ci-après (mais non dans tous, voyez §§ 33, 35), c'est aux extrémités des plus grands et des plus petits diamètres que se sont trouvés les points de maximum et de minimum de glissement. Les points dangereux ou de maximum ont été, pour ces mêmes exemples, *les extrémités des plus petits diamètres*, ou *les points du contour les plus rapprochés des centres des sections*. Mais cela ne saurait être général, car, *lorsque le contour offre des angles rentrants*, les arêtes y restent normales aux sections, *et le glissement y est nul comme aux angles saillants*, par la même raison qu'on a dite au § 4, et qui est dérivée de la condition de normalité des sections infléchies à la surface latérale modifiée par la torsion ; d'où l'on doit inférer que lorsque les contours des sections offrent des parties rentrantes arrondies, mais d'une courbure très prononcée, le glissement doit y être un minimum et non un maximum parmi les points du contour.

En tous cas il est bien entendu, si seulement on se rappelle l'indépendance où sont les glissements de la position de l'axe de torsion (§ 15) que leurs grandeurs ne sauraient être constamment en raison directe des distances, à cet axe, des points des sections où ils ont lieu, comme il fallait le supposer dans l'ancienne théorie basée sur l'hypothèse que les sections restent planes et perpendiculaires au même axe. Il n'est donc nullement étonnant que les plus grands glissements se trouvent le plus souvent aux points les plus proches de l'axe de torsion supposé passer au centre.

§ 18. *Premier exemple ou première particularisation. Section circulaire. Torsion d'un cylindre autour de son axe de figure.* — On obtient une section circulaire en supposant les coefficients C_1, C_2, C_3 ..... C'_1, C'_1, C'_2..... tous nuls, ou les pentes i, j nulles; car l'équation du contour est alors, en faisant $2K = r^2$:

$$u^2 + v^2 = r^2 ;$$

et l'équation de la surface de la section, qui se réduit à

(Du n° 156).

$$z = 0,$$

vérifie bien que cette surface reste plane comme on l'a vu au § 4. Alors on a le moment de torsion

$$M_1 = G\theta \int (u^2 + v^2) du = G\theta J,$$

J étant le moment d'inertie de la section autour de son centre, ainsi qu'il a déjà été dit, ou bien, vu que $J = \frac{\pi r^4}{2}$ (§ 1),

$$M_1 = G\theta \frac{\pi r^4}{2}.$$

Une pareille torsion d'un cylindre circulaire de rayon quelconque r est déterminée par des forces qui ont pour valeur, en appelant toujours r le rayon vecteur du milieu d'un élément quelconque $d\omega$ de la section

$$Ggd\omega = Gd\omega\sqrt{g'^2 + g''^2} = Gd\omega\sqrt{(\theta u)^2 + (-\theta v)^2} = G\theta r \,.\, d\omega,$$

c'est-à-dire par des forces appliquées sur les bases extrêmes, tangentiellement ou dans leurs plans, et perpendiculairement aux rayons vecteurs auxquels elles sont proportionnelles, ainsi qu'aux superficies des éléments $d\omega$.

Et tout autre mode de sollicitation ou de distribution des forces aux extrémités donnera très-approximativement, d'après ce qu'on a dit au § 9 et d'après l'expérience, la même torsion pour le même moment total M_1.

Comme le plus grand glissement répond à $r = r$, l'équation de cohésion permanente ou de résistance à la rupture *éloignée* sera (§ précédent) :

$$T_0 = \text{ou} > G\theta r;$$

ou, en éliminant $G\theta$ au moyen de l'expression $M_1 = G\theta \frac{\pi r^4}{2}$ du moment de torsion :

$$\text{Limite de } M_1 = \frac{\pi r^3}{2} T_0;$$

équation qu'on aurait obtenue immédiatement en regardant les résistances comme proportionnelles aux distances au centre (ce qui

ENGINEERING LIBRARY

TA350
.N3
1864
V.1 c.
TIMO
SHEN
COL

TA 350 .N3 1864 C.2
Resume des leçons donnees a Ec
Stanford University Libraries
3 6105 030 423 276

DATE DUE

TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004

ENGINEERING LIBRARY
TA350
.N3
1864
V.I c
TIMO-
SHENK-
COLL.
TA 350 .N3 1864 C.2
Resume des lecons donnees a Ec
Stanford University Libraries
3 6105 030 423 276

DATE DUE

TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004